

ANÁLISIS DE SERIES TEMPORALES DIARIAS DE APERTURAS, MÁXIMOS, MÍNIMOS Y CIERRES DE ACTIVOS FINANCIEROS A TRAVÉS DEL EXPONENTE DE HURST

UVIC

Juan Ricardo Rivera Peruyero

Director

Dr. Pere Martí i Puig

Programa de Doctorado en
Ciencias Experimentales y Tecnologías

Escola de Doctorat de la Universitat de Vic

Universitat Central de Catalunya

Vic, Catalunya

2016

UVIC

UNIVERSITAT DE VIC
UNIVERSITAT CENTRAL
DE CATALUNYA



U SCIENCE TECH

Análisis de series temporales diarias de aperturas, máximos, mínimos y cierres de activos financieros a través del exponente de Hurst

Juan Ricardo Rivera Peruyero

Director
Dr. Pere Martí i Puig

Programa de Doctorado en
Ciencias Experimentales y Tecnologías

Universitat de Vic
Escola Politècnica Superior
Tecnologies Digitals i de la Informació

Vic, Catalunya

Mayo 2016

Dedicado ...

A la memoria de mis padres Mary y Liberto, que siempre les estaré agradecido por todo lo que hicieron por mí. Sobre todo por haber sabido despertar en mí la inquietud por el conocimiento y los estudios, aunque en aquel momento no se dieran las condiciones más idóneas.

Agradecimientos.

A Dr. Pere Martí-Puig por su capacidad innata para motivar, por su infinita paciencia y por la disponibilidad permanente durante todo este tiempo, pero sobre todo, por ser un "out-of-the-box thinker" sin el que no hubiesen sido posibles los enfoques abordados en este periodo de investigación, gracias por todo.

A la Universidad de Vic por haberme dado cobertura para los estudios de Ingeniería, los de Master y finalmente en esta Tesis.

A mi esposa Arancha, por su apoyo y dedicación, por darme fuerzas para seguir adelante. Gracias por ser como es.

Disculpas a mi hijo Carlos, que llegó a este mundo en pleno periodo de investigación, por no haberle podido dedicar todo el tiempo que hubiese querido. Espero que algún día lo comprenda y esto me ayude a despertar en él la inquietud que, en otro tiempo, mis padres despertaron en mí.

Resumen

De acuerdo con numerosos estudios recientes es conocido que el modelo Browniano fraccional se ajusta mejor a la descripción estadística de las series temporales de origen financiero que la descripción proporcionada por el modelo Browniano puro, también conocido como paseo aleatorio. Es sabido también que el modelo Browniano fraccional queda definido a partir de un único valor, H , conocido como exponente de Hurst que, además, está directamente relacionado con la dimensión fractal de las series. El objetivo principal de esta tesis consiste en caracterizar estadísticamente las series temporales de precios estimando el parámetro H de las cuatro series de datos diarios formadas por las aperturas, los máximos, los mínimos y los cierres.

Ya en el análisis bibliográfico previo sobre la caracterización a través de H , lo primero que se detectó es que los estudios existentes han sido realizados sobre las series de precios de retornos diarios y en menor medida sobre la serie de los cierres y, en cambio, no había caracterización alguna de las series de aperturas, máximos y mínimos, con lo que introducimos estas series en los análisis. Los primeros resultados fueron sorprendentes. Los cierres, de acuerdo con los estudios publicados, suelen presentar un H en torno a 0.5, que los asemejaba al comportamiento del modelo Browniano puro, sin embargo, la primera sorpresa fue que las series de máximos y mínimos presentaba valores de exponente de Hurst marcadamente superiores al de los cierres, implicando la existencia de mayor persistencia y correlación mientras que las aperturas presentaban ligeras propiedades de anti-persistencia con valores de H ligeramente inferiores a 0.5. Un estudio a fondo revela que este resultado se reproduce en la inmensa mayoría de las series analizadas pertenecientes a acciones de diferentes índices europeos y americanos, así como a los valores mismos de los índices. Este ha sido un resultado original que no hemos visto reportado previamente y que ha constituido el hilo conductor de la tesis. El resto de capítulos, salvo el último intentan explorar diferentes implicaciones del resultado. El último capítulo compila un conjunto de técnicas que se desarrollaron al inicio de la tesis y que en ocasiones funcionaban muy bien pero que en otras perdían sus propiedades, comportándose de forma parecida a otras técnicas conocidas, que no pudimos mejorar. Al no poder identificar las causas de este desajuste no supimos adaptar el sistema a las variaciones de la señal para que funcionara correctamente de forma permanente.

Una vez reportado el resultado original relativo al exponente de Hurst, el siguiente paso ha sido explorar la capacidad de estimar dinámicamente H para detectar cambios temporales en las características de las series, con lo cual se modifican los estimadores a

fin de que proporcionen estimaciones dinámicas. Seguidamente se analiza la relación del exponente de Hurst y la auto-correlación de las cuatro series con una exploración, también en profundidad, del primer elemento de la auto-correlación. Guiados por los resultados, el siguiente paso consiste en proponer un método de predicción a una muestra a partir de ejemplos de complejidad incremental que están basados en las detecciones de patrones definidos a partir de un vector que llamamos semilla y la satisfacción de una determinada condición. Al ir incrementando la complejidad de los experimentos mostramos cómo podemos obtener sistemas de generación de señales de apertura y cierre de posiciones.

Como ya hemos mencionado, en el capítulo final mostramos trabajos que se realizaron en una fase inicial de la investigación y que son también planteamientos originales. Paradójicamente podría ser, aunque lo dejemos como línea de investigación futura, que la herramienta que nos faltaba para recalibrar estos sistemas (o desactivarlos en un fase temprana) cuando pierden su buen funcionamiento nos la proporcionara el parámetro H de alguna de las cuatro series o bien una medida directamente relacionada con éste, como pudieran ser los primeros coeficiente de la auto-correlación.

Ya para finalizar, sólo mencionar que las cuatro series temporales diarias que analizamos, más el volumen, son el resumen que se publica a diario para caracterizar el comportamiento de los precios diarios de cualquier activo financiero que opere en un mercado regulado del mundo. Todas estas series temporales se encuentran disponibles de forma abierta y pueden obtenerse de, entre otras plataformas, los portales de Google y Yahoo!, de modo que los resultados obtenidos pueden ser contrastados de forma sencilla utilizando los programas de descarga de datos desarrollados en el marco de esta tesis.

Resum

D'acord amb nombrosos estudis recents es sap que el model Brownià fraccional s'ajusta millor a la descripció estadística de les sèries temporals d'origen financer que la descripció proporcionada pel model Brownià pur, també conegut com a passeig aleatori. És sabut també que el model Brownià fraccional queda definit a partir d'un únic valor, H , conegut com a exponent de Hurst que, a més, està directament relacionat amb la dimensió fractal de les sèries. L'objectiu principal d'aquesta tesi consisteix a caracteritzar estadísticament les sèries temporals de preus calculant el paràmetre H de les quatre sèries de dades diàries formades per les obertures, els màxims, els mínims i els tancaments.

Ja en l'anàlisi bibliogràfic previ sobre la caracterització de series temporals a través de H , el primer que es va detectar és que els estudis existents han estat realitzats sobre les sèries de preus de retorns diaris i en menor mesura sobre la sèrie dels tancaments i, en canvi, no hi havia cap caracterització de les sèries d'obertures, màxims i mínims. En els nostres anàlisis els primers resultats van ser sorprenents. Els tancaments, d'acord amb els estudis publicats, solen presentar un H al voltant de 0.5, que els fa semblants al comportament del model Brownià pur. La primera sorpresa va ser, però, que les sèries de màxims i mínims presentava valors d'exponent de Hurst marcadament superiors als dels tancaments, implicant l'existència de més permanència i correlació. Així mateix, les obertures presentaven lleugeres propietats d'anti-persistència amb valors de H lleugerament inferiors a 0.5. Un estudi a fons revela que aquest resultat es reproduïx en la immensa majoria de les sèries analitzades pertanyents a accions de diferents índexs europeus i americans, així com als valors mateixos dels índexs. Aquest ha estat un resultat original que no hem vist reportat prèviament i que ha constituït el fil conductor de la tesi. La resta de capítols, llevat de l'últim, intenten explorar diferents implicacions d'aquest resultat. L'últim capítol compila un conjunt de tècniques que es van desenvolupar a l'inici de la tesi i que en ocasions funcionaven molt bé però que en altres perdien les seves propietats, comportant-se de forma semblant a altres tècniques conegudes, que no vam poder millorar. Al no poder identificar les causes d'aquest desajust no vam saber adaptar el sistema a les variacions del senyal per tal de què funcionés correctament de forma permanent.

Un cop reportat el resultat original relatiu a l'exponent de Hurst, el següent pas ha estat explorar la capacitat d'estimar dinàmicament H per detectar canvis temporals en les característiques de les sèries, amb la qual cosa es modifiquen els estimadors per tal que proporcionin estimacions dinàmiques. Seguidament s'analitza la relació de l'exponent de Hurst i l'auto-correlació de les quatre sèries amb una exploració, també en profunditat, del

primer element de l'auto-correlació. Guiats pels resultats, el següent pas consisteix a proposar un mètode de predicció a una mostra a partir d'exemples de complexitat incremental que estan basats en les deteccions de patrons definits a partir d'un vector que anomenem llavor i la satisfacció d'una determinada condició. En anar incrementant la complexitat dels experiments mostrem com podem obtenir sistemes de generació de senyals d'obertura i tancament de posicions.

Com ja hem esmentat, en el capítol final hem presentat treballs que es van realitzar en una fase inicial de la investigació i que són també plantejaments originals tot i que en elseu moment van ser desestimats. Paradoxalment podria ser, tot i que ho deixem com a línia d'investigació futura, que l'eina que ens faltava per recalibrar aquests sistemes (o desactivar-los en un fase primerenca) quan perden el seu bon funcionament ens la proporcionés el paràmetre β d'alguna de les quatre sèries o bé una mesura directament relacionada amb aquest paràmetre, com podrien ser els primers coeficient de l'auto-correlació.

Ja per acabar, només esmentar que les quatre sèries temporals diàries que analitzem, més el volum, són el resum que es publica diàriament per caracteritzar el comportament dels preus diaris de qualsevol actiu financer que operi en un mercat regulat del món. Totes aquestes sèries temporals es troben disponibles de forma oberta i es poden obtenir de, entre altres plataformes, els portals de Google i Yahoo!, de manera que els resultats obtinguts poden ser contrastats de forma senzilla utilitzant els programes de descàrrega de dades desenvolupats en el marc d'aquesta tesi.

Contenido

	Pág.
Resumen	I
Resum	III
Contenido	V
Lista de figuras	XI
Lista de tablas	XV
Lista de tablas en anexos	XIX
Lista de abreviaturas	XXIII
Lista de Símbolos	XXV
CAPÍTULO 1: Introducción	1
1.1. Antecedentes y marco contextual	1
1.1.1. El sistema financiero.....	1
1.1.1.1. Las Instituciones.....	1
1.1.1.1-a) Los intermediarios bancarios.....	1
1.1.1.1-b) Los intermediarios no bancarios.....	2
1.1.1.2. Activos Financieros.....	2
1.1.1.2-a) La liquidez.....	2
1.1.1.2-b) El riesgo.....	2
1.1.1.2-c) La rentabilidad.....	2
1.1.1.3. Los Mercados financieros: La Bolsa.....	2
1.1.1.3-a) Clasificación.....	3
1.1.1.3-b) Funciones.....	4
1.1.1.3-c) Características.....	4
1.2. Análisis de los mercados financieros	4
1.2.1. Análisis fundamental.....	5

1.2.2. Análisis técnico.....	5
1.2.2.1. El precio lo descuenta todo	6
1.2.2.2. El precio se mueve por tendencias	6
1.2.2.3. La historia se repite.....	6
1.2.2.4. Tipos de análisis técnico.....	6
1.2.2.4-a) Análisis <i>chartista</i>	7
1.2.2.4-b) Análisis cuantitativo	7
1.3. Motivación	7
1.4. Objetivos generales	8
1.5. Descripción general de la tesis	8
1.6. Marco de trabajo	10
1.6.1. Origen/Fuente de los datos	10
1.6.1.1. Google Finance.....	11
1.6.1.2. Yahoo! Finance.....	11
1.6.1.3. Visual Chart.....	11
1.6.2. Series de precios	11
1.6.2.1. Conceptos de señal y serie temporal	11
1.6.2.2. Conceptos de retornos y Log-return.....	12
1.6.2.3. Representación gráfica utilizada.....	13
1.6.2.3-a) Gráfico de barras	14
1.6.2.3-b) Gráfico de velas	14
1.6.3. Matlab.....	14
1.6.4. Algoritmos para la extracción de datos	15
1.6.4.1. Google Finance.....	16
1.6.4.2. Yahoo! Finance.....	17
1.6.4.3. Visual Chart.....	18
CAPÍTULO 2: Análisis de las series temporales financieras a partir del exponente de Hurst.....	23
2.1. Introducción	23
2.1.1. Estado del arte.....	24
2.1.2. Descripción del método original para la estimación del exponente de Hurst.....	28
2.2. Selección de un estimador para el exponente de Hurst	30

2.2.1. Pruebas de evaluación y selección del estimador	30
2.2.2. Interpretación y valoración de resultados obtenidos con cada estimador	31
2.3. Propuesta de un método para la exploración dinámica del exponente de Hurst.....	35
2.4. Estimación dinámica del exponente H para varias acciones e índices.....	37
2.4.1. Representación gráfica de la estimación dinámica para varios activos	38
2.4.2. Estimación exhaustiva de H en los precios de acciones e índices y su dependencia con la longitud de la serie temporal. Resultados obtenidos.....	42
2.4.2.1. Tablas resumen de los resultados de estimación dinámica del exponente de Hurst para los índices más representativos de EEUU.....	44
2.4.2.1-a) Ejemplo para la correcta lectura de las tablas de exploración dinámica del exponente de Hurst H	45
2.4.2.2. Resumen de los resultados de estimación dinámica del exponente de Hurst para índices de mercados de cuatro países Europeos.....	46
2.5. Breve resumen de los resultados.....	47
CAPÍTULO 3: Autocorrelación de las series O_d, C_d, H_d, L_d y su relación con el exponente de Hurst.....	51
3.1. Introducción	51
3.1.1. Función de Autocorrelación.....	51
3.1.2. Correlogramas de series temporales con H conocido	54
3.1.3. Representación de correlogramas para las cuatro series temporales de un activo financiero.....	55
3.2. Relación empírica entre el exponente de las series financieras y su autocorrelación	58
3.2.1. Relación gráfica entre Hurst y correlación ρ_1 de los activos.....	59
3.2.2. Correlograma de ocho retardos para una ventana concreta de la exploración.....	64
3.3. Tablas de ρ_1 de varios activos nacionales e internacionales.....	66
3.3.1. Tablas de ρ_1 para los componentes del IBEX y del DAX.	67
3.3.2. Tablas de ρ_1 para los componentes del CAC40 y del DJI.....	68
3.3.3. Tablas de ρ_1 para los índices más representativos de Europa y EEUU	69
3.4. Tablas para la exploración dinámica de ρ_1 para algunos índices europeos y de EEUU	69

3.4.1. Resumen de los resultados de estimación dinámica de autocorrelación del primer retardo ρ_1 para los índices más representativos de EEUU	70
3.4.1.1. Ejemplo práctico, para la correcta lectura, de las tablas de exploración dinámica mediante la autocorrelación, ρ_1	71
3.4.2. Resumen de los resultados de estimación dinámica de la autocorrelación para índices de mercados de acciones de cuatro países europeos	72
3.5. Breve resumen de los resultados	73
CAPÍTULO 4: Predictibilidad a una muestra de las series H, L, C, θ en función del exponente de Hurst.....	77
4.1. Introducción	77
4.1.1. Descripción de términos utilizados en el capítulo	77
4.2. Valoración de la predictibilidad, ip.....	78
4.2.1. Pasos para determinar el ip	78
4.2.1.1. Identificación de patrones.....	79
4.2.1.2. Consideraciones sobre el ip	79
4.3. Experimento I.....	79
4.3.1. Resultados del experimento I	80
4.3.1.1. Tablas de predictibilidad de varios activos	80
4.3.1.1-a) Índices europeos y americanos	81
4.3.1.1-b) Cálculo de ip para los componentes de los índices	82
4.3.1.2. Exploración dinámica mediante ventanas del ip	85
4.3.1.2-a) Tablas de análisis dinámico para los índices europeos	86
4.3.1.2-b) Tablas de análisis dinámico para los índices de EEUU	87
4.3.1.2-c) Comparación gráfica entre las exploraciones dinámicas de H , ρ_1 e ip	88
4.4. Experimento II.....	91
4.4.1. Resultados de experimento II	91
4.5. Experimento III. Semillas en forma de matriz.	92
4.5.1. Índices de predictibilidad para la serie H	94
4.5.2. Índices de predictibilidad para la serie L	95
4.6. Experimento IV: Propuesta de método para predecir un activo financiero	96
4.6.1. Descripción del prototipo básico	96
4.6.1.1. Funcionamiento del método.....	97

4.6.1.1-a) Descripción del proceso paso a paso	97
4.6.1.1-b) Simulación real para el histórico de Telefónica	99
4.6.1.1-c) Simulación real para varios históricos	100
4.6.1.1-d) Ejemplo de utilización en los mercados.....	101
4.7. Breve resumen de resultados	101
CAPÍTULO 5: Exploración de estrategias no convencionales para la generación automática de señales de entrada y salida a los mercados.	105
5.1. Introducción	105
5.2. Análisis utilizando morfología matemática	107
5.2.1. Trabajo I: Evaluación del indicador técnico	109
5.2.2. Trabajo II: Application for back-testing stop-loss.....	110
5.2.3. Trabajo III: Histogramas de beneficios.....	110
5.3. Análisis utilizando líneas de tendencia	111
5.4. Análisis utilizando filtros discretos.....	114
5.5. Breve resumen de resultados	117
CAPÍTULO 6: Discusión y conclusiones.....	121
Referencias	127
Anexo A: Tablas de <i>tickers</i>.....	A-1
Anexo A.1: Índices Europeos	A.1-1
Anexo A.2: Índices de EEUU.....	A.2-1
Anexo A.3: Componentes para el IBEX.....	A.3-2
Anexo A.4: Componentes para CAC 40 de Francia (^FCHI).....	A.4-3
Anexo A.5: Componentes para el DAX de Alemania (^GDAXI)	A.5-4
Anexo A.6: Componentes para el Dow Jones Industrial Average (^DJI)	A.6-5
Anexo B: Tablas de exploración dinámica para el exponente de Hurst	B-1
Anexo B.1: Resumen de los resultados de estimación dinámica del exponente de Hurst para los valores del índice CAC 40.....	B.1-1

Anexo B.2: Resumen de los resultados de estimación dinámica del exponente de Hurst para los valores del índice DAX.....	B.2-3
Anexo B.3: Resumen de los resultados de estimación dinámica del exponente de Hurst para los valores del DJI (Dow Jones Industrial Average)	B.3-5
Anexo B.4: Resumen de los resultados de estimación dinámica del exponente de Hurst para todos los valores del índice IBEX	B.4-7

Anexo C: Tablas de exploración dinámica para la autocorrelación ρ_1 C-1

Anexo C.1: Resumen de los resultados de estimación dinámica de la autocorrelación para los valores del índice CAC 40	C.1-1
Anexo C.2: Resumen de los resultados de estimación dinámica de la autocorrelación para los valores del índice DAX.....	C.2-3
Anexo C.3: Resumen de los resultados de estimación dinámica de la autocorrelación para los valores del DJI (Dow Jones Industrial Average)	C.3-5
Anexo C.4: Resumen de los resultados de estimación dinámica de la autocorrelación para todos los valores del índice IBEX.....	C.4-7

Anexo D: Tablas de exploración dinámica para la predictibilidad ip D-1

Anexo D.1: Resumen de los resultados de estimación dinámica de la predictibilidad para los valores del índice CAC 40.....	D.1-1
Anexo D.2: Resumen de los resultados de estimación dinámica de la predictibilidad para los valores del índice DAX.....	D.2-3
Anexo D.3: Resumen de los resultados de estimación dinámica de la predictibilidad para los valores del DJI (Dow Jones Industrial Average).....	D.3-5
Anexo D.4: Resumen de los resultados de estimación dinámica de la predictibilidad para todos los valores del índice IBEX.....	D.4-7

Anexo E: Publicaciones y contribuciones a congresos E-1

Anexo E.1: Web-based system for evaluating day trading strategies.....	E.1-1
Anexo E.2: Application for back-testing day Trading strategies	E.2-1
Anexo E.3: Analysis of day trading strategies using histograms of benefits	E.3-1
Anexo E.4: Automatic Trend Line Generation for time-series analysis: a Graphical Approach.....	E.4-1
Anexo E.5: Filtering Discrete-Time Series of Financial Assets under a Classical Control Theory Perspective.....	E.5-1
Anexo E.6: Empirical evidence for day-to-day persistence of higher and lower American and European stock indices.....	E.6-1

Lista de figuras

	Pág.
Fig.1-1: Comparación entre las series de los cierres y los retornos diarios	13
Fig.1-2: Gráfico de cierres.....	13
Fig.1-3: Gráfico de barras	13
Fig.1-4: Gráfico de velas.....	13
Fig.2-1: Ejemplo de series sintéticas con diferente coeficiente H y dimensión fractal.....	26
Fig.2-2: Histogramas de 1000 evaluaciones para series de 100 muestras y $H=0.6$	32
Fig.2-3: Histogramas de 1000 evaluaciones para series de 300 muestras y $H=0.6$	32
Fig.2-4: Histogramas de 1000 evaluaciones para series de 400 muestras y $H=0.6$	33
Fig.2-5: Histogramas de 1000 evaluaciones para series de 500 muestras y $H=0.6$	33
Fig.2-6: Histogramas de 1000 evaluaciones para series de 1000 muestras y $H=0.6$	34
Fig.2-7: Histogramas de 1000 evaluaciones para series de 7000 muestras y $H=0.6$	34
Fig.2-8: Media, STD y ECM de las estimaciones en función del número de muestras	35
Fig.2-9: Descripción del método de exploración dinámica por ventanas	35
Fig.2-10: Representación gráfica de las estimaciones para una serie de n muestras	36
Fig.2-11: Gráfica con exploración del DJI con ventanas de 1600 muestras.....	37
Fig.2-12: Exploración de Telefónica y Santander con ventanas de 400 muestras	38
Fig.2-13: Exploración de ACS y FER con ventanas de 400 muestras	39
Fig.2-14: Exploración de TEF y SAN con ventanas de 800 muestras	39
Fig.2-15: Exploración de ACS y FER con ventanas de 800 muestras	40
Fig.2-16: Exploración de FTSE e IBEX con ventanas de 800 muestras	40
Fig.2-17: Exploración de FTSE e IBEX con ventanas de 1600 muestras.....	41

Fig.2-18: Exploración de FCHI y GDAXI con ventanas de 1600 muestras	41
Fig.2-19: Exploración de GSPC y NDX con ventanas de 1600 muestras	42
Fig.3-1: Correlogramas para series temporales sintéticas con distinto exponente de Hurst.....	55
Fig.3-2: Correlograma de doce retardos para las cuatro series del IBEX 35.....	56
Fig.3-3: Correlograma de doce retardos para las cuatro series de SAN.....	57
Fig.3-4: Comparación entre la exploración dinámica de \mathbf{H} y la exploración dinámica de ρ_I para FER con ventanas de 960 muestras	59
Fig.3-5: Comparación entre la exploración dinámica de \mathbf{H} y la exploración dinámica de ρ_I para FER con ventanas de 1440 muestras.....	60
Fig.3-6: Comparación entre la exploración dinámica de \mathbf{H} y la exploración dinámica de ρ_I para IDR con ventanas de 960 muestras.....	60
Fig.3-7: Comparación entre la exploración dinámica de \mathbf{H} y la exploración dinámica de ρ_I para SAN con ventanas de 1440 muestras.....	61
Fig.3-8: Comparación entre la exploración dinámica de \mathbf{H} y la exploración dinámica de ρ_I para REE con ventanas de 1440 muestras.....	61
Fig.3-9: Comparación entre la exploración dinámica de \mathbf{H} y la exploración dinámica de ρ_I para TEF con ventanas de 960 muestras	62
Fig.3-10: Comparación entre la exploración dinámica de \mathbf{H} y la exploración dinámica de ρ_I para DG con ventanas de 960 muestras	63
Fig.3-11: Comparación entre la exploración dinámica de \mathbf{H} y la exploración dinámica de ρ_I para LR con ventanas de 960 muestras.....	63
Fig.3-12: Comparación entre la exploración dinámica de \mathbf{H} y la exploración dinámica de ρ_I para TEC con ventanas de 960 muestras	64
Fig.3-13: Relación entre \mathbf{H} y ρ_I en la ventana de exploración número 1616 del SAN.....	65
Fig.3-14: Relación entre \mathbf{H} y ρ_I en la ventana de exploración número 1422 para IDR.....	65
Fig.4-1: Exploración dinámica de \mathbf{H} , coeficiente de autocorrelación ρ_I e \mathbf{ip} , con ventanas de 1440 muestras, para el CAC40.....	89
Fig.4-2: Exploración dinámica de \mathbf{H} , coeficiente de autocorrelación ρ_I e \mathbf{ip} , con ventanas de 1440 muestras, para el FTSE 100.....	90
Fig.5-1: Ejemplo de erosión y dilatación de una serie temporal financiera con el elemento estructurante $\mathbf{e}=[1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1]$	108
Fig.5-2: Ejemplo de erosión y dilatación de una serie temporal financiera con el elemento estructurante $\mathbf{e}=[1\ 1\ 1\ 1\ 1.08\ 1]$	108

Fig.5-3: Ejemplo gráfico de cruces entre la señal erosionada, la señal dilatada y la media móvil.....	108
Fig.5-4: Representación de los cierres de las acciones del banco de Santander (1917 días). a) Opening (una erosión seguida de una dilatación) y Closing (una dilatación seguida de una erosión), ambas, con un elemento estructurante uniforme de longitud 8, en azul y media móvil $T=34$, en rojo. (b) Funcionamiento del sistema.....	109
Fig.5-5: Línea de tendencia alcista.....	112
Fig.5-6: Línea de tendencia bajista.....	112
Fig.5-7: Ejemplo de trazado automático de líneas de tendencia sobre el histórico del Banco Santander (SAN).....	113
Fig.5-8: Representación completa de las líneas que van surgiendo y rompiendo a lo largo de histórica de Telefónica (TEF).....	114
Fig.5-9: Ejemplo de filtro paso alto utilizando los paso por cero para dar señales de apertura o cierre.....	116
Fig.5-10: Ejemplo de utilización de los cruces de la señal filtrada con dos filtros paso bajos	116

Lista de tablas

	Pág.
Tabla 1-1: Descripción de instrucciones	16
Tabla 1-2: Ejemplo de datos descargados de Google	17
Tabla 1-3: Ejemplo de datos descargados de Yahoo!	17
Tabla 1-4: Descripción de instrucciones para VisualChart.....	18
Tabla 2-1: Series sintéticas de 100 muestras y $H=0.6$	32
Tabla 2-2: Series sintéticas de 300 muestras y $H=0.6$	33
Tabla 2-3: Series sintéticas de 400 muestras y $H=0.6$	33
Tabla 2-4: Series sintéticas de 500 muestras y $H=0.6$	34
Tabla 2-5: Series sintéticas de 1000 muestras y $H=0.6$	34
Tabla 2-6: Series sintéticas de 7000 muestras y $H=0.6$	34
Tabla 2-7: Interpretación de las tabas de análisis dinámico para el exponente H	43
Tabla 2-8: Resumen del análisis dinámico del exponente de Hurst para los índices de EEUU: Dow Jones Industrial Average (^DJI), NASDAQ Composite (^IXIC), Nasdaq 100 (^NDX) y S&P 500 (^GSPC). La ventana base utilizada para el análisis dinámico es de 480 muestras.....	44
Tabla 2-9: Resumen del análisis dinámico del exponente de Hurst para los índices de EEUU: Dow Jones Industrial Average (^DJI), NASDAQ Composite (^IXIC), Nasdaq 100 (^NDX) y S&P 500 (^GSPC). La ventana base utilizada para el análisis dinámico es de 960 muestras.....	44
Tabla 2-10: Resumen del análisis dinámico del exponente de Hurst para los índices de EEUU: Dow Jones Industrial Average (^DJI), NASDAQ Composite (^IXIC), Nasdaq 100 (^NDX) y S&P 500 (^GSPC). La ventana base utilizada para el análisis dinámico es de 1440 muestras.....	44
Tabla 2-11: Resumen del análisis dinámico del exponente de Hurst para los índices Europeos de Francia CAC 40 (^FCHI), Alemania DAX (^GDAXI), Reino Unido (^FTSE 100) y España (^IBEX) La ventana base utilizada para el análisis dinámico es de 480 muestras.....	46

Tabla 2-12: Resumen del análisis dinámico del exponente de Hurst para los índices Europeos de Francia CAC 40 (^FCHI), Alemania DAX (^GDAXI), Reino Unido (^FTSE 100) y España (^IBEX) La ventana base utilizada para el análisis dinámico es de 960 muestras.....	46
Tabla 2-13: Resumen del análisis dinámico del exponente de Hurst para los índices Europeos de Francia CAC 40 (^FCHI), Alemania DAX (^GDAXI), Reino Unido (^FTSE 100) y España (^IBEX) La ventana base utilizada para el análisis dinámico es de 1440 muestras.....	46
Tabla 3-1: Propiedades básicas del coeficiente de autocorrelación.....	54
Tabla 3-2: Relaciones entre H y ρ_1	55
Tabla 3-3: Comparación entre H y ρ_1 para las cuatro series del IBEX35	57
Tabla 3-4: Comparación entre H y ρ_1 para las cuatro series del SAN	57
Tabla 3-5: Coeficiente de autocorrelación ρ_1 para componentes del IBEX35.....	67
Tabla 3-6: Coeficiente de autocorrelación ρ_1 para componentes del DAX.....	67
Tabla 3-7: Coeficiente de autocorrelación ρ_1 para componentes del CAC40.....	68
Tabla 3-8: Coeficiente de autocorrelación ρ_1 para componentes del DJI	68
Tabla 3-9: Coeficiente de autocorrelación ρ_1 para algunos índices europeos.....	69
Tabla 3-10: Coeficiente de autocorrelación ρ_1 para algunos índices de EEUU	69
Tabla 3-11: Interpretación de las tablas de exploración dinámica con la autocorrelación ρ_1	70
Tabla 3-12: Resumen del análisis dinámico de autocorrelación ρ_1 , para los índices de EEUU: Dow Jones Industrial Average (^DJI), NASDAQ Composite (^IXIC), Nasdaq 100 (^NDX) y S&P 500 (^GSPC). La ventana base utilizada para el análisis dinámico es de 480 muestras.....	70
Tabla 3-13: Resumen del análisis dinámico de autocorrelación ρ_1 , para los índices de EEUU: Dow Jones Industrial Average (^DJI), NASDAQ Composite (^IXIC), Nasdaq 100 (^NDX) y S&P 500 (^GSPC). La ventana base utilizada para el análisis dinámico es de 960 muestras.....	71
Tabla 3-14: Resumen del análisis dinámico de autocorrelación ρ_1 , para los índices de EEUU: Dow Jones Industrial Average (^DJI), NASDAQ Composite (^IXIC), Nasdaq 100 (^NDX) y S&P 500 (^GSPC). La ventana base utilizada para el análisis dinámico es de 1440 muestras.....	71
Tabla 3-15: Ejemplo de lectura de las tablas de exploración dinámica con ρ_1	72
Tabla 3-16: Resumen del análisis dinámico de autocorrelación ρ_1 , para los índices Europeos de Francia CAC 40 (^FCHI), Alemania DAX (^GDAXI), Reino Unido (^FTSE 100) y España (^IBEX). La ventana base utilizada para el análisis dinámico es de 480 muestras.....	72

Tabla 3-17: Resumen del análisis dinámico de autocorrelación ρ_I , para los índices Europeos de Francia CAC 40 (^FCHI), Alemania DAX (^GDAXI), Reino Unido (^FTSE 100) y España (^IBEX). La ventana base utilizada para el análisis dinámico es de 960 muestras.....	72
Tabla 3-18: Resumen del análisis dinámico de autocorrelación ρ_I , para los índices Europeos de Francia CAC 40 (^FCHI), Alemania DAX (^GDAXI), Reino Unido (^FTSE 100) y España (^IBEX). La ventana base utilizada para el análisis dinámico es de 1440 muestras.....	73
Tabla 3-19: Resumen de los valores típicos de \mathbf{H} y ρ_I en función de la serie \mathbf{H}_t, L_t, C_t y $\mathbf{0}_t$	74
Tabla 4-1: Tabla resumen de los parámetros utilizados en el Experimento I.....	80
Tabla 4-2: Predictibilidad con semilla $\mathbf{s}^T=[0.1, 0.2]^T$ para los índices americanos.....	81
Tabla 4-3: Predictibilidad con semilla $\mathbf{s}^T=[0.1, 0.2]^T$ para los índices europeos.....	81
Tabla 4-4: Predictibilidad con semilla $\mathbf{s}^T=[0.1, 0.2]^T$ para los componentes del IBEX.....	82
Tabla 4-5: Predictibilidad con semilla $\mathbf{s}^T=[0.1, 0.2]^T$ para los componentes del CAC40.....	83
Tabla 4-6: Predictibilidad con semilla $\mathbf{s}^T=[0.1, 0.2]^T$ para los componentes del DAX.....	84
Tabla 4-7: Predictibilidad con semilla $\mathbf{s}^T=[0.1, 0.2]^T$ para los componentes del DJI.....	84
Tabla 4-8: Interpretación de las tablas de análisis dinámico mediante \mathbf{ip}	85
Tabla 4-9: Ejemplo de interpretación de las tablas de exploración dinámica con \mathbf{ip} , para el caso del IBEX.....	86
Tabla 4-10: Resumen del análisis dinámico de la predictibilidad para los índices europeos de Francia CAC 40 (^FCHI), Alemania DAX (^GDAXI), Reino Unido (^FTSE 100) y España (^IBEX) La ventana base utilizada para el análisis dinámico es de 480 muestras.....	87
Tabla 4-11: Resumen del análisis dinámico de la predictibilidad para los índices europeos de Francia CAC 40 (^FCHI), Alemania DAX (^GDAXI), Reino Unido (^FTSE 100) y España (^IBEX). La ventana base utilizada para el análisis dinámico es de 960 muestras.....	87
Tabla 4-12: Resumen del análisis dinámico de la predictibilidad para los índices europeos de Francia CAC 40 (^FCHI), Alemania DAX (^GDAXI), Reino Unido (^FTSE 100) y España (^IBEX). La ventana base utilizada para el análisis dinámico es de 1440 muestras.....	87
Tabla 4-13: Resumen del análisis dinámico de la predictibilidad para los índices de EEUU: Dow Jones Industrial Average (^DJI), NASDAQ Composite (^IXIC), Nasdaq 100 (^NDX) y S&P 500 (^GSPC). La ventana base utilizada para el análisis dinámico es de 480 muestras.....	88
Tabla 4-14: Resumen del análisis dinámico de la predictibilidad para los índices de EEUU: Dow Jones Industrial Average (^DJI), NASDAQ Composite (^IXIC), Nasdaq 100 (^NDX) y S&P 500 (^GSPC). La ventana base utilizada para el análisis dinámico es de 960 muestras.....	88
Tabla 4-15: Resumen del análisis dinámico de la predictibilidad para los índices de EEUU: Dow Jones Industrial Average (^DJI), NASDAQ Composite (^IXIC), Nasdaq 100 (^NDX) y S&P 500 (^GSPC). La ventana base utilizada para el análisis dinámico es de 1440 muestras.....	88

Tabla 4-16: Relaciones entre \mathbf{H} , ρ_1 e \mathbf{ip}	90
Tabla 4-17: Parámetros de \mathbf{ip} en el experimento II.....	91
Tabla 4-18: Predictibilidad para las cuatro series de los índices de Francia CAC 40 (^FCHI), Alemania DAX (^GDAXI), Reino Unido (^FTSE 100) y España (^IBEX) utilizando como semilla el vector [0.9596 0.9641 0.9633 1.0000]	92
Tabla 4-19: Predictibilidad para las cuatro series de los índices Dow Jones Industrial Average (^DJI), NASDAQ Composite (^IXIC), Nasdaq 100 (^NDX) y S&P 500 (^GSPC). Utilizando como semilla el vector [0.9596 0.9641 0.9633 1.0000].....	92
Tabla 4-20: Parámetros de \mathbf{ip} en el Experimento III.....	94
Tabla 4-21: Resultados de explorar los índices de EEUU con las semillas S_1 , S_2 y S_3 observando la serie \mathbf{H} con los parámetros de la Tabla 4-20.....	94
Tabla 4-22: Resultados de explorar los índices de EEUU con las semillas S_4 , S_5 y S_6 observando la serie \mathbf{L} , con los parámetros de la Tabla 4-20.....	96
Tabla 4-23: Parámetros de \mathbf{ip} en el método de predicción.....	97
Tabla 4-24: Posibles predicciones en función de la serie y del \mathbf{ip}	98
Tabla 4-25: Tipos de predicción.....	99
Tabla 4-26: Resultados de la simulación real sobre las últimas 924 muestras de Telefónica.....	99
Tabla 4-27: Resultados de la simulación real para varios activos	100

Lista de tablas en anexos

	Pág
Tabla Anexo A.1-1: Tickers Índices europeos	A.1-1
Tabla Anexo A.2-1: Tickers Índices de EEUU.....	A.2-1
Tabla Anexo A.3-1: Tickers de componentes del IBEX.....	A.3-2
Tabla Anexo A.4-1: Componentes del CAC 40 de Francia (^FCHI).....	A.4-3
Tabla Anexo A.5-1: Componentes del DAX de Alemania (^GDAXI)	A.5-4
Tabla Anexo A.6-1: Componentes para el Dow Jones Industrial Average (^DJI).....	A.6-5
Tabla Anexo B.1-1: Resumen del análisis dinámico del exponente de Hurst para los componentes del CAC40, explorados con ventanas de 480 muestras.....	B.1-1
Tabla Anexo B.1-2: Resumen del análisis dinámico del exponente de Hurst para los componentes del CAC40, explorados con ventanas de 960 muestras.....	B.1-2
Tabla Anexo B.1-3: Resumen del análisis dinámico del exponente de Hurst para los componentes del CAC40, explorados con ventanas de 1440 muestras.....	B.1-2
Tabla Anexo B.2-1: Resumen del análisis dinámico del exponente de Hurst para los componentes del DAX explorados con ventanas de 480 muestras.....	B.2-3
Tabla Anexo B.2-2: Resumen del análisis dinámico del exponente de Hurst para los componentes del DAX explorados con ventanas de 960 muestras.....	B.2-4
Tabla Anexo B.2-3: Resumen del análisis dinámico del exponente de Hurst para los componentes del DAX explorados con ventanas de 1440 muestras.....	B.2-4
Tabla Anexo B.3-1: Resumen del análisis dinámico del exponente de Hurst para los componentes del Dow Jones Industrial Average explorados con ventanas de 480 muestras.....	B.3-5
Tabla Anexo B.3-2: Resumen del análisis dinámico del exponente de Hurst para los componentes del Dow Jones Industrial Average explorados con ventanas de 960 muestras.....	B.3-6
Tabla Anexo B.3-3: Resumen del análisis dinámico del exponente de Hurst para los componentes del Dow Jones Industrial Average, explorados con ventanas de 1440 muestras.....	B.3-6

Tabla Anexo B.4-1: Resumen del análisis dinámico del exponente de Hurst para los componentes del IBEX explorados con ventanas de 480 muestras.....	B.4-7
Tabla Anexo B.4-2: Resumen del análisis dinámico del exponente de Hurst para los componentes del IBEX explorados con ventanas de 960 muestras.....	B.4-8
Tabla Anexo B.4-3: Resumen del análisis dinámico del exponente de Hurst para los componentes del IBEX explorados con ventanas de 1440 muestras.....	B.4-8
Tabla Anexo C.1-1: Resumen del análisis dinámico de autocorrelación para los componentes del CAC40 explorados con ventanas de 480 muestras.....	C.1-1
Tabla Anexo C.1-2: Resumen del análisis dinámico de autocorrelación para los componentes del CAC40 explorados con ventanas de 960 muestras.....	C.1-2
Tabla Anexo C.1-3: Resumen del análisis dinámico de autocorrelación para los componentes del CAC40, explorados con ventanas de 1440 muestras.....	C.1-2
Tabla Anexo C.2-1: Resumen del análisis dinámico de autocorrelación para los componentes del DAX explorados con ventanas de 480 muestras.....	C.2-3
Tabla Anexo C.2-2: Resumen del análisis dinámico de autocorrelación para los componentes del DAX explorados con ventanas de 960 muestras.....	C.2-4
Tabla Anexo C.2-3: Resumen del análisis dinámico de autocorrelación para los componentes del DAX, explorados con ventanas de 1440 muestras.....	C.2-4
Tabla Anexo C.3-1: Resumen del análisis dinámico de autocorrelación para los componentes del Dow Jones Industrial Average, explorados con ventanas de 480 muestras.....	C.3-5
Tabla Anexo C.3-2: Resumen del análisis dinámico de autocorrelación para los componentes del Dow Jones Industrial Average, explorados con ventanas de 960 muestras.....	C.3-6
Tabla Anexo C.3-3: Resumen del análisis dinámico de autocorrelación para los componentes del Dow Jones Industrial Average, explorados con ventanas de 1440 muestras.....	C.3-6
Tabla Anexo C.4-1: Resumen del análisis dinámico de autocorrelación para los componentes del IBEX explorados con ventanas de 480 muestras.....	C.4-7
Tabla Anexo C.4-2: Resumen del análisis dinámico de autocorrelación para los componentes del IBEX explorados con ventanas de 960 muestras.....	C.4-8
Tabla Anexo C.4-3: Resumen del análisis dinámico de autocorrelación para los componentes del IBEX explorados con ventanas de 1440 muestras.....	C.4-8
Tabla Anexo D.1-1: Resumen del análisis dinámico de la predictibilidad con los parámetros de la Tabla 4-1 para los componentes del CAC40 explorados con ventanas de 480 muestras.....	D.1-1
Tabla Anexo D.1-2: Resumen del análisis dinámico de la predictibilidad con los parámetros de la Tabla 4-1 para los componentes del CAC40 explorados con ventanas de 960 muestras.....	D.1-2

Tabla Anexo D.1-3: Resumen del análisis dinámico de la predictibilidad con los parámetros de la Tabla 4-1 para los componentes del CAC40 explorados con ventanas de 1440 muestras.....	D.1-2
Tabla Anexo D.2-1: Resumen del análisis dinámico de la predictibilidad con los parámetros de la Tabla 4-1 para los componentes del DAX explorados con ventanas de 480 muestras.....	D.2-3
Tabla Anexo D.2-2: Resumen del análisis dinámico de la predictibilidad con los parámetros de la Tabla 4-1 para los componentes del DAX explorados con ventanas de 960 muestras.....	D.2-4
Tabla Anexo D.2-3: Resumen del análisis dinámico de la predictibilidad con los parámetros de la Tabla 4-1 para los componentes del DAX explorados con ventanas de 1440 muestras.....	D.2-4
Tabla Anexo D.3-1: Resumen del análisis dinámico de la predictibilidad con los parámetros de la Tabla 4-1 para los componentes del Dow Jones Industrial Average, explorados con ventanas de 480 muestras.....	D.3-5
Tabla Anexo D.3-2: Resumen del análisis dinámico de la predictibilidad con los parámetros de la Tabla 4-1 para los componentes del Dow Jones Industrial Average, explorados con ventanas de 960 muestras.....	D.3-6
Tabla Anexo D.3-3: Resumen del análisis dinámico de la predictibilidad con los parámetros de la Tabla 4-1 para los componentes del Dow Jones Industrial Average, explorados con ventanas de 1440 muestras.....	D.3-6
Tabla Anexo D.4-1: Resumen del análisis dinámico de la predictibilidad con los parámetros de la Tabla 4-1 para los componentes del IBEX, explorados con ventanas de 480 muestras.....	D.4-7
Tabla Anexo D.4-2: Resumen del análisis dinámico de la predictibilidad con los parámetros de la Tabla 4-1 para los componentes del IBEX, explorados con ventanas de 960 muestras.....	D.4-8
Tabla Anexo D.4-3: Resumen del análisis dinámico de la predictibilidad con los parámetros de la Tabla 4-1 para los componentes del IBEX, explorados con ventanas de 1440 muestras.....	D.4-8

Lista de abreviaturas

Abreviatura	Término
ADX	<i>Average Directional movement index</i>
Bm	<i>Movimiento Browniano</i>
csv	<i>Comma Separated Values</i>
DSOD	<i>Discrete second order derivative</i>
ECM	<i>Error cuadrático medio</i>
EMD	<i>Empirical Mode Decomposition</i>
FA	<i>Función autocorrelación</i>
FAS	<i>Función autocorrelación Simple</i>
fBm	<i>Movimiento Browniano fraccional</i>
IDE	<i>Integrated Development Environment</i>
STD	<i>Desviación estándar</i>
TAI	<i>Tecnologías Aplicadas a la Información</i>
TFM	<i>Trabajo Fin de Master</i>
TIC	<i>Tecnologías de la Información y la comunicación</i>
URL	<i>Uniform Resource Locator</i>
WDSOD	<i>Wavelet version of discrete second order derivative</i>
WR	<i>Regression wavelet versión</i>

Lista de Símbolos

Símbolo	Término
H	Exponente de Hurst
C	Serie temporal de cierres diarios
L	Serie temporal de mínimos diarios
H	Serie temporal de máximos diarios
O	Serie temporal de aperturas diarias
c	Elemento de la serie temporal de cierres diarios
i	Elemento de la serie temporal de mínimos diarios
h	Elemento de la serie temporal de máximos diarios
o	Elemento de la serie temporal de aperturas diarios
C_d	Serie temporal formada por la primera derivada de la serie C
L_d	Serie temporal formada por la primera derivada de la serie L
H_d	Serie temporal formada por la primera derivada de la serie H
O_d	Serie temporal formada por la primera derivada de la serie O
c_d	Elemento de la serie temporal C_d
i_d	Elemento de la serie temporal L_d
h_d	Elemento de la serie temporal H_d
o_d	Elemento de la serie temporal O_d
ρ_i	Autocorrelación en el retardo i
n_v	Número de intervalos o ventanas
l_s	Longitud total de la serie
t_v	Tamaño del intervalo analizado
$ncpp$	Número de condiciones post-patrón
$nptr$	Número de patrones
c_{pp}	Condición post-patrón
ip	Índice de predictibilidad

CAPÍTULO 1

CAPÍTULO 1: Introducción

1.1. Antecedentes y marco contextual

En este apartado damos a conocer el medio en el cual desarrollaremos esta investigación, a la par que introduciremos algunos conceptos básicos necesarios para situarnos en el contexto de los estudios.

1.1.1. El sistema financiero

El sistema financiero es el mecanismo que pone en contacto a los agentes o instituciones que tienen excedente de capital, con quienes necesitan obtenerlo para realizar nuevas inversiones [1][2]. El sistema financiero está formado por:

- Las instituciones (autoridades monetarias y financieras, entre otras)
- Activos financieros que se generan
- Los mercados financieros en que operan

De este modo, los activos que se generan son comprados y vendidos en los mercados financieros, por el conjunto de instituciones e intermediarios.

1.1.1.1. Las Instituciones

Se encargan de actuar como intermediarias entre las personas que tienen recursos disponibles y las que solicitan esos recursos. De esta forma, cumplen con dos funciones fundamentales: la captación y la colocación. Se pueden diferenciar dos tipos distintos de intermediarios financieros: los bancarios y los no bancarios.

1.1.1.1-a) Los intermediarios bancarios

Estos intermediarios pueden, además de realizar su función de mediación, generar recursos financieros que son aceptados como medio de pago.

1.1.1.1-b) Los intermediarios no bancarios

No pueden emitir recursos financieros, por lo que sus pasivos no pueden ser dinero. Entre éstos podemos incluir a las entidades gestoras de la Seguridad Social, Instituciones aseguradoras, *Leasing*, *Factoring*, etc.

1.1.1.2. Activos Financieros

Son las herramientas (títulos) que emiten las unidades económicas con déficit y adquieren quienes tienen fondos excedentarios con el fin de invertir sus ahorros. Los activos financieros no contribuyen a incrementar la riqueza del país, pues para unos es un activo y para otros un pasivo, pero sí favorece una enorme movilidad de los recursos económicos. Las características principales de los activos financieros son la liquidez, el riesgo y la rentabilidad:

1.1.1.2-a) La liquidez

La liquidez indica la facilidad y certeza de transformar las acciones de un activo en dinero, de forma inmediata y sin sufrir pérdidas. De esta forma, las acciones de empresas que cotizan son más líquidas que las de aquellas que no lo hacen, ya que las primeras se pueden vender prácticamente de inmediato en la bolsa.

1.1.1.2-b) El riesgo

El riesgo de un activo depende de las garantías del emisor para hacer frente a la deuda cuando llegue su vencimiento. Cuanto mayor es la incertidumbre sobre la devolución de la inversión mayor es el riesgo.

1.1.1.2-c) La rentabilidad

La rentabilidad se refiere a la capacidad de un activo para producir intereses u otros rendimientos al adquirente. En función de la rentabilidad podemos distinguir entre activos de renta:

- Fija: se conoce su rentabilidad a priori.
- Variable: su rentabilidad depende del funcionamiento de la empresa o de los mercados, por lo que es desconocida de antemano.

1.1.1.3. Los Mercados financieros: La Bolsa

Un mercado financiero es un espacio físico o virtual, en el que se realizan los intercambios de los activos financieros y se definen sus precios. Los mercados financieros o de valores son los encargados de canalizar el ahorro hacia la inversión. A través de los mercados organizados se logran reducir los costes de transacción, es decir, los costes asociados a la negociación de los activos financieros.

1.1.1.3-a) Clasificación

Un mercado financiero, según el criterio que se utilice en su clasificación, puede incluirse en diferentes grupos. La bolsa, por ejemplo, es un mercado de capitales si tenemos en cuenta los productos que se negocian en ella, o es un mercado secundario si consideramos que por ella se transmite la propiedad de activos que ya existen. Algunos ejemplos de clasificación podrían ser: atendiendo al tipo de emisión, al tipo de activo que se negocie o al grado de concentración.

➤ Según la emisión

- Mercado primario o de emisión: las empresas o instituciones emisoras colocan los activos financieros entre sus compradores, con lo que se origina un proceso de financiación de los segundos hacia las primeras.
- Mercado secundario: sirven para que el propietario de activos financieros se deshaga de ellos al venderlos a otras personas o entidades, con lo que su inversión se convierte en liquidez (dinero efectivo) sin tener que esperar al vencimiento de los títulos.

➤ Según el tipo de activo

- Mercado de divisas: se negocian monedas de los diferentes países estableciéndose el tipo de cambio de cada moneda respecto a las demás.
- Mercado de renta fija: en él se negocian activos que tienen garantizada la obtención de una determinada rentabilidad a su vencimiento
- Mercado de la renta variable: es donde se negocian activos que no aseguran una rentabilidad determinada. como es el caso de las acciones de una empresa
- Mercados de materias primas o *commodities*: son los mercados mundiales, de carácter descentralizado en los que se negocian productos no manufacturados.
- Mercado de derivados: en ellos se negocian productos derivados, como pueden ser las opciones y los futuros.

➤ Según el grado de concentración

- Mercados Centralizados: en estos mercados todas las órdenes de compra y de venta se cruzan y centralizan por una misma institución. Este es el caso de las bolsas de valores
- Mercados Descentralizados: este es el caso de las entidades financieras, donde cada una de las sucursales con las que cuenta puede tomar decisiones independientes.

1.1.1.3-b) Funciones

Entre las principales funciones que cumplen los mercados financieros podríamos destacar las siguientes:

- Facilitar la puesta en contacto de los demandantes con los oferentes de fondos
- La determinación del precio de los activos financieros
- Dotar de liquidez a los activos financieros
- Reducir los plazos y los costes de intermediación

1.1.1.3-c) Características

Para que un mercado se acerque al ideal de mercado financiero perfecto debería cumplir en alto grado las siguientes características:

- **Transparencia:** un mercado es tanto más transparente cuanto mejor y más barata de obtener resulta la información para la toma de decisiones que pueden lograr los agentes económicos (compradores y vendedores de activos) que participan en él.
- **Amplitud:** número de títulos financieros que se negocian en un mercado financiero. Cuantos más títulos se negocien más amplio será el mercado financiero.
- **Profundidad:** hace referencia al número de órdenes de compra y de venta existentes para cada tipo de activo financiero. Un mercado es tanto más profundo cuanto mayor sea el número de órdenes de compra y venta que existen para cada tipo de activo financiero.
- **Libertad:** es el grado de libertad en el proceso de formación de los precios, es decir, los precios de los activos financieros se determinan por la libre concurrencia de la oferta y de la demanda.
- **Flexibilidad:** un mercado es tanto más flexible cuanto más facilidad exista para la rápida reacción de los agentes ante variaciones en los precios de los activos u otras circunstancias significativas del mercado.

1.2. Análisis de los mercados financieros

Los inversores son los participantes del mercado que deben tomar la decisión de en qué activos van arriesgar sus ahorros. Siendo su objetivo maximizar los beneficios con el mínimo riesgo.

Para ello se recurre al análisis bursátil que tiene como objetivo el estudio del comportamiento de los mercados financieros y de los activos que lo constituyen. Con este

análisis, los inversores pretenden conseguir información relevante que les ayude a predecir la dirección que el precio podría tomar en el futuro.

Los métodos de análisis y pronóstico del sistema financiero son métodos utilizados en la mayoría de las bolsas de valores para que las corporaciones y los inversores puedan tener un referente de cómo se comportará el mercado en el futuro y por ende tomar buenas decisiones de cartera.

Existen dos enfoques totalmente distintos, y a veces contrapuestos, para el análisis de los activos financieros:

- Análisis técnico
- Análisis fundamental

Ambos enfoques parten de suposiciones diferentes a la hora de interpretar el comportamiento de los mercados financieros.

1.2.1. Análisis fundamental

Se basa en el estudio de toda la información económica-financiera disponible sobre la empresa (balance, cuenta de resultados, ratios financieros, etc.), así como de la información del sector y de la coyuntura macroeconómica [3]. Este análisis conlleva el conocimiento pormenorizado de las cuentas y balances de la empresa en cuestión. A ello añadiremos también, las previsiones de ventas, beneficios, etc. que publican las casas de análisis y sociedades de Bolsa.

Por supuesto, habremos de tener en cuenta todos aquellos elementos macroeconómicos que puedan afectar, en mayor o menor medida, a la operativa de la empresa y a sus futuros beneficios. De esta manera podemos establecer si el precio refleja el valor de la compañía o está infravalorada o sobrevalorada. El análisis fundamental se basa en que el mercado no es del todo eficiente[4].

1.2.2. Análisis técnico

Considera que el mercado proporciona la mejor información posible sobre el posible comportamiento futuro de los activos. Analiza cómo se han comportado éstos en el pasado y trata de proyectar su evolución futura. El análisis técnico es una de las herramientas más utilizadas por los inversores (en especial por los especuladores) para decidir, qué comprar y cuándo comprar [5][6]. Los tres principios fundamentales del análisis técnico son los siguientes:

- El precio lo descuenta todo
- El precio se mueve por tendencias

- La historia se repite

1.2.2.1. El precio lo descuenta todo

Este es el principio base sobre el cual descansa el análisis técnico ya que supone que todos los factores que pueden afectar el mercado, sean de índole social, política, económica, especulativa o de cualquier otra clase que podamos imaginar (incluidos los factores tenidos en cuenta para realizar el análisis fundamental) ya están reflejados directamente en el precio.

1.2.2.2. El precio se mueve por tendencias

El concepto de tendencia es uno de los más importantes para el análisis técnico. De hecho, uno de los objetivos del análisis técnico es lograr detectar lo antes posible el inicio y el final de una tendencia. Tenemos tres tipos de tendencias:

- Tendencia alcista
- Tendencia bajista
- Tendencia lateral

La mayoría de las herramientas técnicas son seguidores de tendencia. Por lo tanto, son totalmente inútiles en tendencias laterales o períodos de no tendencia

1.2.2.3. La historia se repite

Esta premisa se basa en la hipótesis de que los inversores reaccionaran de la misma forma que reaccionaron ante situaciones iguales o parecidas del pasado. Esta hipótesis se va a ver reforzada por la gran cantidad de indicadores técnicos y sistemas automáticos de trading, que sí que van a responder de la misma forma que lo hicieron en el pasado.

Según podemos deducir de esta premisa cabría esperar una gran capacidad de predicción utilizando el análisis técnico, pero como más adelante veremos, existen ciertos condicionantes para que en la práctica esto no sea así.

1.2.2.4. Tipos de análisis técnico

Podemos distinguir dos disciplinas en el análisis técnico:

- Análisis *chartista*
- Análisis cuantitativo

Generalmente se confunde el análisis técnico con el análisis gráfico o *chartismo*, siendo este último solo una parte del primero. El *chartismo* se basa exclusivamente en el estudio de las figuras que dibujan las cotizaciones en un gráfico bursátil (*chart*).

1.2.2.4-a) Análisis *chartista*

El análisis *chartista* consiste en utilizar técnicas gráficas para predecir el futuro de los mercados, así como de los activos que los componen. Fundamentalmente se basa en el estudio de las figuras que forman las gráficas de los precios, prediciendo la posible tendencia y orientación futura que tendrá el precio.

Curiosamente, el que muchos inversores sigan esta técnica, hace que se acabe generando la formación que se intenta predecir. Estas formaciones son clasificadas en categorías de acuerdo a su forma básica en:

- Las formaciones de cambio de tendencia
- Las formaciones de continuación de la tendencia

1.2.2.4-b) Análisis cuantitativo

El análisis cuantitativo se basa en la utilización de matemáticas financieras, con frecuencia derivadas de la física y de la estadística, para llevar a cabo el análisis de los activos financieros. Consiste en aplicar fórmulas, más o menos complejas, a los precios y a los volúmenes de los activos, con la finalidad de facilitar la toma de decisiones de inversión y de predecir la evolución de los precios en situaciones determinadas.

La ventaja de este análisis es la eliminación de la subjetividad que presenta el análisis gráfico o *chartista* anteriormente descrito. Los principales indicadores utilizados en el análisis cuantitativo se pueden dividir en dos categorías:

- Las medias móviles
- Los osciladores

1.3. Motivación

La tecnología ha alcanzado a todos los sectores de actividad, pero en algunos ha supuesto en los últimos años una auténtica revolución, es el caso de los mercados financieros. Esto ha propiciado que en las últimas décadas estén apareciendo cientos de indicadores técnicos, que son desarrollados por supuestos “gurus” del análisis técnico. Estos ‘gurus’ venden sus indicadores mágicos empaquetados en un sistema o método, prometiendo excelentes resultados a todo aquel que lo siga.

En [7][8] se describen y analizan varios indicadores técnicos, cuyo estudio ya fue abordado en el Trabajo Fin de Master (TFM) titulado: “Análisis de la fiabilidad de

indicadores para sistemas de seguimiento de precios en los mercados” realizado para el Master en Tecnologías Aplicadas a la Información (TAI) de la Universidad de Vic.

Con ese trabajo pudimos comprobar, que incluso indicadores muy alabados por reputados autores del análisis técnico, no tenían la fiabilidad que cabía esperar. Ya que se pueden presentar, de manera totalmente aleatoria, intervalos con buen rendimiento y otros con pésimo rendimiento. Estos resultados nos motivan a continuar con los estudios en esta tesis, para la que nos hemos marcado algunos objetivos, como los que se describen en el siguiente apartado.

1.4. Objetivos generales

Un primer objetivo es abordar el estudio de las series financieras desde diferentes enfoques no convencionales, valorando la idoneidad de cada uno de estos enfoques para el estudio de las series financieras, en términos de predictibilidad. Entendiendo por no convencionales el utilizar técnicas desarrolladas y ampliamente utilizadas en sus respectivos campos de aplicación, pero que su uso no ha sido muy explorado en el estudio de los activos financieros.

Un segundo objetivo es utilizar los enfoques que mejor comportamiento presenten para diseñar un indicador técnico que genere señales válidas y sostenibles para utilizarlas como apoyo para la toma de posiciones o como base para un sistema automático de trading.

Un último objetivo sería evaluar el comportamiento de los posibles indicadores técnicos desarrollados a partir de los diferentes enfoques. Para ello será necesario desarrollar e implementar la metodología necesaria para poder estudiar el comportamiento del indicador simulando condiciones reales de funcionamiento.

1.5. Descripción general de la tesis

En este apartado se hace una descripción general de la estructura de la presente memoria de tesis, que está dividida en seis capítulos:

➤ Capítulo primero

En este capítulo se hace una introducción al marco contextual en el que se desarrolla este estudio, describiendo los conceptos de mercado, activo financiero, histórico de un activo financiero y serie temporal financiera.

También introducimos el estado de las técnicas y los tipos de análisis que existen para estudiar los mercados. Además de la motivación y los objetivos de estos estudios.

Se describe el marco de trabajo, explicando cómo obtenemos los datos, la forma de representarlos gráficamente y la herramienta utilizada para realizar los experimentos.

➤ Capítulo segundo

En este capítulo se realiza el estudio de los históricos de los activos mediante el exponente de Hurst. Se hace una introducción al exponente de Hurst y se analiza el estado del arte.

Describimos el método de estimación dinámica desarrollado para explorar las series (H_d, O_d, L_d, C_d) , generadas a partir de la primera derivada de las cuatro series temporales (H, O, L, C) que conforman los históricos de los activos financieros. Mediante este método de estimación dinámica se evidencian unos interesantes resultados de los que no tenemos constancia que anteriormente hayan sido documentados.

Estos resultados se presentan mediante gráficas y a través de una serie de tablas de compactación que recogen los resultados obtenidos en multitud de experimentos realizados para diversos históricos nacionales e internacionales, utilizando diferentes tamaños de ventana para la estimación dinámica.

➤ Capítulo tercero

En este capítulo se exponen los resultados de una serie de experimentos orientados a establecer una relación empírica entre el exponente H , que presentan las cuatro series temporales (H_d, O_d, L_d, C_d) y su auto-correlación. Se representan varias gráficas que ponen de manifiesto esta relación. Mediante tablas se condensan los resultados obtenidos para gran cantidad de históricos, ya que no es posible realizar una representación gráfica individual para todos.

➤ Capítulo cuarto

Aplicando las propiedades del exponente de Hurst estudiadas en los dos capítulos anteriores, en este capítulo, realizamos experimentos encaminados a establecer una relación empírica entre el exponente de Hurst de las series financieras y su predictibilidad a una muestra. Resultados que representamos gráficamente y aportamos en tablas de condensación, que engloban experimentos sobre gran cantidad de activos.

Además, en este capítulo se realizan una batería de experimentos en cuyos resultados nos apoyamos para proponer un método básico con el que, predecir el comportamiento de las series de los máximos y los mínimos, intentando establecer el rango en el que se moverán los precios en la sesión siguiente.

Finalmente, siguiendo la línea de trabajo, se realizan experimentos con el método propuesto, simulando condiciones reales de operación en el mercado, con lo que probamos su fiabilidad y obtenemos datos para subsanar posibles defectos e incorporar las mejoras.

➤ Capítulo quinto

Aunque esta memoria está, fundamentalmente, dedicada a describir los resultados obtenidos con el estimador dinámico del exponente de Hurst y sus implicaciones; en este capítulo presentamos un resumen de los otros trabajos abordados en este periodo de investigación y que han sido parcialmente presentados en congresos.

➤ Capítulo sexto

Es este capítulo se exponen los resultados obtenidos con cada enfoque abordado, junto con las conclusiones y posibles futuras líneas de investigación abiertas.

1.6. Marco de trabajo

Los activos financieros se negocian en los mercados de valores de todo el mundo. Estas negociaciones van generando datos sobre las cotizaciones, que son guardadas en orden cronológico, para formar el histórico de cotizaciones del activo financiero. Los archivos que contienen estos históricos, son la materia prima de este estudio, y el Matlab la herramienta que utilizaremos para procesarlos.

En los siguientes puntos profundizaremos un poco más sobre estos términos; las fuentes de los históricos de los activos financieros, la composición de estos y la herramienta utilizada para procesarlos.

1.6.1. Origen/Fuente de los datos

Para poder llevar a cabo los experimentos realizados en estos estudios necesitamos tener acceso a los datos históricos de los activos financieros nacionales y mundiales (acciones, índices, materias primas, etc...).

Actualmente gracias al desarrollo de las TIC tenemos varias posibilidades para el acceso a la información. Hemos valorado varias opciones optando, en principio, por proveedores gratuitos como pueden ser Google Finance y Yahoo! Finance. Estos proveedores no proporcionan datos intradía, pero para realizar nuestros experimentos es suficiente con los históricos de datos diarios que se pueden descargar al final de la sesión.

En caso de que necesitemos datos intradía, los podemos conseguir a través de Visual Chart. Se trata de un proveedor capaz de adquirir datos con mayor resolución que los dos anteriores, pudiendo obtener datos históricos intradía, con una resolución de minutos y una longitud de varias décadas, dependiendo del histórico. Aunque, como contrapartida, se requiere el registro de una cuenta de usuario gratuita.

1.6.1.1. Google Finance

[Google Finance](#) es un sitio web lanzado el 21 de marzo de 2006 por Google. El servicio ofrece noticias sobre las decisiones financieras de empresas y estados, así como otros grandes eventos recogidos por la prensa. Este sitio web dispone de información sobre las cotizaciones bursátiles, los precios del cambio de divisas, el rendimiento del mercado de Estados Unidos agrupado por sectores etc.

1.6.1.2. Yahoo! Finance

[Yahoo! Finance](#) ofrece información sobre cotizaciones bursátiles, bolsas de valores, comunicados de prensa e informes financieros. Incluye algunas herramientas para gestionar las finanzas personales. Es el sitio web con noticias y estudios financieros más utilizado en los Estados Unidos. Este portal opera en muchos países con la información de las bolsas nacionales.

1.6.1.3. Visual Chart

Se trata de un portal que ofrece al usuario todo tipo de información bursátil así como varias plataformas como, por ejemplo:

- [Visual Chart App](#): para acceder en tiempo real a las cotizaciones desde cualquier lugar.
- [Team Trading](#): basada en el principio de colaboración, donde los desarrolladores aportan sus estrategias automáticas a la plataforma y son compensados por ello.
- [Visual Chart](#): que ofrece numerosas herramientas de análisis gráfico, técnico y fundamental.

En este portal también podemos encontrar numerosos recursos de formación como: manuales de formación, guías de usuario, seminarios on line, videos de formación, etc.

1.6.2. Series de precios

Los históricos de los activos financieros están formados por observaciones (cotizaciones) de los precios, tomadas de forma consecutiva, a intervalos regulares de tiempo, que pueden ser de minutos, horas, días, semanas, etc.

1.6.2.1. Conceptos de señal y serie temporal

La anterior descripción del histórico de un activo financiero, corresponde con las definiciones de señal y de serie temporal:

- **Una señal** es una representación matemática de la evolución de una magnitud física (o una medida) respecto de algún o algunos parámetros; generalmente tiempo o espacio.
- **Una serie temporal o cronológica** es una secuencia de datos, observaciones o valores, medidos en determinados momentos y ordenados cronológicamente.

En realidad, para un histórico de un activo financiero (serie temporal financiera) en cada intervalo de tiempo se toman cinco observaciones, una para el precio máximo del intervalo (h), otra para el mínimo (l), una para el precio de apertura (a) y otra para el de cierre (c) y una quinta para el volumen de títulos negociados en el intervalo.

Para este estudio asociaremos, cada una de las muestras tomadas en cada intervalo, con una serie temporal independiente. Con lo que tendremos cinco series temporales por cada activo financiero; una serie formada por los máximos (H), otra con los mínimos (L), otra con las aperturas (θ), una cuarta con los cierres (\mathcal{C}) y finalmente la serie de los volúmenes. Es un enfoque no tan utilizado ya que normalmente se trabaja con los cierres o con los beneficios diarios (retornos diarios) o logarítmicos (*Log-return*) y el resto de muestras del intervalo no son tratadas como series temporales independientes.

1.6.2.2. Conceptos de retornos y Log-return

Sea P_t , $t = 1, 2, \dots, n$, el precio de un activo en el tiempo t , y sea $i = 1, 2, \dots, n-1$. Desde $t - i$ hasta t , se producirá un retorno o rendimiento R_{ti} definido como se muestra en (1-1).

$$R_{ti} = \frac{P_t - P_{t-i}}{P_{t-i}} = \frac{P_t}{P_{t-i}} - 1 \quad (1-1)$$

Los retornos logarítmicos r_{ti} (comúnmente conocidos como *Log-return*) para el periodo anterior se definen según la ecuación (1-2).

$$r_{ti} = \ln \frac{P_t}{P_{t-i}} = \ln(R_{t-i} + 1) = \ln(P_t) - \ln(P_{t-i}) \quad (1-2)$$

Con lo que la correspondencia o relación entre los dos retornos será (1-3)

$$R_{ti} = e^{r_{ti}} + 1 \quad (1-3)$$

Si $i=1$ el periodo es de un día (de $t-1$ a t) obteniéndose los retornos diarios o *daily log return* según el tipo utilizado. Si hacemos los retornos para toda la serie de los cierres obtendremos la serie de los retornos o la serie *log return* si utilizamos el retorno logarítmico.

En la *Fig. 1-1* hemos representado gráficamente la serie de los cierres y la serie de los retornos diarios ($i=1$) del Santander, para un intervalo de tiempo que va desde el 29/01/2004 al 22/11/2013. Vemos que en la serie de los retornos han desaparecido las tendencias con lo que conseguimos una serie más estacionaria, que es lo que necesitaremos cuando trabajemos con Hurst y autocorrelación.

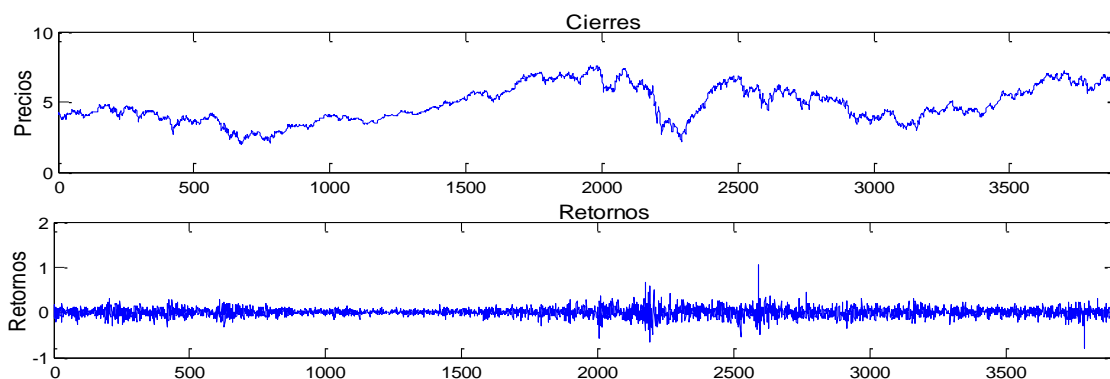


Fig.1-1: Comparación entre las series de los cierres y los retornos diarios

1.6.2.3. Representación gráfica utilizada

La representación gráfica de una serie temporal se realiza mediante el uso de los ejes cartesianos. En el eje de abscisas se representa el tiempo y en el eje de ordenadas se representan los valores de la magnitud observada. En el caso de las series temporales financieras se representa el precio de cierre de la sesión Fig.1-2. Representación ampliamente utilizada en el análisis técnico *chartista*, donde los “*chartistas*” intentan detectar figuras, patrones y tendencias

Una forma de representar los cuatro valores que toma el precio, en cada intervalo de tiempo, sobre los mismos ejes cartesianos, es mediante el gráfico de barras Fig.1-3 o el de velas Fig.1-4. En las figuras hemos representado en valor máximo mediante **Hi** (*High*), el valor mínimo mediante **Lo** (*Low*), el precio de apertura **Op** (*open*) y el precio de cierre del intervalo se indica con **Cl** (*Close*). Según comentamos en el apartado anterior, nosotros consideraremos que cada uno de estos cuatro valores forma una serie temporal.

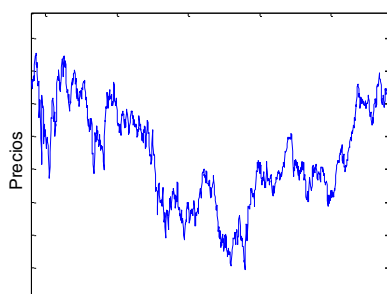


Fig.1-2: Gráfico de cierres

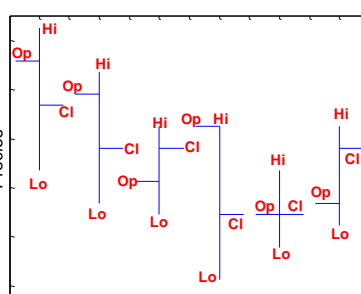


Fig.1-3: Gráfico de barras

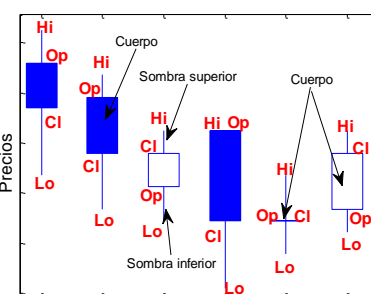


Fig.1-4: Gráfico de velas

1.6.2.3-a) Gráfico de barras

Lo hemos representado en la [Fig.1-3](#), en cada barra se refleja el valor que toma cada una de las cuatro series temporales (H , θ , L , C) en el periodo de cotización, que puede ser de minutos, horas, días, semanas, etc...:

- Serie H del período: Es el extremo superior de la barra.
- Serie L del período: Es el extremo inferior de la barra.
- Serie θ del período: Es la pequeña línea horizontal situada en el lado izquierdo de la barra.
- Serie C del período: Es la pequeña línea horizontal situada en el lado derecho de la barra.

El tamaño de la barra (la distancia entre H y L de la sesión) ya nos da una idea de la volatilidad, cuanto mayor es el tamaño de la barra mayor es la volatilidad.

1.6.2.3-b) Gráfico de velas

Es el que hemos representado en la [Fig.1-4](#) en el que, para mejor comparación, cada vela representa a la barra correspondiente del gráfico [Fig.1-3](#). Cada vela está formada por un cuerpo y las sombras superior e inferior.

- La sombra superior representa el valor que toma la serie H . Si $H=C$ o $H=\theta$ no existe.
- La sombra inferior representa el valor que toma la serie L . Si $L=C$ o $L=\theta$ no existe.
- El cuerpo es la diferencia entre la serie θ y la C (apertura y cierre) del periodo.
 - ✓ Si esta diferencia es negativa se rellena el cuerpo con color
 - ✓ Si es positiva se deja en blanco
 - ✓ Si es cero se representa con una simple línea

1.6.3. Matlab

Matlab (**MATrix LABoratory**) es un IDE (*Integrated Development Environment*) desarrollado por The Mathworks, fundada en 1984, es el líder en desarrollo de software de cálculo matemático para ingenieros y científicos siendo sus principales fortalezas:

- La manipulación de vectores y matrices
- La representación de datos y funciones
- La implementación de algoritmos
- La comunicación con programas en otros lenguajes y con otros dispositivos hardware

El paquete MATLAB dispone adicionalmente de una plataforma de simulación multidominio llamada Simulink y de un editor de interfaces de usuario (GUI) denominado GUIDE.

Matlab dispone también de un amplio abanico de funciones, que cualquiera puede ampliar utilizando el lenguaje de programación propio (lenguaje M), organizadas en bloques denominados *Toolboxes*. Estos *Toolboxes* cubren en la actualidad prácticamente casi todas las áreas de la ingeniería y la simulación. Destacando los *Toolboxes* de:

- Procesado de imágenes
- Procesado de Señal
- Control robusto
- Estadística
- Análisis financiero
- Matemáticas simbólicas
- Redes neuronales
- Lógica difusa, etc

1.6.4. Algoritmos para la extracción de datos

Para automatizar el proceso de descarga de datos, hemos implementado un algoritmo en código Matlab. Esto nos permite introducir el identificador de los *tickers* que componen un determinado mercado o índice para obtener como salida archivos con el nombre del activo y extensión *.mat* que se guardan en local. Cada uno de estos archivos contiene seis vectores que hemos llamado; *Date*, *High*, *Low*, *Open*, *Close* y *Volume*.

- *Date*: tipo *cell* que contiene las fechas
- *High*: tipo *double* que tiene los máximos de cada periodo de cotización.
- *Low*: tipo *double* que tiene los mínimos de cada periodo de cotización
- *Open*: tipo *double* que tiene los precios de apertura de cada periodo
- *Close*: tipo *double* que tiene los precios de cierre de cada periodo
- *Volume*: tipo *double* que tiene el volumen de títulos negociados en el periodo

Este código implementado presenta algunas diferencias en función del origen de los datos, pero la salida que nos proporciona tiene siempre la misma estructura, con lo que tendremos los datos en el mismo formato para utilizarlos en los experimentos independientemente de su origen.

1.6.4.1. Google Finance

A continuación, ver [Tabla 1-1](#), exponemos brevemente las instrucciones Matlab utilizadas en el algoritmo para descargar y guardar los históricos de [Google Finance](#):

- Con la función `urlread` descargamos el archivo al que apunta la dirección URL (Uniform Resource Locator) en una variable tipo string. También nos devuelve una variable lógica para indicarnos si la descarga se completó correctamente.
- Con `textscan` leemos los datos de la variable tipo string y los guardamos en un array tipo cell descartando la primera línea. Con `deal` asignamos nombre a cada uno de los vectores. Finalmente con `save` guardamos los vectores anteriores en un archivo que lleva el nombre del *ticker* correspondiente y la extensión `.mat`.

Instrucción	Sintaxis
<code>urlread</code>	<code>[str,status]=urlread(URL)</code>
<code>textscan</code>	<code>data=textscan(str,'%s%f%f%f%f', 'delimiter',' ',' ','Headerlines',1)</code>
<code>deal</code>	<code>[Y1, Y2, Y3, ...] = deal(X{:})</code>
<code>save</code>	<code>save(filename,variable)</code>

Tabla 1-1: Descripción de instrucciones

Seguidamente describimos la manera en que se confecciona la dirección URL (*Uniform Resource Locator*) para acceder a la descarga de los históricos de Google. La dirección del enlace es en realidad un conjunto de instrucciones que se le pasan al servidor web del proveedor para que genere el archivo con los datos solicitados. La estructura de la cadena consiste en la combinación de varios elementos por medio de un carácter separador. La estructura sería la siguiente:

[http://google.com/finance/historical?q=\[Tickers\]&startdate=\[Dec+5%2C+2011\]&enddate=\[Dec+7%2C+2015\]&output=csv](http://google.com/finance/historical?q=[Tickers]&startdate=[Dec+5%2C+2011]&enddate=[Dec+7%2C+2015]&output=csv)

- <http://google.com/finance/historical?>: Prefijo de la cadena que compone la dirección.
- `q=[Tickers]`: cadena de caracteres utilizada por Google para identificar al activo
- `&`: separador utilizado para combinar los patrones y componer la dirección.
- `startdate=`: indicamos la fecha inicial de descarga.
- `enddate=`: fecha final del histórico.
- `output=csv`: salida de los datos en formato csv (Comma Separated Values).

Si no ponemos fecha inicial y final, por defecto, descargamos el histórico completo. La siguiente línea es un ejemplo de cómo construir una dirección para descargar el histórico de IBM

<http://google.com/finance/historical?q=NYSE%3AIBM&output=csv>

Con la [Tabla 1-2](#) y la [Tabla 1-3](#) podemos comparar la estructura de los archivos csv que nos proporciona cada uno de los servidores. La primera línea contiene los nombres de los campos, como se aprecia en la [Tabla 1-3](#), Yahoo nos envía un campo más (Adj Close) para el ajuste por dividendos y Split. También podemos observar que el formato de las fechas es diferente.

Date	Open	High	Low	Close	Volume
4-Dec-15	14.08	14.26	14.00	14.20	28354070
3-Dec-15	14.31	14.34	13.93	13.98	29847334
2-Dec-15	14.60	14.62	14.24	14.26	21398052
1-Dec-15	14.32	14.56	14.29	14.56	29142177
30-Nov-15	14.54	14.55	14.29	14.33	27860262
27-Nov-15	14.54	14.59	14.50	14.53	7760586
25-Nov-15	14.54	14.68	14.52	14.55	12626958
24-Nov-15	14.41	14.63	14.32	14.55	21251796
23-Nov-15	14.60	14.73	14.51	14.55	18273923
20-Nov-15	14.62	14.76	14.54	14.60	18906222
19-Nov-15	14.45	14.63	14.42	14.57	23593751
18-Nov-15	14.23	14.50	14.18	14.46	26250360
17-Nov-15	14.02	14.37	14.01	14.15	25188601
16-Nov-15	13.85	14.08	13.85	14.04	22635970
13-Nov-15	14.02	14.07	13.89	13.92	25482657
12-Nov-15	14.21	14.27	14.02	14.04	20283724
11-Nov-15	14.28	14.38	14.18	14.31	16893049
10-Nov-15	14.33	14.34	14.14	14.28	22197205
9-Nov-15	14.52	14.53	14.26	14.33	25257385
6-Nov-15	14.51	14.55	14.38	14.52	24085666
5-Nov-15	14.70	14.71	14.50	14.57	21877742
4-Nov-15	14.83	14.86	14.64	14.65	27166413
3-Nov-15	14.78	14.87	14.72	14.81	25878793
2-Nov-15	14.79	14.90	14.71	14.75	30295885
30-Oct-15	14.74	14.95	14.63	14.81	29225845

Tabla 1-2: Ejemplo de datos descargados de Google

Date	Open	High	Low	Close	Volume	Adj Close
2015-12-09	10.945	10.99	10.755	10.875	24967300	10.875
2015-12-08	11.10	11.145	10.83	10.89	30489800	10.89
2015-12-07	11.16	11.285	11.09	11.11	36140300	11.11
2015-12-04	11.20	11.225	10.96	11.075	26767000	11.075
2015-12-03	11.565	11.825	11.26	11.26	30684800	11.26
2015-12-02	11.625	11.655	11.51	11.55	40035800	11.55
2015-12-01	11.70	11.80	11.56	11.585	42439300	11.585
2015-11-30	11.64	11.75	11.60	11.675	27251000	11.675
2015-11-27	11.62	11.745	11.595	11.635	19730700	11.635
2015-11-26	11.555	11.715	11.505	11.67	30224400	11.67
2015-11-25	11.465	11.575	11.365	11.57	30193600	11.57
2015-11-24	11.425	11.495	11.305	11.485	30778300	11.485
2015-11-23	11.71	11.75	11.455	11.52	34304300	11.52
2015-11-20	11.81	11.845	11.67	11.78	23811500	11.78
2015-11-19	11.86	11.90	11.705	11.80	64267100	11.80
2015-11-18	11.975	11.99	11.76	11.78	196675500	11.78
2015-11-17	12.08	12.405	12.04	12.395	34604400	12.05
2015-11-16	11.90	12.085	11.89	12.00	41109100	11.66599
2015-11-13	11.91	12.03	11.83	11.96	23375600	11.62711
2015-11-12	12.145	12.27	11.905	11.945	18737400	11.61252
2015-11-11	12.075	12.315	12.075	12.185	13685200	11.84585
2015-11-10	12.00	12.12	11.86	12.10	57128800	11.76321
2015-11-09	12.235	12.295	11.935	11.94	190306200	11.60766
2015-11-06	12.32	12.32	12.02	12.185	34209000	11.84585
2015-11-05	12.50	12.505	12.25	12.355	40510700	12.01111

Tabla 1-3: Ejemplo de datos descargados de Yahoo!

1.6.4.2. Yahoo! Finance

Las instrucciones del algoritmo para descargar los datos de [Yahoo! Finance](#) son las mismas que las mostradas en la [Tabla 1-1](#) para el algoritmo de Google. Solo se diferencia en la forma de construir la URL y en que la estructura de los datos recibidos es distinta. Como ya vimos en la [Tabla 1-3](#) el archivo csv que proporciona Yahoo, tiene una columna más, llamada “Adj Close”, que la deberemos utilizar para realizar el ajuste por dividendos y Split.

Este ajuste es para evitar la discontinuidad que pueden producir en el gráfico de precios algunos derechos como los dividendos y Split, siendo necesario ajustar los precios anteriores de manera que éstos sean comparables con los precios post-derecho.

En el caso de Google, ya nos entrega los datos ajustados. Aunque esto pueda parecer una ventaja, no lo es, ya que en determinadas circunstancias nos puede interesar disponer de un gráfico sin ajustar.

La forma de confeccionar la dirección URL es parecida a la de Google, pero cada caso tiene sus particularidades. Además, la cadena de caracteres utilizada para definir los *tickers* es particular de cada servidor. Las partes de la dirección para Yahoo! Finance, se describen continuación:

[http://realchart.finance.yahoo.com/table.csv?s=\[Ticker\]&\[d=11&e=7&f=2015\]&g=d&\[a=01&b=05&c=1971\]&ignore=.csv](http://realchart.finance.yahoo.com/table.csv?s=[Ticker]&[d=11&e=7&f=2015]&g=d&[a=01&b=05&c=1971]&ignore=.csv)

- <http://real-chart.finance.yahoo.com/table.csv?s>: parte común
- **&** : separador utilizado para combinar cadenas y componer la dirección.
- **s=[ticker]**: cadena de caracteres utilizada por Yahoo para identificar al activo.
- **[d=dd&e=mm&f=aaaa]**: formato fecha final del histórico a descargar.
- **[a=dd&b=mm&c=aaaa]**: formato de fecha inicial del histórico a descargar.
- **g=**: tipo de compresión con que se solicitan los datos históricos. Los valores permitidos son **d** para valores diarios, **w** para semanales y **m** para mensuales. En caso de omisión los datos generados son diarios.
- **ignore=.csv**: formato de salida para los datos.

Si no ponemos fecha inicial ni final se descarga por defecto desde el inicio al final del histórico. Si tampoco indicamos la resolución con el parámetro **g=** por defecto se descarga el archivo con datos diarios. Un ejemplo de dirección válida para descargar el histórico con datos diarios de Telefónica es el siguiente:

<http://real-chart.finance.yahoo.com/table.csv?s=TEF.MC&ignore=.csv>

1.6.4.3. Visual Chart

Hemos implementado un algoritmo que lee los archivos que descarga **Visual Chart** y los guarda, como en los casos anteriores, en un archivo con el nombre del activo financiero y extensión **.mat**. Este archivo contiene cinco vectores (High, Low, Open, Close y Volumen). Este método de extracción de datos lo utilizamos fundamentalmente cuando necesitamos datos con una resolución mayor que la diaria. En la **Tabla 1-4** mostramos las principales instrucciones utilizadas.

Instrucción	Sintaxis
fopen	fileID = fopen(filename,permission)
fread	A = fread(fileID,sizeA,precision)
save	save(filename,variable)

Tabla 1-4: Descripción de instrucciones para VisualChart

Con la instrucción `fopen` abrimos el archivo y con `fread` lo leemos convirtiéndolo en un vector, por último, mediante un bucle `for-end` vamos separando los seis vectores que forman el histórico del activo. Finalmente con la instrucción `save` guardamos todos los vectores en un archivo `.mat` con el nombre del activo.

Cabe destacar que los tres algoritmos nos proporcionan una salida estándar, con la misma estructura de datos, para que podamos trabajar con ellos en los experimentos, independientemente del origen que hubiesen tenido.

CAPÍTULO 2

CAPÍTULO 2: Análisis de las series temporales financieras a partir del exponente de Hurst

2.1. Introducción

En este capítulo analizamos las cuatro series temporales que se generan en las cotizaciones de activos financieros (precios de acciones e índices) en términos del exponente de Hurst. Prácticamente la totalidad de los estudios consultados en la literatura tratan únicamente la serie temporal de los cierres o *closing* (C_t), sin embargo, en cada intervalo temporal los proveedores de datos proporcionan tres valores adicionales, el valor al inicio del intervalo, apertura u *opening* (O_t), el valor máximo o *high* (H_t) y el valor mínimo o *low* (L_t). Recordemos que para los cálculos con el exponente H , utilizamos la primera derivada de las series completas (H, O, L, C).

El estudio de las tres series temporales adicionales no es habitual y por tanto supone una novedad en el tratado de los datos financieros. En el apartado 2.1.1 se introduce el exponente de Hurst y se presenta el estado del arte en lo que se refiere a su aplicación en series financieras.

En el apartado 2.2 describimos la selección de un algoritmo, entre varios, para la estimación del exponente en función de su sesgo, variancia y error cuadrático medio, evaluándolos empíricamente con series temporales sintéticas de diferentes longitudes y de exponente H conocido.

Una vez seleccionado el estimador, en el apartado 2.3 proponemos un método, para monitorizar el exponente H de forma dinámica, distinto a las aproximaciones aparecidas en la literatura. Para ello se ha graficado su evolución para la mayoría de los valores del Ibex y de los principales índices americanos y europeos aunque sólo reproducimos una pequeña parte de ellas. Mostramos también la actuación del estimador configurado para distintas longitudes de ventana de exploración. En este apartado únicamente se presentan algunas gráficas representativas de los resultados a partir de las cuales ya se pueden extraer ciertas conclusiones. Estos resultados son contrastados para un amplio conjunto de valores y son presentados en forma compacta mediante tablas.

2.1.1. Estado del arte

El origen del exponente de Hurst y su aplicación a la caracterización de series temporales tiene su origen en los estudios que se realizaron, con el objetivo de modelar el caudal del río Nilo, para el proyecto de construcción de su presa. El estudio de la información de alrededor de 847 años que los Egipcios guardaron sobre desbordamientos del río Nilo permitió al hidrólogo inglés Harold Edwin Hurst descubrir la existencia de ciclos aperiódicos [9] en los datos. Para ello tuvo que desarrollar su propia metodología de análisis ya que los procedimientos estadísticos usados hasta el momento no obtenían correlaciones significativas entre las observaciones. Sin embargo, hoy en día se está utilizando de forma intensiva en el modelado de series temporales y de forma muy especial en las series financieras.

El exponente de Hurst, que designaremos con la letra H , es un número real entre cero y uno. H es el único parámetro necesario para describir un tipo de proceso estocástico conocido como movimiento Browniano fractal o fraccional (fBm). El fBm puede entenderse como una generalización del proceso conocido como movimiento Browniano estándar u ordinario (Bm). De hecho, el Bm, se obtiene de la expresión general del fBm cuando $H=0.5$. Históricamente, el proceso browniano estándar ha sido extensamente utilizado en la caracterización de las series temporales de origen financiero.

El movimiento browniano fue descubierto por el biólogo Robert Brown en 1827 [10]. Mediante un microscopio, observó que pequeñas partículas de polen sumergidas en líquido experimentaban el movimiento irregular que hoy en día lleva su nombre. El movimiento browniano permaneció inexplicado durante muchos años. Aunque parece que el primero en dar un modelo matemático del movimiento browniano fue Louis Bachelier en 1900 en su tesis doctoral, se suele atribuir la explicación del movimiento browniano a Albert Einstein, en uno de sus famosos tres artículos que realizó en 1905 [11]. Bachelier, en su tesis 'La teoría de la especulación' analiza de forma estocástica la fluctuación de los precios de las acciones y las opciones financieras en los mercados, modelando la fluctuación de los precios a través del movimiento Browniano.

Por su parte y de forma independiente Einstein argumentó que, si la teoría molecular era correcta, las moléculas de agua tenían que golpear las partículas de polen contenidas en un fluido, de forma aleatoria en todas direcciones, haciendo que éstas describan un movimiento del estilo del descrito por Brown [10]. Cabe mencionar que en aquella época la teoría molecular todavía no estaba totalmente aceptada y esta aportación cambió el paradigma de la física.

Durante muchos años la corriente principal dominante en el análisis financiero asumió que las variaciones de los precios de los activos financieros eran estadísticamente independientes entre sí y por tanto podían ser modelados mediante un movimiento

browniano estándar, tal y como había establecido Bachelier en su día. Así mismo se asumieron modelos gaussianos de forma general para las distribuciones de estas series temporales y de forma muy especial para las series de retornos (horarios, diarios, etc.). En estas premisas se sustentó la hipótesis del mercado eficiente, que asume que los movimientos de precios de los activos financieros se rigen por la hipótesis del paseo aleatorio puro (*random walk*) y por tanto son inherentemente impredecibles.

Hasta la crisis de las hipotecas *subprime* iniciada en Estados Unidos a mediados de 2007 no se cuestionaron seriamente estas hipótesis ampliamente utilizadas en las finanzas cuantitativas. El uso prácticamente exclusivo de la estadística gaussiana ya había sido rebatido y previamente criticado por Mandelbrot (entre otros) tras demostrar que las funciones de densidad de probabilidad de los datos financieros no son Gaussianas o normales [12][13][14].

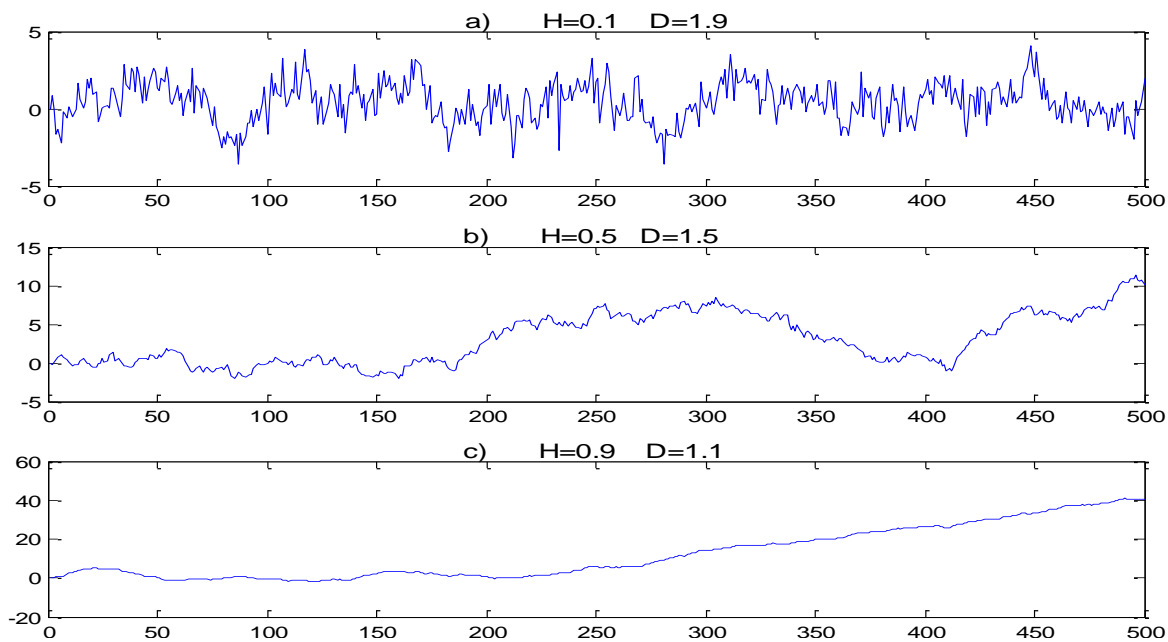
Mandelbrot había reportado que las funciones de densidad de probabilidad de los datos financieros tienen colas más alargadas que las de la campana de Gauss. Y que esto era especialmente relevante en los modelos Black-Scholes utilizados para establecer el precio de las opciones sobre acciones y otros derivados financieros, porque su supuesta gaussianidad hace que los valores extremos de las distribuciones reales se subestimen, incurriendo en una falsa percepción de riesgo [14]. En estos modelos se asumía que los valores extremos (asociados al riesgo) suceden con menor probabilidad que la observada.

Era bien conocido que las funciones de densidad de probabilidad medias de los datos históricos tienen colas superiores a las de la campana de Gauss. En sus trabajos, Mandelbrot también había demostrado que las series temporales procedentes de los mercados financieros exhiben un comportamiento de autosimilitud a diferentes escalas, comportamiento que se conoce con el nombre de fractal.

El exponente de Hurst también se utiliza como una medida de la memoria a largo plazo (o persistencia) que pueden exhibir las series temporales y mide la tasa de decaimiento de la dependencia estadística, relacionada además con los procesos auto-similares o fractales descritos por Mandelbrot. Sabemos además que el exponente de Hurst está directamente relacionado con la dimensión fractal, D , de los datos. Como las series temporales financieras tienen dimensión espacial uno, aplicando la ecuación (2-1), donde D es la dimensión fractal y H el exponente de Hurst, obtenemos la dimensión fractal de la serie, que va a estar comprendida entre uno y dos.

$$D = 2 - H \quad (2-1)$$

En la gráfica [Fig.2-1](#) se representan tres series temporales sintéticas de 500 muestras y exponente H conocido, generadas utilizando una función de *Wavelet Toolbox* del Matlab [15]. En el título de cada gráfica se ha indicado el exponente H y la dimensión fractal correspondiente a cada serie.



Esta representación de la [Fig.2-1](#) nos permite obtener una interpretación gráfica de la morfología de la serie, en función de H y de su dimensión fractal. Por ejemplo, se observa el incremento de la rugosidad con el aumento de D y el aumento de la tendencia para exponentes H mayores.

A continuación, hacemos una somera descripción de algunas de las características que cabe esperar de series temporales en función del valor que toma su exponente H . Hay que hacer notar, que cuando damos un intervalo de valores para H , las características no se mantienen constantes en todo el intervalo, sino que se van haciendo más significativas cuando los valores se acercan a los extremos. Por ejemplo, tendrá mucha más persistencia una serie con $H=0.9$ que una con $H=0.55$.

➤ Para $0 \leq H < 0.5$

Se tienen series que se denominan anti-persistentes, o anti-correlacionadas. Significaría que un periodo de crecimiento es seguido de otro de decrecimiento. A nivel de representación espectral estas series se caracterizan por presentar mayor contenido espectral en la alta frecuencia. A estas series se las asocia con un comportamiento que se denomina de reversión a la media. Indicando que si la serie ha estado sobre el nivel de la media en el período anterior, es más probable que, en el siguiente periodo, esté por debajo de ésta y si en el periodo anterior ha estado por debajo de la media es más probable que en el siguiente esté por encima.

➤ Para $H=0.5$

Los datos son independientes y decimos que no hay memoria. Se trata de una serie aleatoria que cumple con todas las características del movimiento browniano estándar y sus propiedades se asemejan al ruido blanco.

➤ Para $0.5 < H \leq 1$

La serie es persistente o correlacionada y los datos presentan una tendencia según la cual, un periodo de crecimiento en la serie es probable que venga seguido de otro análogo. Series de este tipo presentan un aspecto “suave”. Es decir, si la serie estaba arriba (o abajo) de su media de largo plazo en el período anterior, lo más probable es que continúe arriba (o abajo) en el período siguiente.

Es interesante resaltar que la estimación del exponente de Hurst para un conjunto de datos nos indica, en que medida obedecen al modelo del camino aleatorio puro (B_m), o por el contrario, tiene tendencias subyacentes (fB_m). Se entiende por tendencia subyacente que el proceso aleatorio tiene un cierto grado de autocorrelación. Es por esto que en los últimos años, se ha comenzado a utilizar el exponente de Hurst para evaluar propiedades de independencia estadística en series temporales financieras.

En la literatura existen numerosos textos en los que se resumen las propiedades de los fB_m y su relación con el exponente de Hurst o la dimensión fractal, además de proporcionar su relación con las propiedades espectrales de las series temporales [16][17].

En cuanto a la aplicación del exponente de Hurst a series financieras, continuamente van apareciendo nuevos enfoques y aplicaciones. En [18], por ejemplo, se utiliza en el estudio de mercados de futuros del sector energético. En [19] se aplica al estudio y predicción de las crisis financieras y se explora su capacidad para predicción en distintos ámbitos y sectores [20][21][12]. Otro tipo de estudios comentan, actualizan y compilan el estado del arte [22][23].

Un tema que actualmente despierta el interés generalizado en el análisis de series temporales, es la dependencia de H con el tiempo, con lo que estimar H a partir de series cortas y monitorizar su evolución en el tiempo centra gran parte de las nuevas contribuciones. Esto ocurre tanto en el ámbito de aplicaciones en general [24], como en el ámbito financiero en particular [25][26][27]. Bajo este enfoque en [28] se estudian los datos de los mercados de acciones americanas y en [29] y [13] se analizan los mercados emergentes. En [30] se establecen relaciones entre H y la variación de la volatilidad de las series financieras, tema tratado también en [31]. En [32] se estudia la capacidad que puede tener H para anticipar cambios en las tendencias, utilizando series de precios extraídos del mercado de acciones de Varsovia.

Actualmente los algoritmos más recientes para la estimación de \mathbf{H} se basan en el análisis wavelet [33][34][35] y en [36] se extiende el análisis wavelet para la estimación de dicho exponente cuando las series temporales son consideradas 'cortas'.

Otro tipo de trabajos, como [37], relacionan el exponente de Hurst y los fBm con el método EMD (*Empirical Mode Decomposition*) o, como es el caso de [38] directamente con el análisis técnico.

2.1.2. Descripción del método original para la estimación del exponente de Hurst

El método, que documentamos y que inicialmente programamos para la estimación del exponente, es el basado en el análisis de rango re-escalado (*rescaled range analysis*) que fue originariamente desarrollado por Hurst. Para ello nos basaremos en información aportada en [39][40] que abordan la metodología de cálculo. De acuerdo a este método, se calcula repetidamente un parámetro conocido como rango re-escalado $(R/S)_n$ que se obtiene de fragmentos de n muestras de la secuencia analizada, variando el valor de n de acuerdo con los pasos expuestos a continuación para finalmente ajustar el exponente de Hurst (parámetro \mathbf{H}) y una constante c a través de una recta de regresión según el procedimiento descrito al final del método. La relación del rango re-escalado, para distintos valores de n (tiempo discreto) se ajustan a la ecuación (2-2). Cuando este rango se calcula con series temporales que obedecen al camino aleatorio puro (proceso Browniano puro Bm) las observaciones se ajustan a un exponente de Hurst con $\mathbf{H}=0.5$.

$$\left(\frac{R}{S}\right)_n = c \cdot n^H \quad (2-2)$$

A continuación, describimos los pasos seguidos para la estimación e implementación del método de cálculo del exponente de Hurst, basado en el análisis de rango re-escalado.

➤ Paso 1

Dividimos la serie temporal de tamaño N en A subgrupos contiguos de longitud n , tal que $A \cdot n = N$. Se designa cada subgrupo como I_a , con $a = 1, 2, 3, \dots, A$. Cada elemento de I_a , es etiquetado como $N_{k,a}$, tal que $k = 1, 2, 3, \dots, n$. Para cada subgrupo I_a , de longitud n , se calcula la media e_a dada por la siguiente expresión:

$$e_a = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n N_{k,a} \quad (2-3)$$

➤ Paso 2

Las diferencias de cada elemento $N_{k,a}$, con respecto a la media e_a , para cada subperiodo I_a , se van sumando para obtener la serie de tiempo acumulada $X_{k,a}$, definida como:

$$X_{k,a} = \sum_{i=1}^k (N_{i,a} - e_a), \quad k = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2-4)$$

➤ Paso 3

Se calculan los rangos RI_a , como la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de $X_{k,a}$, para cada subgrupo I_a :

$$RI_a = \text{Max}(X_{k,a}) - \text{Min}(X_{k,a}), \quad \text{donde } 1 \leq k \leq n \quad (2-5)$$

➤ Paso 4

A continuación mediante (2-6) se calcula la desviación estándar muestral SI_a para cada subgrupo I_a :

$$SI_a = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (N_{k,a} - e_a)^2 \right)^{1/2} \quad (2-6)$$

➤ Paso 5

Para cada subgrupo I_a , su rango RI_a , se normaliza dividiendo por su desviación estándar muestral SI_a , correspondiente. Por lo tanto el rango re-escalado para cada subgrupo I_a , es igual a RI_a/SI_a . Finalmente se calcula la media de los A subgrupos para obtener el valor total $(R/S)_n$ definido en la ecuación (2-7) como:

$$(R/S)_n = 1/A \sum_{a=1}^A (RI_a/SI_a) \quad (2-7)$$

➤ Paso 6

Seguidamente aumentamos el número a de subgrupos, de tal forma que N/a sea un número entero. Iniciando con el valor más pequeño de a , y de acuerdo con la condición anterior se repiten los pasos de uno a seis, utilizando siempre la serie completa, hasta que tengamos calculado el número de $(R/S)_n$ suficiente (en nuestro caso 40) que junto con su correspondiente n (longitud del periodo) utilizaremos en el paso siguiente para, mediante regresión, calcular el exponente H .

➤ Paso 7

Partiendo de la ecuación (2-2) y aplicando propiedades de logaritmos se tiene que:

$$\begin{aligned} \ln(R/S)_n &= \ln(c \cdot n^H) \\ \ln(R/S)_n &= \ln(c) + H \cdot \ln(n) \end{aligned} \quad (2-8)$$

Donde:

- $(R/S)_n$: es el rango re-escalado del subperiodo l de tamaño n .
- H : es el exponente de Hurst.
- n : es el número de muestras del subperiodo l .
- c : es una constante.

➤ Paso 8

Finalmente se calcula la ecuación de la recta de regresión de $\ln(R/S)_n$ frente a $\ln(n)$, donde $\ln(c)$ es la ordenada en el origen y la pendiente de la recta es la estimación del exponente Hurst, H .

2.2. Selección de un estimador para el exponente de Hurst

El objetivo que se plantea en este apartado es el de seleccionar un método de estimación de H , dentro de los múltiples métodos disponibles en la literatura. Para ello lo evaluaremos en función de la longitud de muestras de las secuencias de entrada, para así determinar qué calidad proporcionan y si son, o no, sesgados. La dependencia con la longitud de la secuencia a estimar será un parámetro relevante para el desarrollo de un estimador que proporcione una estimación temporal del parámetro de Hurst. En la literatura existen diferentes métodos para la estimación del exponente de Hurst, que perfeccionan el método original descrito en el apartado anterior [33][34][35].

2.2.1. Pruebas de evaluación y selección del estimador

Para seleccionar un estimador como núcleo para el desarrollo de un algoritmo capaz de seguir la evolución temporal, debemos someterlo a unas pruebas de verificación y contraste de forma simulada.

El experimento consiste en evaluar sistemáticamente un grupo de 1000 series generadas sintéticamente de longitud y exponente H conocido, repitiendo la evaluación para series de distinta longitud, con el objetivo de valorar la dependencia entre la calidad de las estimaciones y la longitud de la serie. Con los resultados representamos el histograma y evaluamos el rendimiento del estimador a través de la media, la desviación estándar y el error cuadrático medio.

➤ Media

Dado un conjunto de n elementos $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ la media viene dada por la expresión (2-9) donde la media \bar{x} es la suma de todos los elementos dividida por n .

$$\bar{x} = 1/n \sum_{i=1}^n a_i \quad (2-9)$$

➤ Desviación estándar

Dado un conjunto de n elementos $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, se calcula mediante (2-10), que representa la desviación que presentan los datos en su distribución respecto de la media aritmética de dicha distribución.

$$STD = \sqrt{\left(1/n \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{x})^2\right)} \quad (2-10)$$

➤ Error cuadrático medio

El error cuadrático medio (2-11) de un estimador mide el promedio de los errores al cuadrado, es decir, la diferencia entre el resultado obtenido por el estimador en la estimación \hat{Y}_i y el valor real que se pretende estimar Y .

$$ECM = 1/n \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - Y)^2 \quad (2-11)$$

Inicialmente evaluamos cuatro estimadores distintos, sometiéndolos al experimento descrito anteriormente. Esto nos permitirá tener puntos de comparación y en última instancia seleccionar, de entre los cuatro, el que mejor se adapte a nuestras condiciones de trabajo.

El primero es el método original, basado en el análisis de rango re-escado, que hemos implementado siguiendo los pasos descritos en el apartado anterior (en adelante estimador R/S). Los otros tres están disponibles en el Wavelet Toolbox del Matlab [41][42][33][43], de los cuales uno está basado en la derivada discreta de segundo orden (en adelante estimador DSOD), otro es una versión de la derivada discreta de segundo orden usando wavelets (en adelante estimador WDSOD) y finalmente la versión wavelet regresión (en adelante estimador WR).

2.2.2. Interpretación y valoración de resultados obtenidos con cada estimador

A continuación, y siguiendo el experimento descrito anteriormente, se estimará \mathbf{H} a partir de 1000 series sintéticas de \mathbf{H} conocido, con longitudes de 100, 300, 400, 500, 1000 y 7000 muestras.

Desde la Fig.2-2 a la Fig.2-7 hemos representado los histogramas con los resultados obtenidos, con cada método de estimación, para las distintas pruebas. En estas figuras, junto con el histograma, también está indicada la media (flecha roja) y el exponente real de

las series evaluadas (flecha verde). Asimismo, en la [Tabla 2-1](#) a la [Tabla 2-6](#) se muestra la media, la desviación estándar y el error cuadrático medio obtenidos con cada uno de los estimadores en las diferentes pruebas.

➤ Caso L=100

En la [Fig.2-2](#) se representa el histograma de los resultados del experimento que consiste en evaluar 1000 series de 100 muestras con $H=0.6$. A simple vista de los histogramas ya podemos ver que los cuatro métodos se comportan bastante mal con series de longitud tan pequeña, ofreciendo resultados poco fiables. Directamente de estas gráficas ya observamos que los estimadores R/S y WR son sesgados. Resultado que, como veremos, se repite para el resto de experimentos.

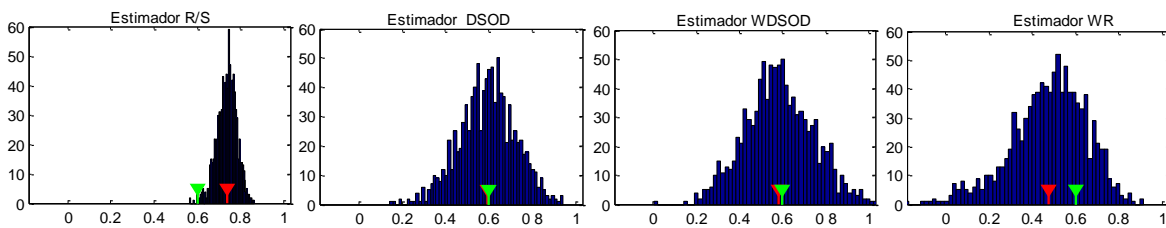


Fig.2-2: Histogramas de 1000 evaluaciones para series de 100 muestras y $H=0.6$

En la [Tabla 2-1](#) vemos que el estimador R/S es el que mejor desviación estándar proporciona, pero como anteriormente comentamos tiene sesgo. El estimador DSOD es el que mejor error cuadrático medio ofrece para series con tan pocas muestras.

Estimador	R/S	DSOD	WDSOD	RW
Media	0.7371	0.5919	0.5826	0.4755
STD	0.0456	0.1299	0.1576	0.1741
ECM	0.0209	0.0169	0.0251	0.0458

Tabla 2-1: Series sintéticas de 100 muestras y $H=0.6$

➤ Caso L=300

En la [Fig.2-3](#) se han representado los histogramas de los resultados para el experimento realizado con series de 300 muestras, se puede observar que han mejorado los resultados de los cuatro estimadores.

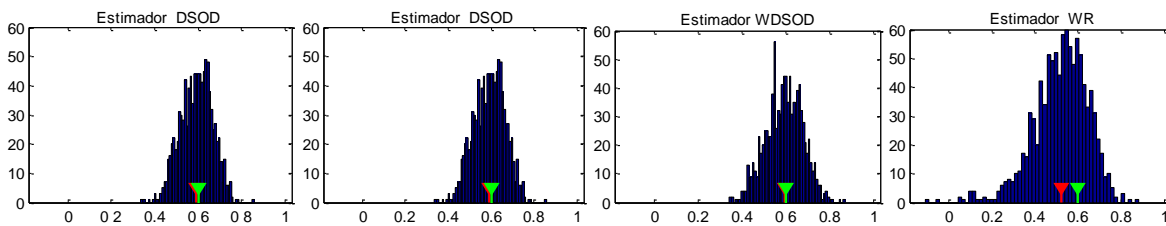


Fig.2-3: Histogramas de 1000 evaluaciones para series de 300 muestras y $H=0.6$

Un análisis más exhaustivo lo podemos realizar mirando la [Tabla 2-2](#), en la que podemos apreciar que la media, la desviación estándar y el error cuadrático medio mejora en todos, al aumentar el número de muestras. Siendo el estimador R/S el que mejor desviación estándar y error cuadrático medio presenta.

Estimador	R/S	DSOD	WDSOD	RW
Media	0.6538	0.5928	0.5932	0.5209
STD	0.0538	0.0735	0.0842	0.1263
ECM	0.0058	0.0071	0.0071	0.0222

Tabla 2-2: Series sintéticas de 300 muestras y $H=0.6$

➤ Caso L=400

La [Fig.2-4](#) y la [Tabla 2-3](#) muestran los resultados para el experimento con series de 400 muestras. Observamos que han mejorado los resultados, obteniendo en todos los casos errores cuadráticos medios muy aceptables. El estimador R/S continúa siendo el que mejor desviación estándar presenta, pero para series de esta longitud, ofrece mejor media y error cuadrático medio el estimador DSOD.

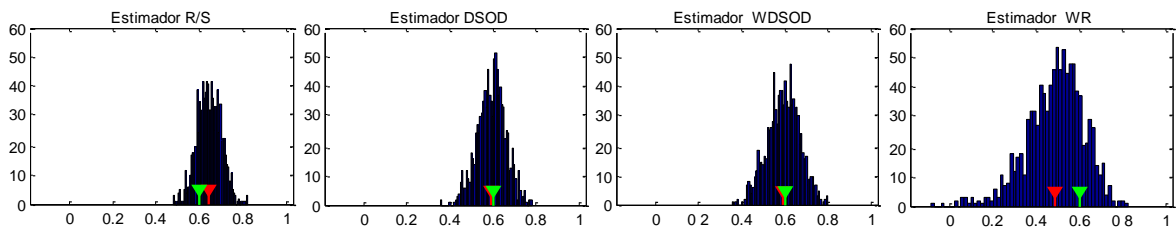


Fig.2-4: Histogramas de 1000 evaluaciones para series de 400 muestras y $H=0.6$

Estimador	R/S	DSOD	WDSOD	RW
Media	0.6441	0.5936	0.5927	0.4886
STD	0.0555	0.0658	0.0746	0.1316
ECM	0.0050	0.0044	0.0056	0.0297

Tabla 2-3: Series sintéticas de 400 muestras y $H=0.6$

➤ Caso L=500

Los resultados del experimento para series de longitud de 500 muestras los hemos representado en [Fig.2-5](#) y en la [Tabla 2-4](#) donde podemos observar que los resultados, aunque mejoran un poco, se mantienen más o menos estables.

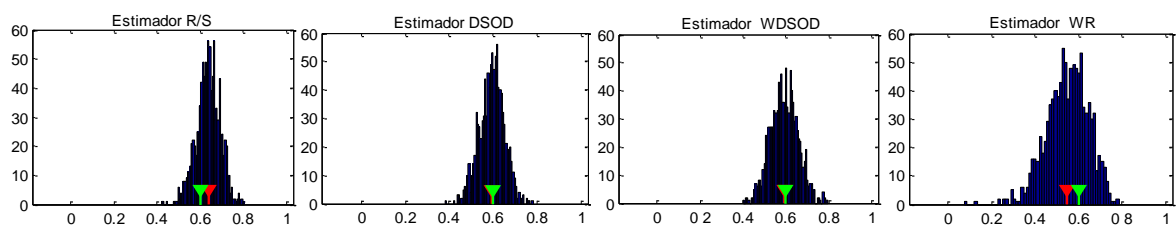


Fig.2-5: Histogramas de 1000 evaluaciones para series de 500 muestras y $H=0.6$

Estimador	R/S	DSOD	WDSOD	RW
Media	0.6365	0.5949	0.5941	0.5479
STD	0.0554	0.0568	0.0643	0.0963
ECM	0.0044	0.0033	0.0042	0.0120

Tabla 2-4: Series sintéticas de 500 muestras y $H=0.6$

➤ Casos L=1000 y L=7000

En las Fig.2-6 y Fig.2-7 y en las Tabla 2-5 y Tabla 2-6 se muestran los resultados cuando vamos aumentando la longitud de la serie a 1000 y 7000 muestras, donde se puede observar cómo van mejorando las estimaciones pero ya no de una forma tan significativa como entre 100 y 300.

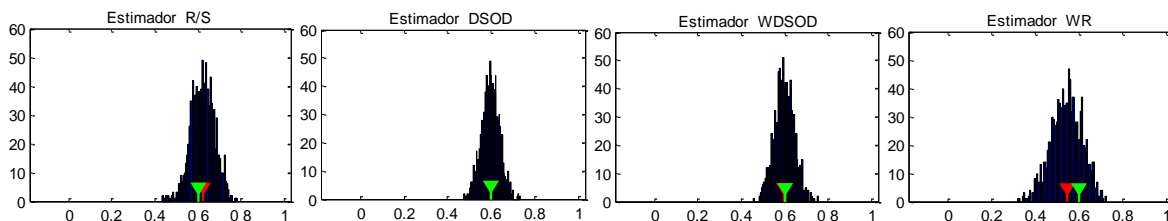


Fig.2-6: Histogramas de 1000 evaluaciones para series de 1000 muestras y $H=0.6$

Estimador	R/S	DSOD	WDSOD	RW
Media	0.6224	0.5969	0.5975	0.5439
STD	0.0544	0.0405	0.0459	0.0709
ECM	0.0035	0.0016	0.0021	0.0082

Tabla 2-5: Series sintéticas de 1000 muestras y $H=0.6$

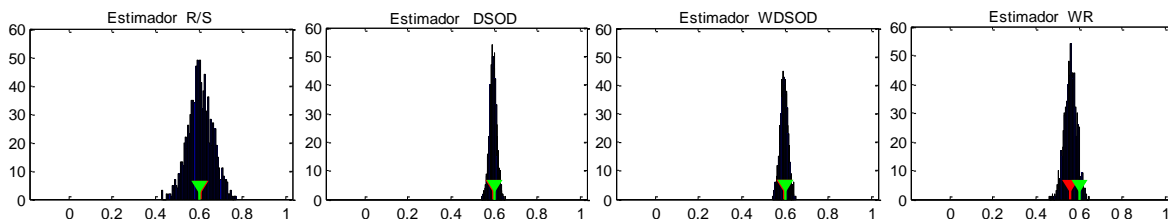


Fig.2-7: Histogramas de 1000 evaluaciones para series de 7000 muestras y $H=0.6$

Estimador	R/S	DSOD	WDSOD	RW
Media	0.6136	0.5953	0.5957	0.5608
STD	0.0341	0.0160	0.0174	0.0276
ECM	0.0013	2.7671e-4	3.2213e-4	0.0023

Tabla 2-6: Series sintéticas de 7000 muestras y $H=0.6$

En la Fig.2-8 hemos representado la evolución de la media la STD y el ECM de las estimaciones proporcionadas por cada estimador en función de la longitud de la serie. Se puede apreciar que, en general, los parámetros mejoran cuando aumenta la longitud de las series. A partir de una longitud de 300 muestras ya se mantienen estables y un aumento de la longitud, no implica un cambio importante en la calidad de las estimaciones.

En resumen, observamos que el R/S y el WR son sesgados, en cuanto a los otros dos, se comporta mejor el estimador DSOD, sobre todo en series pequeñas, que el WDSOD.

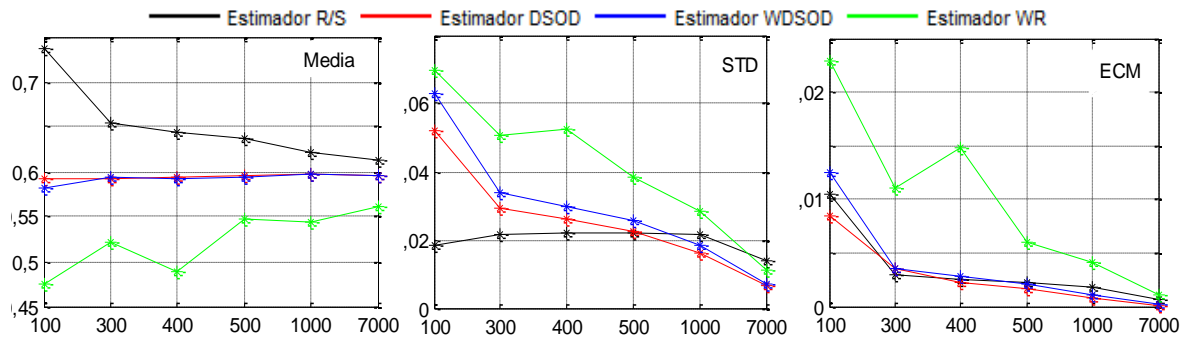


Fig.2-8: Media, STD y ECM de las estimaciones en función del número de muestras

En conclusión, basándonos en los resultados de las simulaciones anteriores y a la vista de la Fig.2-8, podemos determinar que el estimador DSOD (*Discrete Second Order Derivative*) [41] es el que mejor comportamiento presenta en todos los casos, por lo que es el que utilizaremos como núcleo para el desarrollo de un método capaz de seguir la evolución temporal de H en las series de los activos financieros.

2.3. Propuesta de un método para la exploración dinámica del exponente de Hurst

En este apartado se describe el método que hemos planteado para estimar de forma dinámica el exponente de Hurst. En la Fig.2-9 se ha representado gráficamente el método de estimación a través de ventanas móviles, donde n es la longitud de la serie a analizar y v es el tamaño de ventana utilizado.

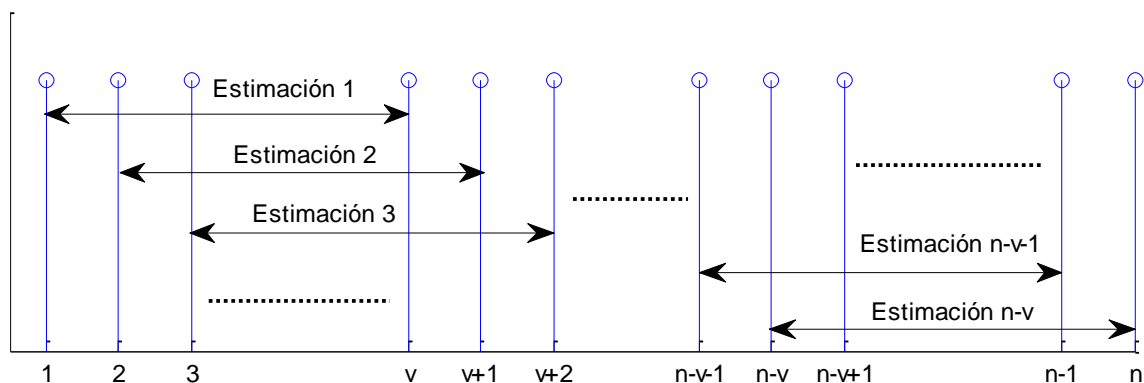


Fig.2-9: Descripción del método de exploración dinámica por ventanas

Tal como se representa en dicha figura, el método consiste en ir haciendo estimaciones con secuencias de v muestras, a lo largo de toda la serie. Para ello comenzamos con la primera estimación que se realizará con los primeros v datos (tamaño de la ventana elegida) con índices que van del 1 a v . Seguidamente pasamos al segundo

dato $t+1$ y estimamos con los datos cuyos índices van del 2 al $t+1$, y así sucesivamente, hasta llegar a n (final de la serie). Al final habremos obtenido $n-v$ estimaciones que representaremos gráficamente como se indica en [Fig.2-10](#).

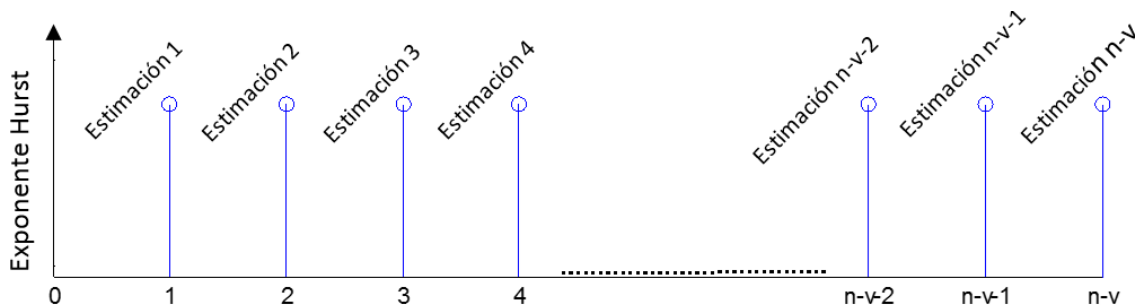


Fig.2-10: Representación gráfica de las estimaciones para una serie de n muestras

Estas $n-v$ estimaciones corresponden al número total de ventanas exploradas a lo largo de toda la serie, según la relación (2-12)

$$nv = ls - tv \tag{2-12}$$

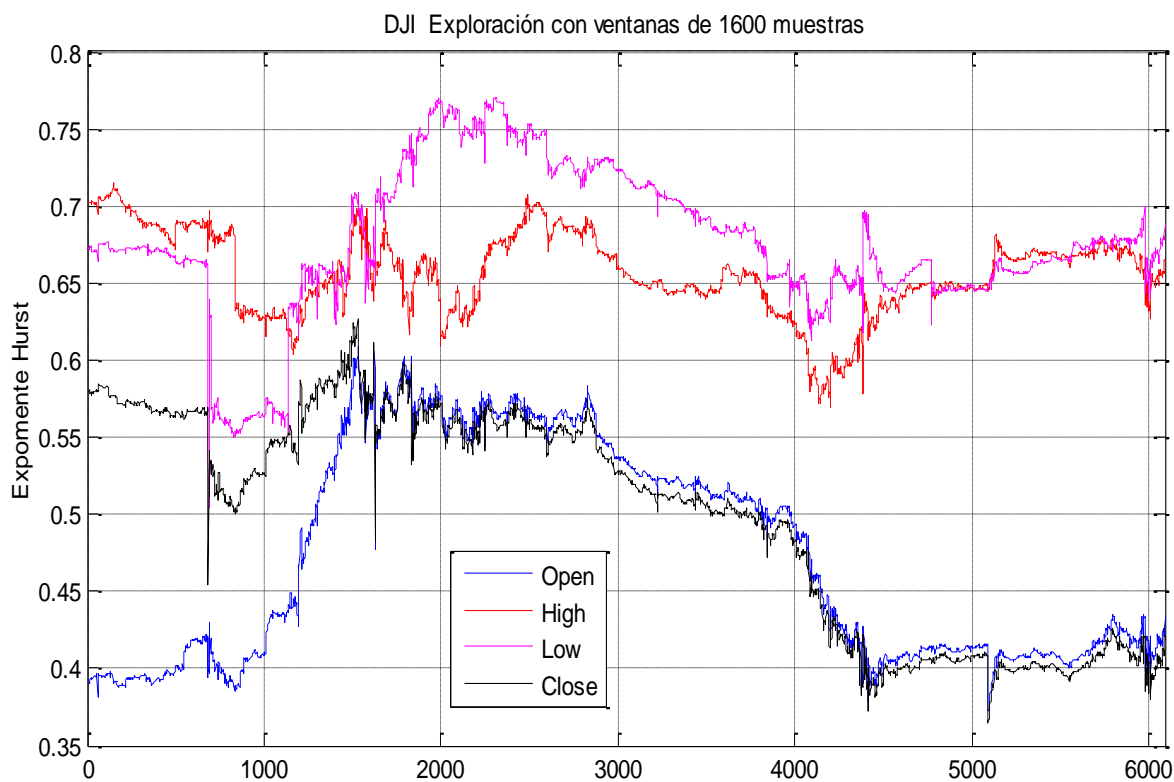
Siendo: nv el número de ventanas analizadas a lo largo de la serie, ls la longitud total de la serie y tv el tamaño de ventana seleccionado.

Para el caso de los activos financieros, realizamos este proceso con las cuatro series temporales que forman el histórico del activo, y representamos el resultado de las estimaciones obtenidas para las cuatro series, sobre los mismos ejes cartesianos. Lo que nos permite comparar los resultados obtenidos en cada una de las series.

Para ilustrar el proceso, en la [Fig.2-11](#) mostramos, a modo de ejemplo, los resultados de aplicar este método al histórico del índice Dow Jones que, en este caso, dispone de $n=7791$ muestras. En el eje de ordenadas se representa el valor del exponente de Hurst y en el eje de abscisas representamos el número de estimaciones. En este caso se han realizado 6191 estimaciones, para cada una de las cuatro series, con un tamaño de ventana $v=1600$ muestras. La línea azul representa las estimaciones para la serie temporal θ_t , la magenta son las estimaciones de la serie L_t , la negra la serie C_t y la roja representa las estimaciones para la serie temporal H_t .

A la vista de la [Fig.2-11](#) ya podemos realizar las siguientes observaciones:

- Las estimaciones realizadas para cada una de las cuatro series presentan importantes discrepancias.
- Las estimaciones obtenidas para las series H_t (máximos) y L_t (mínimos) presentan un exponente H marcadamente mayor que las series θ_t (aperturas) y C_t (cierres).
- Lo observado en los dos puntos anteriores se repite, como norma general, a lo largo de las 6191 estimaciones de que consta la exploración de este activo.



Estas observaciones, de las que no tenemos constancia que anteriormente hayan sido documentadas, en un principio, pueden parecer irrelevantes. Pero si tenemos en cuenta las propiedades del exponente H , estos resultados pueden ser relevantes a la hora de predecir el comportamiento de las diferentes series temporales que forman el histórico del activo. En los dos capítulos siguientes, intentaremos relacionar empíricamente algunas propiedades de estas series financieras con su exponente H . Y finalmente, basándonos en los resultados obtenidos, proponemos un método para predecir el rango de valores en el que se moverán los precios de la sesión siguiente.

2.4. Estimación dinámica del exponente H para varias acciones e índices.

Mediante el método de estimación dinámica hemos podido evidenciar los resultados expuestos en el apartado anterior para el histórico del índice Dow Jones. De igual forma en el apartado actual emplearemos dicho método para explorar gran cantidad de activos, utilizando diferentes tamaños de ventana. De esta manera podremos comprobar si los resultados observados se repiten, como norma general, para otros activos y diferentes tamaños de ventana.

2.4.1. Representación gráfica de la estimación dinámica para varios activos

En este subapartado exponemos gráficamente los resultados de aplicar el método de estimación dinámica a varias acciones e índices, tanto nacionales como internacionales. Como en el caso anterior, la línea azul representa las estimaciones para la serie temporal O_t , la magenta son las estimaciones de la serie L_t , la negra la serie C_t y la roja representa las estimaciones para la serie temporal H_t . Por razones de espacio, nos referiremos al activo financiero por su *ticker*, pero en el [Anexo A](#): hemos representado unas tablas con el *ticker* y el nombre del activo correspondiente con una pequeña descripción.

La [Fig.2-12](#) representa los gráficos con los resultados de la exploración dinámica, realizada con ventanas de 400 sesiones, para los históricos de Telefónica (TEF) y Santander (SAN). El gráfico de telefónica muestra 3644 estimaciones para cada una de las cuatro series que forman el histórico. Como se puede apreciar en el gráfico, en la mayoría de las 3644 estimaciones, las series de los máximos (H_t) y la de los mínimos (L_t), tienen un H mayor de 0.6, mientras que las series de las aperturas (O_t) y los cierres (C_t) se encuentran más próximas a la línea de 0.5, oscilando entre valores próximos por encima y valores próximos por debajo. Lo mismo podemos decir de las 3656 estimaciones realizadas para el histórico del Santander.

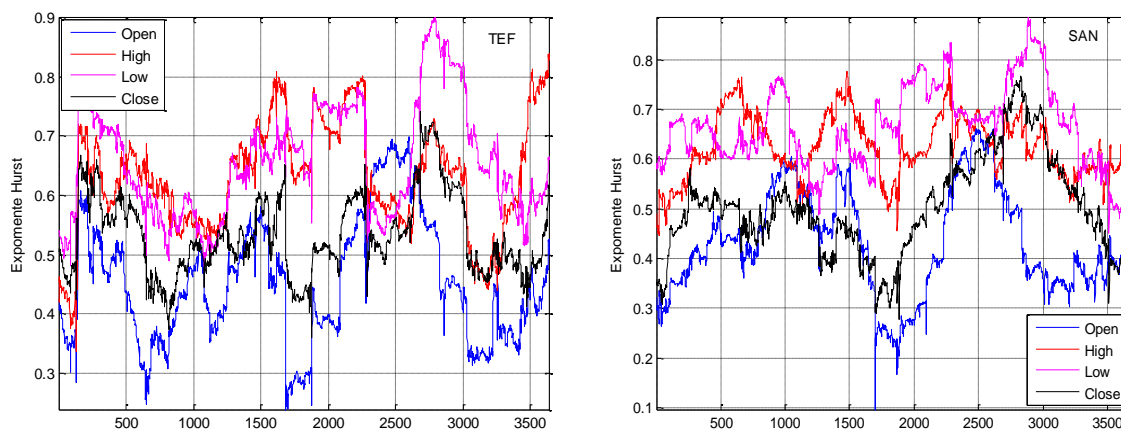


Fig.2-12: Exploración de Telefónica y Santander con ventanas de 400 muestras

En términos generales, podemos afirmar que básicamente el comportamiento de las cuatro series de estos dos históricos es muy parecido al visto en la [Fig.2-11](#) para las series del índice Dow Jones, aunque en este caso se aprecian más oscilaciones en las estimaciones de H debido a que el tamaño de ventana utilizado es mucho menor, de solo 400 muestras.

En la [Fig.2-13](#) están representadas las exploraciones, con ventanas de 400 sesiones o muestras, para los históricos de Ferrovial (FER) y Actividades de Construcción y Servicios (ACS). Según podemos ver, tanto en la figura anterior como en esta, se mantienen más

elevadas las estimaciones para las series L_d y H_d , llegando, en algunos puntos, a producirse importantes diferencias entre las estimaciones de las cuatro series. Por ejemplo, en el caso de ACS, tenemos puntos en los que, las estimaciones de la serie L_d toman valores de 0.9, mientras las estimaciones para la serie θ_d toman valores de 0.43. Podemos poner otro ejemplo con las estimaciones de FER donde el gráfico presenta puntos en los que, las estimaciones de la serie L_d toma valores de 0.8 mientras las estimaciones para θ_d están en 0.43.

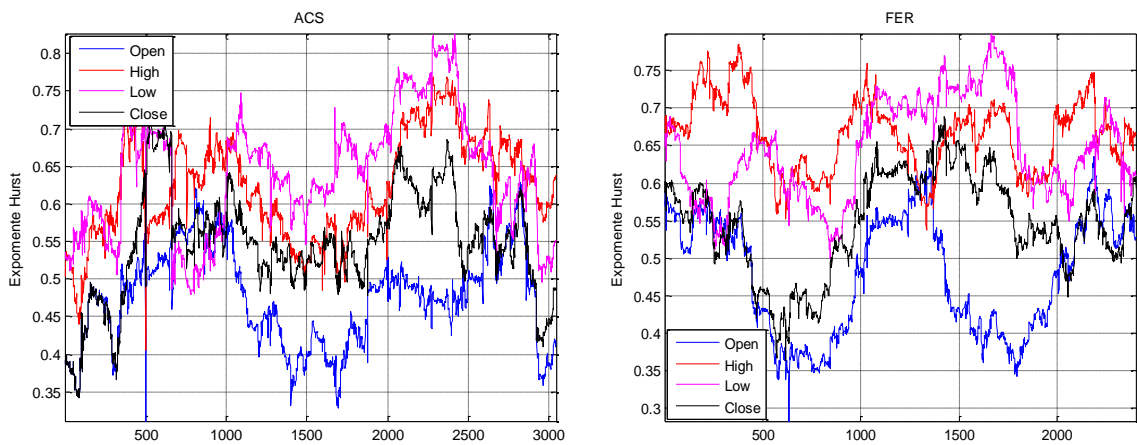


Fig.2-13: Exploración de ACS y FER con ventanas de 400 muestras

La Fig.2-14 representa la exploración dinámica con ventanas de 800 muestras, para los históricos de Telefónica y del Santander. En este caso se han realizado 3244 estimaciones para cada una de las cuatro series del histórico de Telefónica y 3256 estimaciones para el histórico del Santander. Podemos apreciar que al aumentar el tamaño de ventana, se han suavizado notablemente las formas que presentan las curvas de las estimaciones para las cuatro series, manteniéndose el comportamiento que anteriormente apuntábamos, con estimaciones notablemente más altas para L_d y H_d .

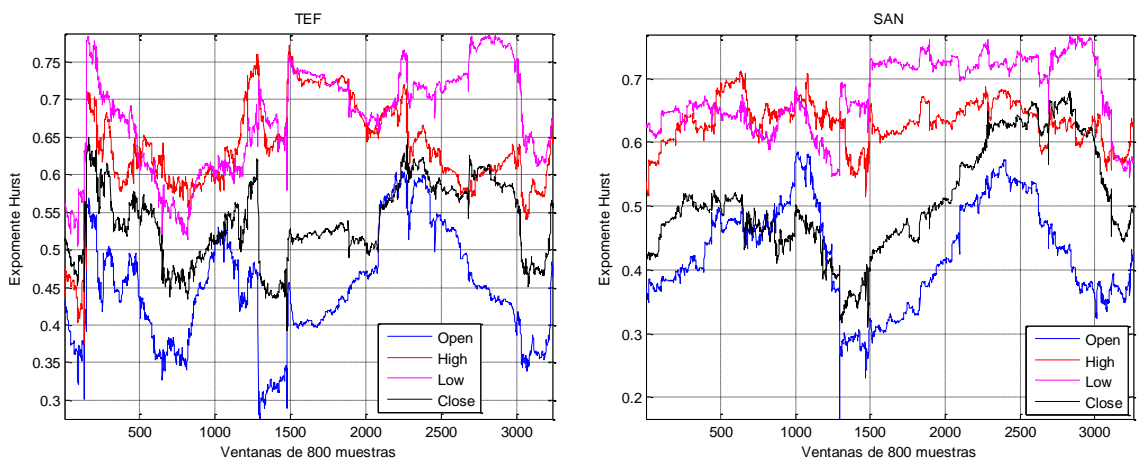


Fig.2-14: Exploración de TEF y SAN con ventanas de 800 muestras

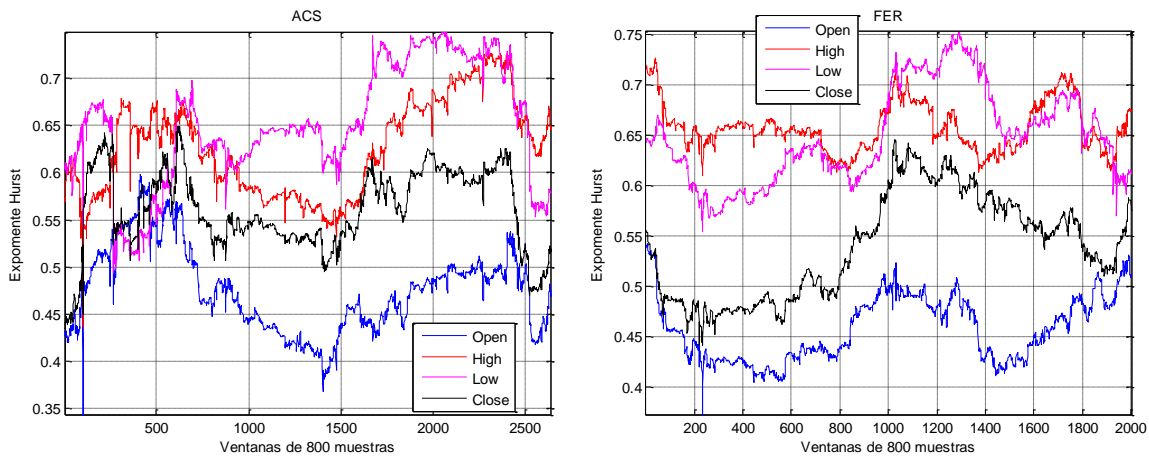


Fig.2-15: Exploración de ACS y FER con ventanas de 800 muestras

Fig.2-15 hemos representados las exploraciones con ventanas de 800 muestras para los históricos de ACS Y FER. En los gráficos de esta figura, como en el caso anterior, apreciamos una suavización de las formas de las curvas, pudiendo apreciar una clara diferenciación entre los exponentes H de las cuatro series, manteniéndose por encima de 0.6 la mayor parte de las estimaciones de las series L_d y H_d , mientras que la L_d alterna alrededor del nivel de 0.5 y la θ_d se mantiene en casi todas las estimaciones por debajo de 0.5.

La Fig.2-16 representa los de la exploración para el histórico del FTSE (índice de la bolsa de Londres) y el IBEX con ventanas de 800 muestras. El histórico del IBEX consta de las cuatro series de 4135 muestras cada una, tomadas entre el 9/4/1999 y el 31/7/2015, para el caso del FTSE tenemos series de 8227 muestras o sesiones cada una, tomadas entre el 3/1/1984 y el 31/7/2015.

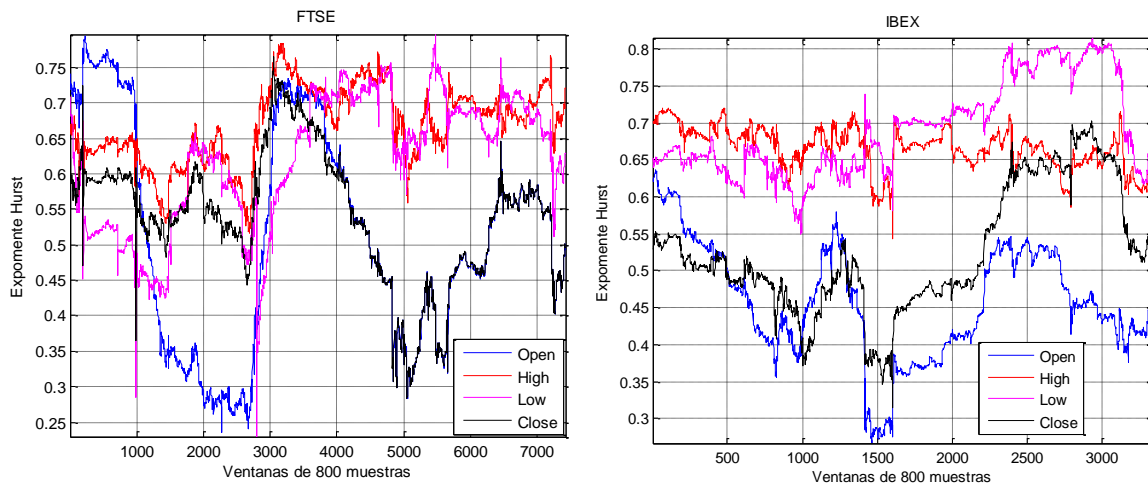


Fig.2-16: Exploración de FTSE e IBEX con ventanas de 800 muestras

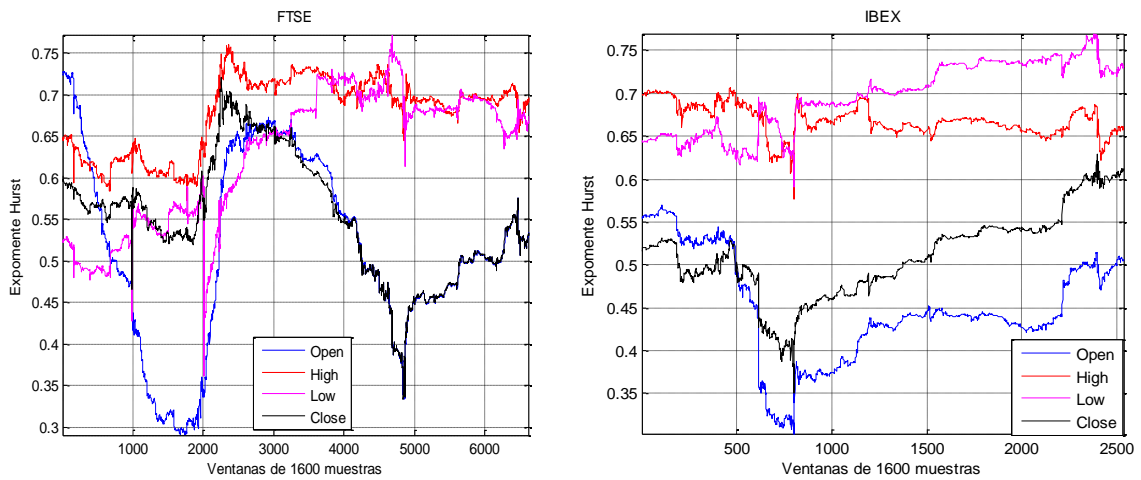


Fig.2-17: Exploración de FTSE e IBEX con ventanas de 1600 muestras

En Fig.2-17 se representa la exploración con ventanas de 1600 muestras. En la gráfica de la izquierda se representan las 6627 estimaciones realizadas sobre las cuatro series que forman el histórico del FTSE. La gráfica de la derecha muestra las 2535 estimaciones realizadas en la exploración del histórico del IBEX. De nuevo observamos el mismo comportamiento y cuanto más aumentamos el tamaño de ventana más se suavizan las formas y más claramente se aprecian las discrepancias entre las estimaciones de las cuatro series, manteniéndose más altas las estimaciones de las series L_d y H_d .

En la Fig.2-18 se muestran los resultados obtenidos al realizar el experimento con ventanas de 1600 muestras sobre el CAC 40 (índice de la bolsa de París) y el DAX (índice de la bolsa de Fráncfort). Las series del histórico del CAC 40 tienen 6441 muestras tomadas, desde el 1/3/1990 al 31/7/2015. Las series del histórico del DAX tienen 6249 observaciones, tomadas desde el 26/11/1990 al 31/7/2015.

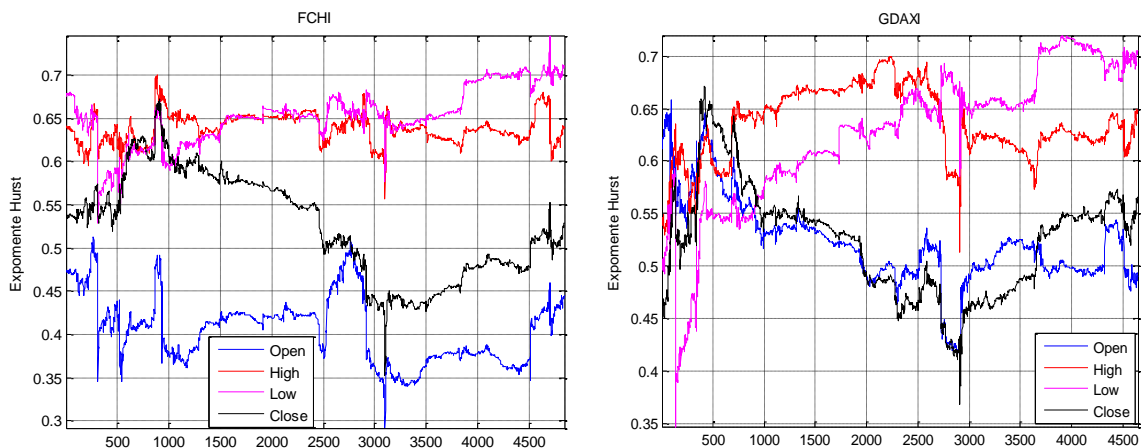


Fig.2-18: Exploración de FCHI y GDAXI con ventanas de 1600 muestras

En la Fig.2-19 tenemos los resultados de realizar la estimación dinámica sobre las series del S&P500 (GSPC) y el Nasdaq 100 (NDX) con ventanas de 1600 muestras. Las series del histórico del S&P500 tienen 8975 muestras tomadas entre el 2/1/1980 y el 31/7/2015, para el histórico del Nasdaq 100 tenemos series con 7522 muestras, tomadas entre el 1/10/1985 y el 31/7/2015.

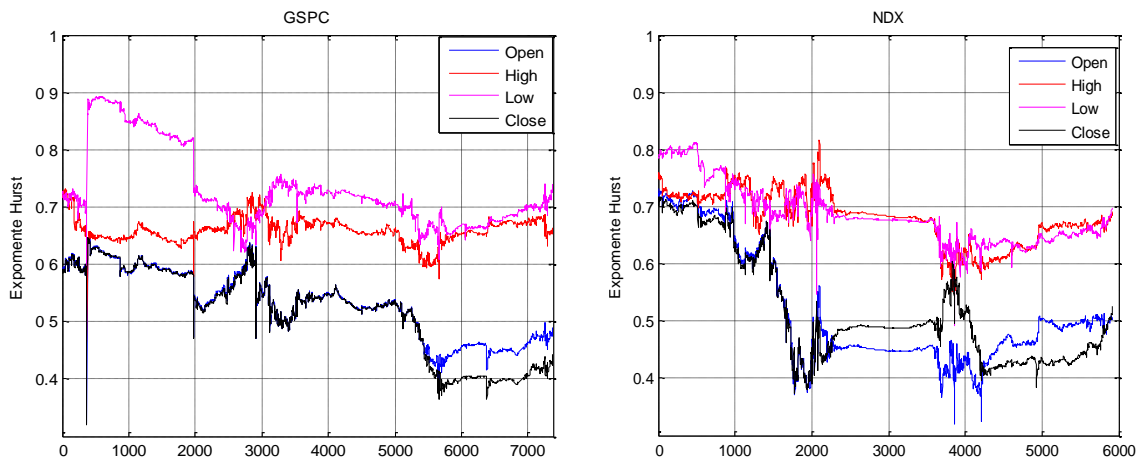


Fig.2-19: Exploración de GSPC y NDX con ventanas de 1600 muestras

A lo largo de las ilustraciones anteriores, las gráficas hablan por si mismas, y hemos podido constatar que el fenómeno, observado la primera vez que aplicamos el método de estimación dinámica sobre un activo, se repite a lo largo de todos los activos e índices analizados (por razones de espacio no hemos podido representar todos los experimentos realizados), comprobando, además, que esta importante observación es independientemente del tamaño de ventana elegido.

2.4.2. Estimación exhaustiva de H en los precios de acciones e índices y su dependencia con la longitud de la serie temporal. Resultados obtenidos.

En este apartado mostramos mediante tablas, las estimaciones dinámicas de H para los históricos de muchos valores nacionales y mundiales, que sería imposible representar gráficamente de forma individual. Las relaciones se expresan mediante porcentajes del tiempo en que la estimación de H de una (o más de una) de las cuatro series que determinan la evolución de los precios del activo está por encima de las otras.

Mediante estas tablas se muestran, los resultados de los experimentos para varios tamaños de ventana con la finalidad de constatar que los resultados obtenidos persisten independientemente de la longitud base utilizada en el algoritmo de estimación dinámica de H . Para la correcta interpretación de las tablas deberemos tener presente que la primera columna representa el identificador del activo financiero analizado (*ticker*). En las cuatro siguientes columnas: \bar{H}_d , \bar{L}_d , \bar{C}_d y \bar{O}_d mostramos la media de las estimaciones del exponente

de Hurst realizadas a lo largo de la serie respectiva. A continuación para interpretar el significado del resto de columnas utilizamos la siguiente notación. Con las letras O_d , H_d , L_d y C_d identificamos las series temporales de las aperturas, los máximos, los mínimos y los cierres, respectivamente. Luego, en las columnas, con la combinación de una letra y el símbolo 'mayor que', >, por ejemplo, $H_d >$, indicamos el porcentaje tiempo en el que la estimación del exponente de Hurst, en este caso de los máximos H_d , es mayor que las estimaciones de los exponentes de Hurst correspondientes a las series O_d , L_d y C_d . Con la notación >0.6 expresamos el porcentaje de las estimaciones en las que la serie correspondiente está por encima de 0.6. También utilizamos el símbolo & para la expresión lógica AND y el símbolo || para la expresión lógica OR. La [Tabla 2-7](#) representa un breve resumen de esta interpretación, donde cada fila explica el contenido de cada una de las columnas que aparecen en las tablas de exploración dinámica.

Columna	Descripción
<i>Ticker</i>	Columna con los <i>tickers</i> de los activos analizados
<i>nv</i>	Número de ventanas analizadas a lo largo del histórico, según relación (2-12)
$\overline{H_d}$	Media de los exponentes H de todas las ventanas analizadas para la serie H_d
$\overline{L_d}$	Media de los exponentes H de todas las ventanas analizadas para la serie L_d
$\overline{C_d}$	Media de los exponentes H de todas las ventanas analizadas para la serie C_d
$\overline{O_d}$	Media de los exponentes H de todas las ventanas analizadas para la serie O_d
$H_d > 0.6$	Porcentaje de ventanas analizadas en las que la serie H_d tiene un H mayor de 0.6
$L_d > 0.6$	Porcentaje de ventanas analizadas, en las que la serie L_d tiene un H mayor de 0.6
$C_d > 0.6$	% de ventanas analizadas, en las que la serie C_d tiene un H mayor de 0.6
$O_d > 0.6$	% de ventanas analizadas, en las que la serie O_d tiene un H mayor de 0.6
$H_d >$	% de ventanas analizadas en las que H_d tiene un H mayor que las otras tres series.
$L_d >$	% de ventanas analizadas en las que L_d tiene un H mayor que las otras tres series.
$C_d >$	% de ventanas analizadas en las que C_d tiene un H mayor que las otras tres series.
$O_d >$	% de ventanas analizadas en las que O_d tiene un H mayor que las otras tres series.
$H_d > C_d \& O_d$	% de ventanas analizadas en las que H_d tiene un H mayor que las series C_d y O_d .
$L_d > C_d \& O_d$	% de ventanas analizadas en las que L_d tiene un H mayor que las series C_d y O_d .
$H_d \& L_d > C_d \& O_d$	% de ventanas en las que H_d y L_d presentan un H mayor que el de las series C_d y O_d .

Tabla 2-7: Interpretación de las tablas de análisis dinámico para el exponente **H**

A modo de ejemplo, con la expresión $H_d > C_d \& O_d$ que aparece en la columna 14, indicamos el porcentaje del tiempo analizado en el que las estimaciones del exponente de Hurst de los máximos H_d , es mayor que las estimaciones del exponente de Hurst tanto de los cierres C_d , como de las aperturas O_d . Con la expresión $H_d \& L_d > C_d \& O_d$, que aparece en la última columna, indicamos el porcentaje de ventanas analizadas en las que tanto las estimaciones del exponente de Hurst de los máximos H_d como el de los mínimos L_d es mayor que las estimaciones del exponente de Hurst de los cierres C_d y las aperturas O_d .

2.4.2.1. Tablas resumen de los resultados de estimación dinámica del exponente de Hurst para los índices más representativos de EEUU

A continuación siguiendo la notación expuesta en el apartado anterior, de la [Tabla 2-8](#) a la [Tabla 2-10](#), presentamos las tablas de exploración dinámica, con tres longitudes base distintas, para cuatro de los índices más representativos de Estados Unidos: Dow Jones Industrial Average (^DJI), NASDAQ Composite (^IXIC), Nasdaq 100 (^NDX) y S&P 500 (^GSPC).

Ticker	nv	\bar{H}_d	\bar{L}_d	\bar{C}_d	\bar{O}_d	$H_d > 0.6$	$L_d > 0.6$	$C_d > 0.6$	$O_d > 0.6$	$H_d >$	$L_d >$	$C_d >$	$O_d >$	$H_d > C_d \& O_d$	$L_d > C_d \& O_d$	$H_d \& L_d > C_d \& O_d$
^DJI	7211	0.65	0.668	0.499	0.468	78.82	77.86	14.55	6.2	32.65	64.49	1.91	0.94	94.49	91.9	89.25
^IXIC	7286	0.7	0.715	0.607	0.545	90.84	95.35	43.62	30.5	42.02	53.7	4.27	0.01	81.44	87.28	73
^NDX	7042	0.681	0.696	0.549	0.541	87.3	92.12	32.61	32.37	43.1	54.3	1.34	1.26	87.79	93.79	84.18
^GSPC	8494	0.661	0.714	0.516	0.528	87.13	96.13	19.29	19.31	23.1	76.9	0	0	96.39	97.3	93.69

Tabla 2-8: Resumen del análisis dinámico del exponente de Hurst para los índices de EEUU: Dow Jones Industrial Average (^DJI), NASDAQ Composite (^IXIC), Nasdaq 100 (^NDX) y S&P 500 (^GSPC). La ventana base utilizada para el análisis dinámico es de 480 muestras

Ticker	nv	\bar{H}_d	\bar{L}_d	\bar{C}_d	\bar{O}_d	$H_d > 0.6$	$L_d > 0.6$	$C_d > 0.6$	$O_d > 0.6$	$H_d >$	$L_d >$	$C_d >$	$O_d >$	$H_d > C_d \& O_d$	$L_d > C_d \& O_d$	$H_d \& L_d > C_d \& O_d$
^DJI	6731	0.655	0.67	0.499	0.468	84.86	85.51	4.74	3.18	33.97	66.03	0	0	98.6	99.97	98.57
^IXIC	6806	0.695	0.709	0.595	0.539	94.2	98.6	37.62	26.92	45.79	52.42	1.79	0	82.41	92.87	77.08
^NDX	6562	0.682	0.693	0.535	0.533	89.85	96.78	28.91	29.4	47.74	52.17	0.09	0	94.63	99.74	94.47
^GSPC	8014	0.661	0.721	0.515	0.528	94.2	99.76	12.98	13.05	20.15	79.85	0	0	98.3	99.68	97.98

Tabla 2-9: Resumen del análisis dinámico del exponente de Hurst para los índices de EEUU: Dow Jones Industrial Average (^DJI), NASDAQ Composite (^IXIC), Nasdaq 100 (^NDX) y S&P 500 (^GSPC). La ventana base utilizada para el análisis dinámico es de 960 muestras

Ticker	nv	\bar{H}_d	\bar{L}_d	\bar{C}_d	\bar{O}_d	$H_d > 0.6$	$L_d > 0.6$	$C_d > 0.6$	$O_d > 0.6$	$H_d >$	$L_d >$	$C_d >$	$O_d >$	$H_d > C_d \& O_d$	$L_d > C_d \& O_d$	$H_d \& L_d > C_d \& O_d$
^DJI	6251	0.656	0.674	0.499	0.471	93.7	93.71	1.34	0.94	32.69	67.31	0	0	100	99.98	99.98
^IXIC	6326	0.694	0.701	0.586	0.524	96.16	99.29	32.96	27.46	49.44	47.73	2.83	0	82.36	95.3	80.49
^NDX	6082	0.682	0.687	0.523	0.52	93.83	98.78	25.14	26	54.81	45.12	0.07	0	98.11	99.9	98.08
^GSPC	7534	0.66	0.729	0.518	0.531	97.31	99.96	11.93	13.08	10.21	89.79	0	0	99.77	100	99.77

Tabla 2-10: Resumen del análisis dinámico del exponente de Hurst para los índices de EEUU: Dow Jones Industrial Average (^DJI), NASDAQ Composite (^IXIC), Nasdaq 100 (^NDX) y S&P 500 (^GSPC). La ventana base utilizada para el análisis dinámico es de 1440 muestras

2.4.2.1-a) Ejemplo para la correcta lectura de las tablas de exploración dinámica del exponente de Hurst \mathbf{H}

Como sería imposible comentar todos los resultados que aparecen en estas tablas y las de los anexos, ponemos un ejemplo de interpretación para que el lector pueda leer en las tablas directamente.

Usaremos como ejemplo los resultados de la estimación dinámica que muestra la [Tabla 2-10](#) para el DJI, recorriendo las columnas de izquierda a derecha.

La primera columna es el nombre del activo analizado. La segunda (n) nos indica el número de evaluaciones realizadas durante la exploración, en este caso 6251. La tercera columna \bar{H}_d representa la media de las 6251 estimaciones de \mathbf{H} realizadas para la serie H_d , en este caso 0.656. El número 0.674 de la siguiente columna es la media de las 6251 estimaciones de \mathbf{H} realizadas para la serie L_d . 0.499 es la media de las estimaciones realizada para la serie C_d . 0.471 es la media de las estimaciones para la serie O_d . La columna ($H_d > 0.6$) nos dice que en el 93.7% de las 6251 estimaciones, la serie H_d obtuvo un \mathbf{H} mayor de 0.6. La columna ($L_d > 0.6$) representa que en el 93.71% de las estimaciones, la serie L_d obtuvo un \mathbf{H} mayor de 0.6. La columna ($C_d > 0.6$) representa que en el 1.34% de las estimaciones, la serie C_d obtuvo un \mathbf{H} mayor de 0.6. La columna ($O_d > 0.6$) representa que en el 0.94% de las estimaciones, la serie O_d obtuvo un \mathbf{H} mayor de 0.6. La columna ($H_d >$) representa que en el 32.69% de las estimaciones, la serie H_d obtuvo un \mathbf{H} mayor que el resto de series. La columna ($L_d >$) representa que en el 67.31% de las estimaciones, la serie L_d obtuvo un \mathbf{H} mayor que el resto de series. La columna ($C_d >$) representa que en el 0% de las estimaciones, la serie C_d obtuvo un \mathbf{H} mayor que el resto de series. La columna ($O_d >$) representa que en el 0% de las estimaciones, la serie O_d obtuvo un \mathbf{H} mayor que el resto de series. La columna ($H_d > C_d \& O_d$) nos indica que para el 100% de las estimaciones la serie H_d presenta un \mathbf{H} mayor que las C_d y O_d . La columna ($L_d > C_d \& O_d$) nos indica que para el 99.98% de las estimaciones la serie L_d presenta un \mathbf{H} mayor que las C_d y O_d . Y para finalizar, la última columna nos indica que las series H_d y L_d han obtenido simultáneamente en el 99.98% de las estimaciones, un \mathbf{H} mayor que las C_d y O_d .

Este ejemplo nos da una idea de la gran cantidad de información compactada en estas tablas y nos muestra el procedimiento para acceder rápidamente a las relaciones entre los exponentes \mathbf{H} de las cuatro series de los índices analizados.

La lectura de estas tablas evidencia que las discrepancias entre el \mathbf{H} que presentan las cuatro series se repiten sistemáticamente para todos los índices estudiados y corroboran plenamente los resultados gráficos mostrados en el apartado anterior.

En el [Anexo B.3](#) hemos adjuntado las tablas con los resultados de la exploración dinámica, con las tres longitudes base, para los componentes de índice Dow Jones Industrial Average (\wedge DJI).

2.4.2.2. Resumen de los resultados de estimación dinámica del exponente de Hurst para índices de mercados de cuatro países Europeos

En este apartado mostramos las tablas de compactación de resultados para una muestra de índices de mercados de acciones de países europeos obtenidos también para tres valores distintos de la longitud base en el algoritmo de estimación dinámica. Los índices analizados son: *Francia CAC 40 (^FCHI)*, *Alemania DAX (^GDAXI)*, *Reino Unido (^FTSE 100)* y *España (^IBEX)*.

Utilizando el método descrito anteriormente, con estas tablas el lector podrá comprobar que, para cualquier activo y con cualquier longitud de ventana, se repiten sistemáticamente las discrepancias entre el \mathbf{H} de las cuatro series de los índices europeos. Lo mismo podemos decir si leemos los resultados de las tablas con la exploración dinámica de los componentes de estos índices que mostramos en el [Anexo B](#).

Ticker	nv	\bar{H}_d	\bar{L}_d	\bar{C}_d	\bar{O}_d	$H_d > 0.6$	$L_d > 0.6$	$C_d > 0.6$	$O_d > 0.6$	$H_d >$	$L_d >$	$C_d >$	$O_d >$	$H_d >$ $C_d \& O_d$	$L_d >$ $C_d \& O_d$	$H_d \& L_d >$ $C_d \& O_d$
^FCHI	2243	0.62	0.675	0.468	0.392	63.16	84.79	12.97	0	29.75	70.25	0	0	94.02	100	94.02
^GDAXI	1306	0.582	0.655	0.537	0.476	57.40	76.47	36.47	1.14	15.71	84.29	0	0	73.03	100	73.03
^FTSE	3706	0.689	0.682	0.47	0.471	98.46	89.07	15.87	17.05	55.55	44.45	0	0	100	100	100
^IBEX	3315	0.659	0.69	0.528	0.451	87.78	88.98	19.19	1.87	46.29	53.71	0	0	85.18	100	85.18

Tabla 2-11: Resumen del análisis dinámico del exponente de Hurst para los índices Europeos de Francia CAC 40 (^FCHI), Alemania DAX (^GDAXI), Reino Unido (^FTSE 100) y España (^IBEX) La ventana base utilizada para el análisis dinámico es de 480 muestras.

Ticker	nv	\bar{H}_d	\bar{L}_d	\bar{C}_d	\bar{O}_d	$H_d > 0.6$	$L_d > 0.6$	$C_d > 0.6$	$O_d > 0.6$	$H_d >$	$L_d >$	$C_d >$	$O_d >$	$H_d >$ $C_d \& O_d$	$L_d >$ $C_d \& O_d$	$H_d \& L_d >$ $C_d \& O_d$
^FCHI	1763	0.635	0.703	0.488	0.385	94.50	99.77	0	0	0.74	99.26	0	0	100	100	100
^GDAXI	826	0.591	0.682	0.551	0.459	88.48	88.61	20.12	0	0.36	99.64	0	0	95.52	100	95.52
^FTSE	3226	0.7	0.703	0.477	0.478	100	100	0.03	0.217	52.5	47.5	0	0	100	100	100
^IBEX	2835	0.665	0.704	0.528	0.446	95.80	99.86	28.08	0	31.55	68.45	0	0	89.84	100	89.84

Tabla 2-12: Resumen del análisis dinámico del exponente de Hurst para los índices Europeos de Francia CAC 40 (^FCHI), Alemania DAX (^GDAXI), Reino Unido (^FTSE 100) y España (^IBEX) La ventana base utilizada para el análisis dinámico es de 960 muestras.

Ticker	nv	\bar{H}_d	\bar{L}_d	\bar{C}_d	\bar{O}_d	$H_d > 0.6$	$L_d > 0.6$	$C_d > 0.6$	$O_d > 0.6$	$H_d >$	$L_d >$	$C_d >$	$O_d >$	$H_d >$ $C_d \& O_d$	$L_d >$ $C_d \& O_d$	$H_d \& L_d >$ $C_d \& O_d$
^FCHI	1283	0.634	0.693	0.482	0.391	99.53	100	0	0	0	100	0	0	100	100	100
^GDAXI	346	0.538	0.608	0.488	0.436	72.46	72.75	0	0	0	100	0	0	94.78	100	94.78
^FTSE	2746	0.7	0.704	0.479	0.479	100	100	0	0	40.87	59.13	0	0	100	100	100
^IBEX	2355	0.666	0.706	0.517	0.441	99.83	99.96	15.76	0	19.92	80.08	0	0	100	100	100

Tabla 2-13: Resumen del análisis dinámico del exponente de Hurst para los índices Europeos de Francia CAC 40 (^FCHI), Alemania DAX (^GDAXI), Reino Unido (^FTSE 100) y España (^IBEX) La ventana base utilizada para el análisis dinámico es de 1440 muestras.

En el [Anexo B](#) hemos adjuntado las tablas de compactación, con los resultados de la exploración dinámica mediante el exponente de Hurst, para los componentes de los índices europeos de Francia CAC 40 ([Anexo B.1](#)), Alemania DAX ([Anexo B.2](#)), Reino Unido y España IBEX35 ([Anexo B.4](#)).

2.5. Breve resumen de los resultados

Nótese que los resultados de las cuatro series temporales de los precios de las acciones siguen un patrón similar al de los encontrados para los índices. En la inmensa mayoría de los resultados, los promedios del exponente de Hurst para los valores máximos H_d y mínimos L_d supera el 0.6. Las características de persistencia de estas series, por tanto, se mantienen. En contraste los valores medios de H de las series θ_d y ζ_d presentan valores que varían en torno a 0.5, con posibilidades de encontrar comportamientos de ligera persistencia y ligera anti-persistencia. Además el tiempo en que la estimación dinámica de H para H_d y L_d está por encima de 0.6 es considerablemente más alto que para θ_d y ζ_d , reproduciéndose otra vez, el mismo patrón encontrado para los índices. Finalmente señalar que éstos resultados se hacen evidentes ya para el valor de ventana de 480 y se consolidan y acentúan a medida que el valor de la ventana se incrementa, como hemos demostrado en los casos de 960 y 1440. En el análisis de series temporales financieras, muchos autores han reportado que las series temporales de los cierres se ajustan mejor al modelo Browniano fractal que al modelo Browniano puro de forma que hoy en día esta visión parece del todo aceptada. En todo caso las estimaciones de H se mantienen entorno al valor de 0.5 y las propiedades de persistencia o anti-persistencia que soportan las series son ‘suaves’ y fáciles de confundir con los movimientos Brownianos puros (o paseos aleatorios). Ello hace muy difícil aprovechar, para las series de cierre, esta propiedad estadística.

Este trabajo aporta como novedad el estudio de los valores máximos y mínimos en base diaria. El resultado de la discrepancia hallada entre el exponente que presentan las cuatro series de los históricos, también es una novedad no documentada anteriormente y que sorprende por su ‘universalidad’. En posteriores capítulos veremos las implicaciones que estas discrepancias pueden tener. Después de una minuciosa exploración tanto para las series de índices, como para los valores de las acciones de distintos mercados, se constata que las series que definen los valores extremos alcanzados en una base diaria, presentan una correlación positiva y una persistencia muy marcada. Estos resultados se mantienen al cambiar el estimador y las longitudes de la secuencia utilizada en los algoritmos.

CAPÍTULO 3

CAPÍTULO 3: Autocorrelación de las series O_d , C_d , H_d , L_d y su relación con el exponente de Hurst

3.1. Introducción

En este capítulo analizaremos la autocorrelación de las cuatro series que forman los activos financieros y estudiaremos como varía en función del exponente H que presenta cada serie. Tomamos la función de autocorrelación (FA) como medida de similitud entre valores de la serie.

Para ello mostraremos el correlograma de las cuatro series de precios de algunos históricos, donde comprobaremos que es el primer retardo el que presenta una correspondencia con H . Mediante la exploración dinámica de H y ρ_1 (correlación del primer retardo) veremos gráficamente la conexión entre H y ρ_1 . Finalmente mediante un conjunto de tablas de compactación podremos verificar la persistencia de estos resultados, a lo largo de todos los activos analizados.

3.1.1. Función de Autocorrelación

La función de autocorrelación FA proporciona información sobre como una observación influye en las siguientes, indicando la dependencia estadística entre muestras. Los coeficientes de correlación de los procesos discretos son fácilmente estimables a partir de una de sus realizaciones cuando los procesos analizados son estacionarios. En la práctica utilizamos esta herramienta matemática, aunque los procesos no sean estacionarios en *sentido estricto*. El motivo de utilizar la FA es que nos permite disponer de una herramienta matemática sencilla para caracterizar un momento de segundo orden de cada proceso estocástico disponiendo únicamente de una única realización (observación).

Se dice que un proceso es *estrictamente estacionario* (o *estacionario en sentido estricto*) si la función de densidad de probabilidad conjunta, asociada a m observaciones del proceso, es la misma independientemente del origen de tiempo de las observaciones, con lo cual, en procesos discretos, significa que dicha función no se ve afectada por un

desplazamiento de k posiciones de las muestras. Un proceso es *estacionario en sentido débil* si es estable en media y en autocovarianza.

Es importante, por tanto, destacar que la interpretación de las series temporales a través de los resultados de la autocorrelación se realiza en base a las propiedades de estacionariedad de la serie analizada, puesto que son estas propiedades las que permiten estimar los coeficientes de autocorrelación a partir una sola realización. Ante la relevancia de este hecho y buscando esta propiedad, que no se cumple directamente en las series temporales de precios, en el análisis de autocorrelación no se trabaja directamente sobre los elementos h, l, o y c de las series temporales H, L, O y C del activo financiero sino sobre su primera diferencia. Los elementos de la series pasarán a ser $\{h_t-h_{t-k}\}$, $\{l_t-l_{t-k}\}$, $\{o_t-o_{t-k}\}$ y $\{c_t-c_{t-k}\}$ respectivamente. En este punto se asume que estas nuevas series temporales ya son estacionarias, de forma similar a lo que se asume para las series de retornos diarios aunque las series originales H, L, O y C , como hemos dicho, no lo son [44].

El hecho de trabajar con diferencias, convierte las series de precios en nuevas series con propiedades de estacionariedad al eliminar de ellas la tendencia. Esta técnica para convertir series temporales no estacionarias en estacionarias se comenta en 1.6.2.2. En algunos casos el proceso de diferenciación necesario para obtener una serie estacionaria debe reiterarse, llegándose a aplicar derivadas de segundo y hasta de tercer orden. En el caso de las series de precios, el uso de la primera derivada se utiliza de forma generalizada ya que proporciona una nueva serie de incrementos/decrementos que permite interpretar la serie original en función de éstos e incluso reconstruirla si conocemos el primer elemento de la serie original.

Partimos por tanto de una serie temporal $X_t = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{t-2}, x_{t-1}, x_t, x_{t+1}, \dots\}$ con propiedades de estacionariedad, donde x_1 es la primera observación, o primer término de la serie, x_2 la segunda observación, x_t es la observación actual y x_{t+1} sería el valor de la próxima observación, es decir el valor futuro.

Así, para procesos estacionarios discretos, la FA simple (FAS), va a ser una sucesión de coeficientes de autocorrelación $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots, \rho_k$ tal que ρ_1 nos indica el grado de similitud ente una observación x_t y la siguiente x_{t+1} mientras que ρ_2 indica el grado de similitud ente una observación x_t y la observada dos intervalos temporales después, eso es, x_{t+2} . Así sucesivamente.

De forma general el coeficiente de autocorrelación ρ_k , que mide el grado de similitud entre muestras separadas por un intervalo temporal de k muestras, se calcula a partir de los elementos x_i de la serie temporal X de la siguiente forma:

$$\rho_k = \frac{E[(x_i - \mu)(x_{i+k} - \mu)]}{\sqrt{E[(x_i - \mu)^2]E[(x_{i+k} - \mu)^2]}} \quad (3-1)$$

Siendo $E[X]$ el operador esperanza y μ la media del proceso. En procesos estacionarios tanto la varianza como la media en el instante i es la misma que en el instante $i+k$, de forma que la expresión anterior se simplifica a:

$$\rho_k = \frac{E[(x_i - \mu)(x_{i+k} - \mu)]}{\sigma_x^2} \quad (3-2)$$

Siendo el numerador de (3-2) la autocovarianza en retardo k .

Como venimos comentando, a nivel práctico únicamente disponemos de una realización del proceso y por tanto sólo podemos obtener estimaciones tanto de la media y la varianza, como de los elementos de la autocorrelación del proceso.

La mejor estimación de la media \bar{X} a partir de la serie temporal X de N elementos x_1, x_2, \dots, x_N se obtiene de [44] :

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (3-3)$$

Para la estimación de los coeficientes de autocorrelación existen diferentes opciones [44][41] con distintas propiedades cada una de ellas aunque con resultados prácticos idénticos cuando el número de elementos de la series es grande (como en nuestro caso). El estimador seleccionado para el cálculo del coeficiente de autocorelación en el instante k se calcula partiendo la serie temporal X en dos series X_1 y X_2 , con $t-k$ observaciones cada una, de la siguiente forma:

$$X_1 = x_1, x_2, \dots, x_{t-k}$$

$$X_2 = x_{1+k}, x_{2+k}, \dots, x_t$$

Entonces el estimador del coeficiente de autocorrelación ρ_k se calculará como el cociente de la estimación de la covarianza $Cov_k(X_1, X_2)$ según la expresión (3-4) y el estimador muestral de las desviaciones típicas (sin la corrección de Bessel) de acuerdo con la expresión (3-5) (sólo para σ_{x_1}). Su expresión aparece en (3-6), donde \bar{X}_1 y \bar{X}_2 representan las medias de las series X_1 y X_2 calculadas según (3-3).

$$Cov_k(X_1, X_2) = \frac{\sum_{i=1}^{t-k} (x_i - \bar{X}_1)(x_{i+k} - \bar{X}_2)}{t - k} \quad (3-4)$$

$$\sigma_{x_1} = \sqrt{\frac{1}{t - k} \sum_{i=1}^{t-k} (x_i - \bar{X}_1)^2} \quad (3-5)$$

$$\rho_k = \frac{\sum_{i=1}^{t-k} (x_i - \bar{S}_1)(x_{i+k} - \bar{S}_2)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{t-k} (x_i - \bar{S}_1)^2 \sum_{i=k}^t (x_i - \bar{S}_2)^2}} \quad (3-6)$$

En la literatura existen expresiones, la mayoría de ellas aproximadas, para la varianza de estos estimadores cuando los procesos son normales (gaussianos) a fin de evaluar la calidad de las estimaciones [45]. En este apartado no incluiremos estas expresiones aproximadas para series gaussianas que evalúan la calidad de los estimadores porque las series financieras no son normales tal como y se reportó, por ejemplo, en [14].

En la [Tabla 3-1](#) destacamos tres propiedades básicas de los coeficientes de autocorrelación.

$-1 \leq \rho_i \leq 1$	ρ_i toma valores dentro del rango $[-1,1]$
$\rho_i = \rho_{-i}$	ρ_i y ρ_{-i} son simétricos
$\rho_0 = 1$	Para $k=0$ el coeficiente de autocorrelación es 1

Tabla 3-1: Propiedades básicas del coeficiente de autocorrelación

El coeficiente de autocorrelación ρ_i toma valores dentro del rango $[-1,1]$, que podemos interpretar de la siguiente forma:

- Para valores de ρ_i próximos a 1, tendremos mucha similitud estadística entre observaciones que se encuentran desplazadas i posiciones entre sí.
- Con ρ_i igual a 0, no existe ningún parecido estadístico entre observaciones que se encuentran desplazadas i posiciones entre sí.
- Para valores de ρ_i próximos a -1, tendremos mucha similitud entre observaciones separadas i posiciones entre sí, aunque la similitud presenta signo contrario. En este caso hablamos de correlación negativa.

3.1.2. Correlogramas de series temporales con \mathbf{H} conocido

En este apartado veremos cómo se comporta la autocorrelación de una serie temporal en función de su exponente \mathbf{H} , para ello utilizaremos las series ya mostradas en la [Fig.2-1](#) del apartado 2.1.1. Se trata de series temporales de 500 muestras generadas sintéticamente con un \mathbf{H} conocido de 0.1, 0.5 y 0.9 respectivamente.

En la [Fig.3-1](#) hemos representado los correlogramas de hasta 10 retardos para dichas series, siendo el eje de ordenadas la auto-correlación y el eje de abscisas los retardos, donde hemos señalado con una elipse azul, la autocorrelación del primer desplazamiento o retardo (ρ_1).

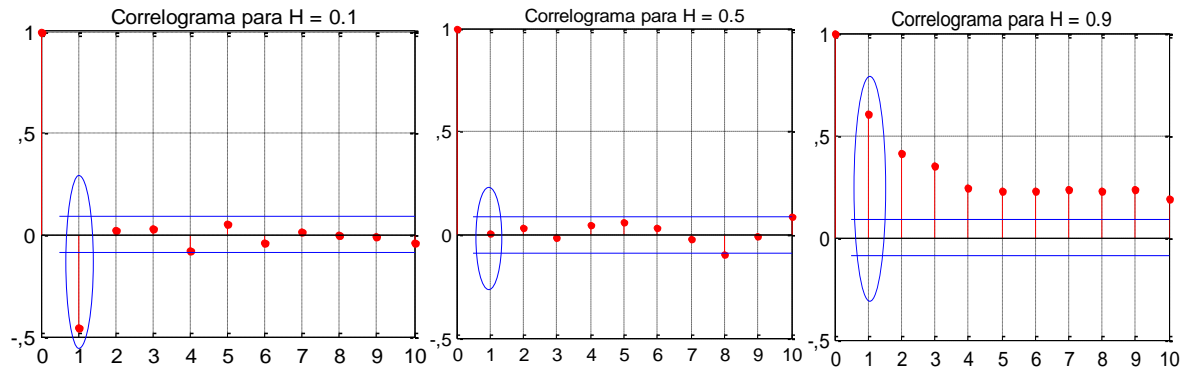


Fig.3-1: Correlogramas para series temporales sintéticas con distinto exponente de Hurst

En la Fig.3-1 observamos que con $k=0$, de acuerdo con las propiedades de la Tabla 3-1, las tres series tienen una autocorrelación de $\rho_0=1$. Sin embargo, con retardos de $k=1$ (señalados con elipse azul en las gráficas de la Fig.3-1) se obtienen valores de ρ_1 que dependen claramente del exponente H de la serie:

- Para un exponente de Hurst de 0.1, típico de series anti-persistentes, el retardo $k=1$ produce una cierta correlación negativa.
- Con un exponente de 0.5, no se obtienen correlaciones significativas a lo largo del correlograma. Es el caso típico del ruido blanco.
- Para un exponente de Hurst de 0.9, característico de series persistentes, se aprecia cierta correlación positiva en todo el correlograma, especialmente para ρ_1 .

Generalizamos estas relaciones observadas empíricamente, entre el exponente H de una serie y su autocorrelación ρ_1 , en forma de reglas de dependencia que representamos en la Tabla 3-2. Donde expresamos que si H tiende a cero, implica que la correlación del primer retardo (ρ_1) tiende a -1. Si H tiende a 0.5, implica que ρ_1 tiende a 0. Si H tiende a 1, implica que ρ_1 tiende a 1. En los apartados siguientes comprobaremos como estas reglas de dependencia entre H y ρ_1 se cumplen sistemáticamente para las series temporales que forman los activos financieros.

Si $H \rightarrow 0$	\Leftrightarrow	$\rho_1 \rightarrow -1$
Si $H \rightarrow 0.5$	\Leftrightarrow	$\rho_1 \rightarrow 0$
Si $H \rightarrow 1$	\Leftrightarrow	$\rho_1 \rightarrow 1$

Tabla 3-2: Relaciones entre H y ρ_1

3.1.3. Representación de correlogramas para las cuatro series temporales de un activo financiero.

Remarcar antes de empezar a trabajar con las series financieras que, por las razones expuestas en el apartado 3.1.1, en todos los experimentos realizados en estos apartados, trabajaremos con la primera diferencia de las series de precios y no con las series de

precios directamente. Por lo que cuando nos referimos a las series temporales financieras estamos hablando de su primera derivada.

En este apartado estudiaremos la posibilidad de extender la generalización realizada en la [Tabla 3-2](#) a las cuatro series temporales de los activos financieros. Para ello en las [Fig.3-2](#) y [Fig.3-3](#) hemos representado, a modo de ejemplo, el correlograma de 12 retardos para las cuatro series que forman los históricos del Banco Santander (SAN) y del IBEX35.

En eje de ordenadas se representa la auto-correlación y en eje de abscisas se representan los retardos. No hemos representado el retardo para $k=0$ ya que siempre será 1, no aporta información e impide mostrar de forma más clara la dimensión de los coeficientes del resto de retardos ($1 \leq k \leq 12$). Para cada retardo se muestran cuatro barras, indicando la auto-correlación que tiene cada una de las cuatro series en dicho retardo. En la leyenda de las figuras se indica que la barra de color rojo representa la autocorrelación ρ de la serie H_t , la barra magenta corresponde a la ρ de la serie L_t , la barra negra representa la ρ de la serie C_t y la de color azul muestra la ρ de la serie O_t . Hemos elegido esta representación porque muestra muy gráficamente la comparación entre las magnitudes de ρ para las cuatro series temporales que forman el histórico del activo.

La [Fig.3-2](#) representa el correlograma de 12 retardos para las cuatro series del histórico del IBEX35. Contrastando estos resultados con los de la [Tabla 3-3](#) se puede observar que para el primer retardo ($K=1$) de las cuatro series, tenemos una clara sincronía entre el valor de ρ_1 y el de H , obedeciendo a las reglas mostradas en la [Tabla 3-2](#). Para el resto de retardos no hemos podido establecer una relación evidente entre el valor de ρ_i y el de H .

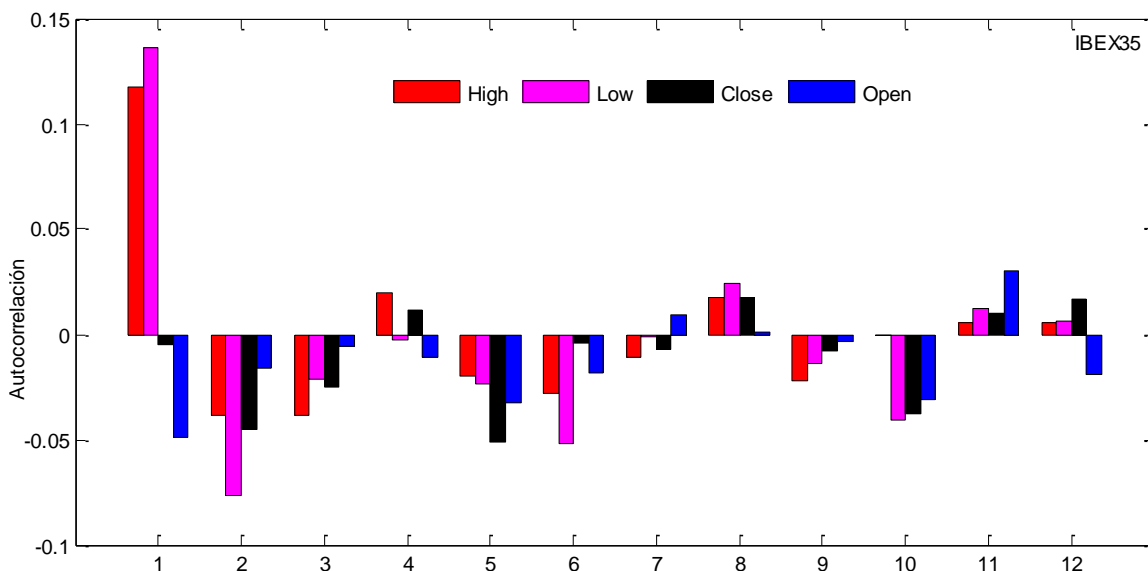


Fig.3-2: Correlograma de doce retardos para las cuatro series del IBEX 35

La [Tabla 3-3](#) muestra los valores de H y ρ_1 para las cuatro series del IBEX35, donde podemos apreciar que para valores de H mayores de 0.5 tenemos valores de ρ_1 mayores de cero (caso de L_d y H_d). Con valores de H próximos a 0.5, no tenemos correlación en ρ_1 (caso de C_d). Para un H un poco menor de 0.5 (caso de θ_d), ρ_1 presenta cierta correlación negativa. Resultados que corresponden totalmente con las relaciones entre H y ρ_1 establecidas en la [Tabla 3-2](#).

IBEX35	H_d	L_d	C_d	θ_d
H	0.66	0.70	0.52	0.44
ρ_1	0.12	0.14	0.00	-0.05

Tabla 3-3: Comparación entre H y ρ_1 para las cuatro series del IBEX35

Realizando el mismo estudio para el histórico del SAN, en la [Fig.3-3](#) se representa el correlograma de doce retardos para las cuatro series de precios que, contrastados con los resultados de la [Tabla 3-4](#), se puede constatar que existe una clara dependencia entre el exponente H , que presenta cada una de las cuatro series y su correlación en el primer retardo ρ_1 . Para el resto de retardos no se puede establecer una relación evidente entre el valor de ρ_i y el de H .

SAN	H_d	L_d	C_d	θ_d
H	0.65	0.68	0.51	0.43
ρ_1	0.10	0.11	-0.01	-0.09

Tabla 3-4: Comparación entre H y ρ_1 para las cuatro series del SAN

Estos resultados concuerdan con las reglas de dependencia entre H y ρ_1 representadas en la [Tabla 3-2](#). En dicha tabla generalizábamos diciendo que si el exponente H tiende a 1 ρ_1 tiende a 1. Si H tiende a 0.5, ρ_1 tiende a 0 y si H se aproxima a 0, ρ_1 tiende a -1.

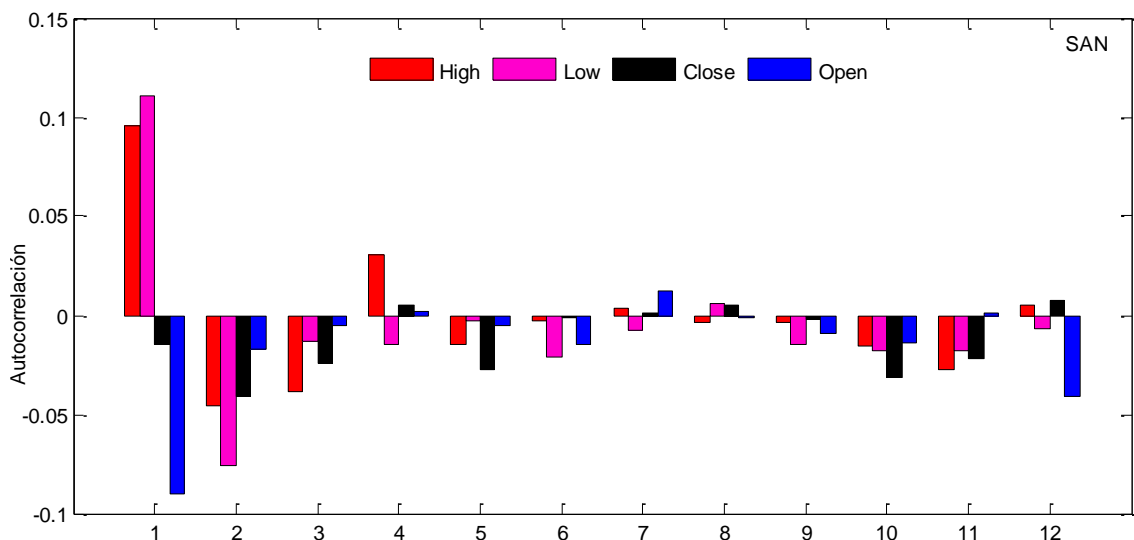


Fig.3-3: Correlograma de doce retardos para las cuatro series de SAN

Hemos realizado este análisis para varios activos e índices tanto nacionales como internacionales y con correlogramas de hasta cuarenta retardos, pudiendo confirmar que sistemáticamente se repiten los resultados obtenidos para el IBEX y el SAN. Por lo que podemos afirmar que existe una clara relación entre la ρ_1 de cada una de las cuatro series que forman el histórico de un activo y su H . No hemos podido establecer una relación clara entre cualquier otra ρ_i y el H de las series temporales financieras (siendo i el retardo o desplazamiento correspondiente a $K=i$).

Para finalizar, podemos extrapolar las reglas expresadas en la [Tabla 3-2](#) a las cuatro series temporales que forman el histórico de un activo financiero, diciendo que existe una correspondencia entre la correlación del primer retardo ρ_1 , de cada una de las cuatro series y su exponente H . Cumpliéndose para las series financieras, que si su H tiende a 1, su ρ_1 tiende a 1, si su H tiende a 0.5, su ρ_1 tiende a 0 y si su H se aproxima a 0, su ρ_1 se aproximara a -1.

3.2. Relación empírica entre el exponente de las series financieras y su autocorrelación

Sabemos que en un proceso con tendencia, el correlograma disminuye muy lentamente y que en un proceso estacional, el correlograma muestra la misma periodicidad que el proceso. Sin embargo, en este apartado mostramos los resultados de varios experimentos realizados sobre gran cantidad de activos, con el objetivo de comprobar si, como norma general, se cumplen las reglas de la [Tabla 3-2](#), para la relación entre H y ρ_1 con todas las series de los activos financieros. También veremos que una consecuencia de esta dependencia entre ρ_1 y H es que, como norma general, la ρ_1 de las series L_t y H_t siempre presentan correlación positiva, mientras que la serie O_t suele presentar cierta correlación negativa, y la C_t suele tener una correlación con valores próximos a cero.

Como ya comentábamos en el capítulo anterior, el H de las series L_t y H_t se mantiene en niveles superiores a 0.6, mientras la serie C_t suele presentar niveles de H próximos a 0.5. En este capítulo, y relacionado con la anterior observación, hemos comprobado que, por norma general, las series L_t y H_t siempre presentan correlación ρ_1 positiva, mientras que la serie O_t suele presentar cierta correlación negativa, y la C_t suele tener una correlación con valores próximos a cero.

Estas observaciones tienen relevantes implicaciones a la hora de predecir el comportamiento de un activo financiero, ya que como veremos en el capítulo siguiente, la información que aportan las cuatro series del activo es muy diferente: siendo relevante la aportada por las series L_t y H_t , para predecir el comportamiento de un activo a corto plazo, mientras que es irrelevante la información aportada por las O_t y C_t . Siendo la serie C_t la que menos información aporta, cuando curiosamente, es la única que se publica en la mayoría

de medios no especializados y la que suele utilizar el pequeño inversor para tomar sus decisiones.

3.2.1. Relación gráfica entre Hurst y correlación ρ_1 de los activos

En las siguientes figuras mostramos los resultados de aplicar el método de estimación dinámica mediante ventanas (descrito en 2.4) para el cálculo de H y ρ_1 de varios activos. Esto nos permitirá comparar gráficamente la evolución de ambos valores a lo largo de la exploración, con el objetivo de corroborar que los resultados del apartado anterior se cumplen para la gran mayoría de activos e índices. Hemos realizado gran cantidad de experimentos en este sentido, aunque solamente hemos representado, por razones de espacio, unas pocas exploraciones representativas del resto.

Las figuras están formadas por dos gráficas, la de la izquierda muestra la exploración dinámica de H con un determinado tamaño de ventana, para un activo concreto. La de la derecha representa la exploración dinámica de ρ_1 para las series del mismo activo con el mismo tamaño de ventana. En la leyenda se indica que la línea roja muestra los resultados para la serie H_d , la magenta para la serie L_d , la negra para la C_d y la azul para la O_d .

La Fig.3-4 muestra los resultados de los 1774 intervalos o ventanas analizadas en la exploración dinámica de ρ_1 y H para Ferrovial S.A. (FER), con ventanas de 960 muestras. Se puede apreciar claramente la relación entre ρ_1 y H , y se evidencia la discrepancia que presentan las cuatro series en la autocorrelación del primer retado, ρ_1 .

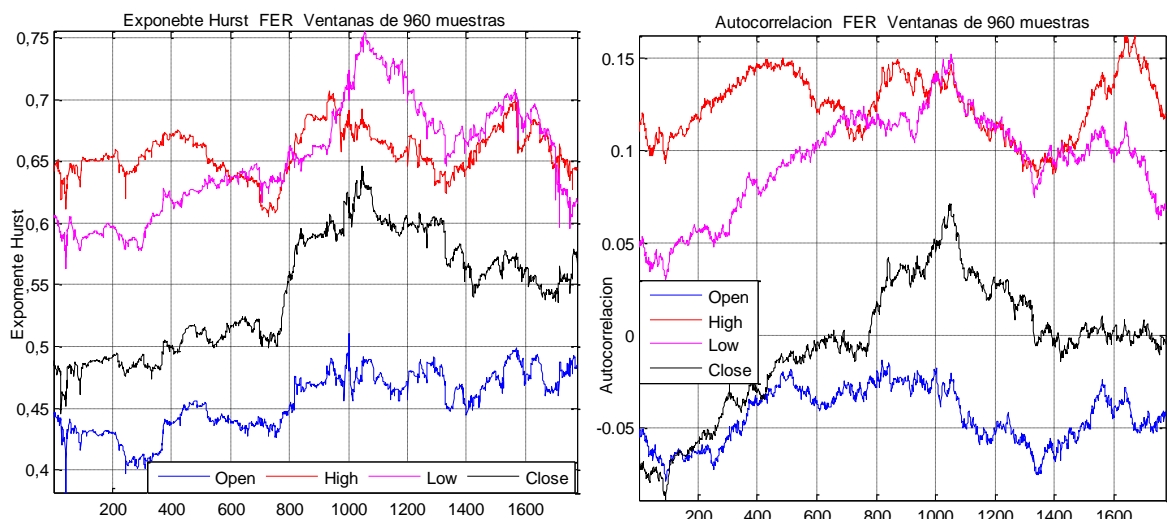


Fig.3-4: Comparación entre la exploración dinámica de H y la exploración dinámica de ρ_1 para FER con ventanas de 960 muestras

La Fig.3-5 muestra las mismas exploraciones para FER que la figura anterior, a diferencia que en este caso, el tamaño de ventana es de 1440 muestras. Podemos hacer

las mismas observaciones que en la Fig.3-4, Solo que en este caso se aprecian unas formas más suavizadas en las gráficas, debido al tamaño de ventana mucho mayor.

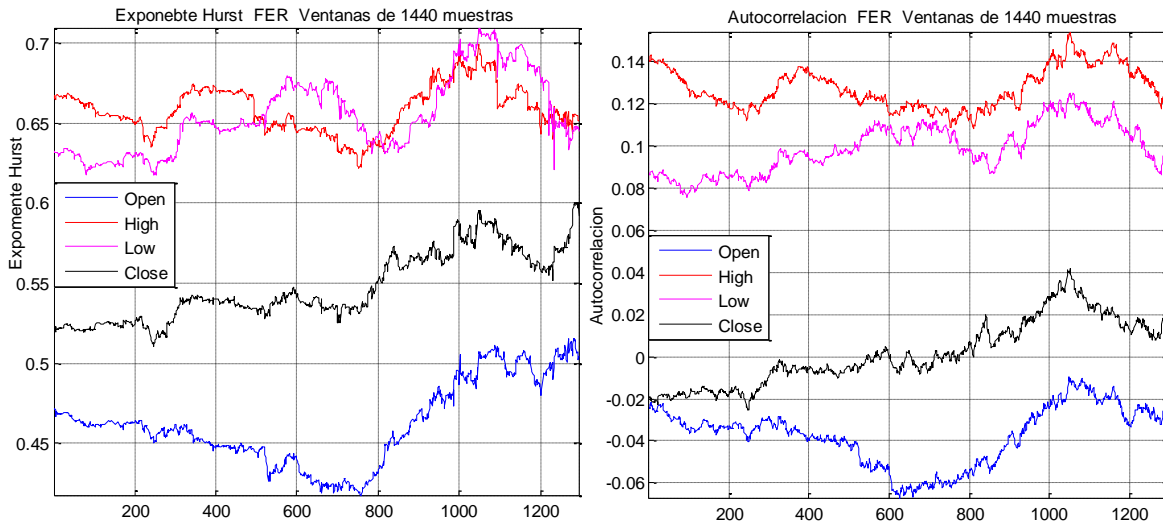


Fig.3-5: Comparación entre la exploración dinámica de H y la exploración dinámica de ρ_1 para FER con ventanas de 1440 muestras

La Fig.3-6 representa los resultados de los 3040 intervalos analizados en la exploración dinámica de H (gráfica de la izquierda) y de ρ_1 (gráfica de la derecha), para el histórico de Indra Sistemas (IDR), con ventanas de 960 muestras. Como en el caso anterior se observa una clara dependencia de ρ_1 con H , presentando las series L_d y H_d niveles de ρ_1 positivos y mayores que los de O_d y C_d , que suelen tener un ρ_1 negativo o próximo a cero.

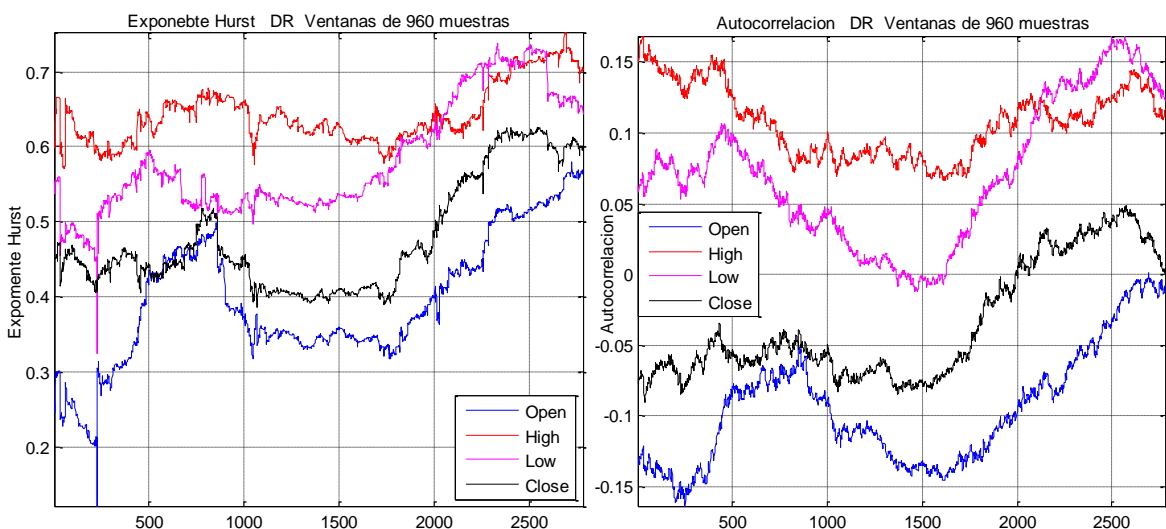


Fig.3-6: Comparación entre la exploración dinámica de H y la exploración dinámica de ρ_1 para IDR con ventanas de 960 muestras

La siguiente [Fig.3-7](#) representa ambas exploraciones para el histórico del Banco Santander (SAN) con ventanas de 1440 muestras, con resultados que están en línea con los anteriores, siendo ρ_1 más elevada para L_d y H_d que para las series O_d y C_d , que rondan valores cercanos a cero, alternando resultados ligeramente positivos y resultados ligeramente negativos.

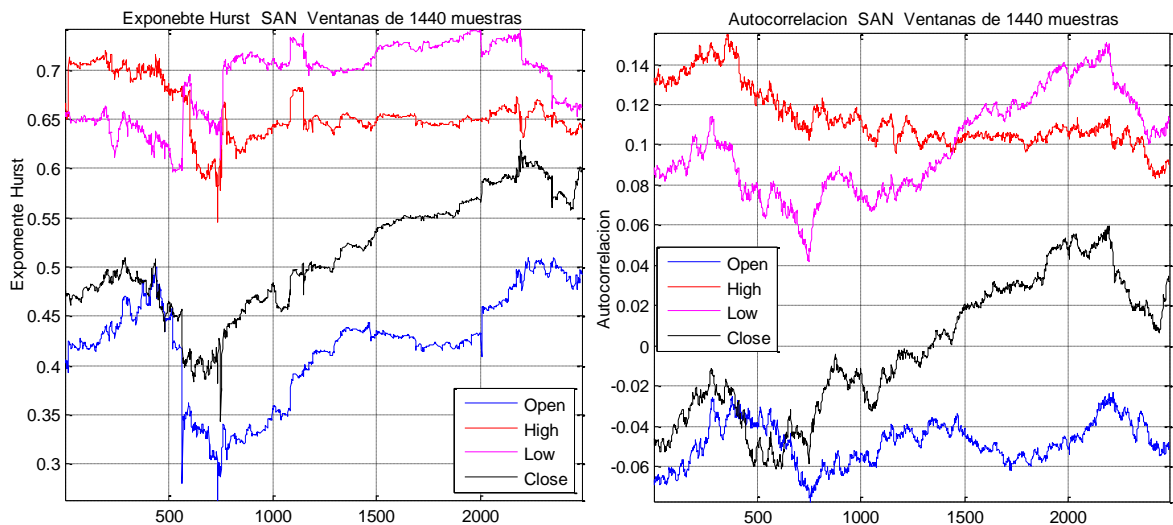


Fig.3-7: Comparación entre la exploración dinámica de H y la exploración dinámica de ρ_1 para SAN con ventanas de 1440 muestras

En la [Fig.3-8](#), se representa el estudio realizado para el histórico de Red Eléctrica de España (REE) que está formado por 3885 observaciones. En la gráfica de la izquierda se muestran los resultados de las 2485 estimaciones de H , para cada una de las series de retornos, con ventanas de 1440 muestras. Mientras que la gráfica de la derecha muestra los 2485 ρ_1 calculados para cada una de las cuatro series.

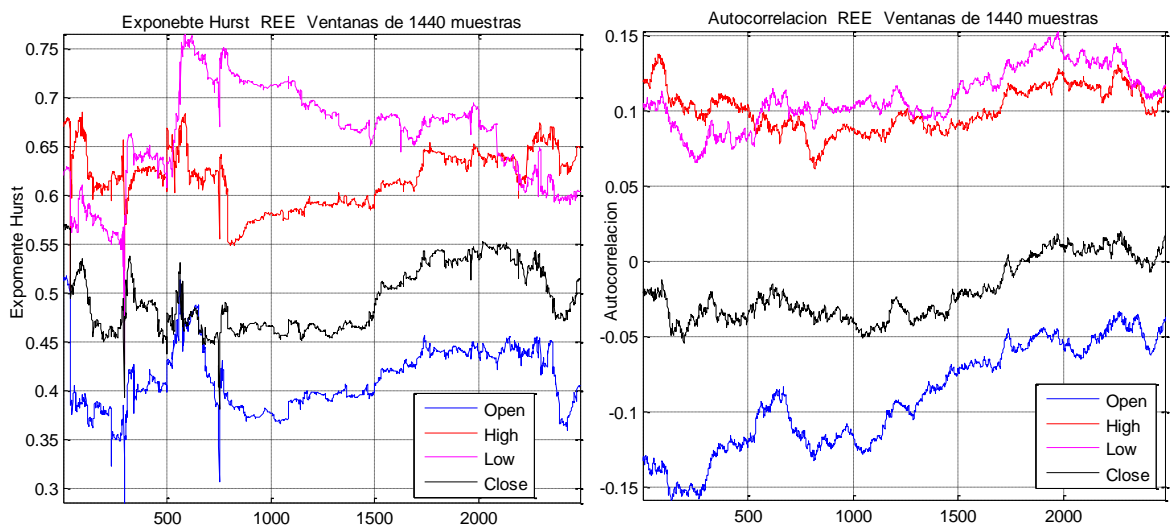


Fig.3-8: Comparación entre la exploración dinámica de H y la exploración dinámica de ρ_1 para REE con ventanas de 1440 muestras

La figura siguiente [Fig.3-9](#) representa el estudio de las 3925 muestras del histórico de Telefónica (TEF), explorado con ventanas de 960 muestras. Como siempre, la gráfica izquierda representa las 2965 estimaciones realizadas en la exploración de \mathbf{H} y la de la derecha las de ρ_1 .

Los resultados de la exploración de este histórico también cumplen con la norma general que venimos postulando, donde los valores de \mathbf{H} suelen estar por encima de 0.6 para las series L_t y H_t , próximos a 0.5 para la serie de los cierres (C_t) y con valores que suelen estar por debajo de 0.5 para la serie θ_t . Los valores obtenidos para ρ_1 también están en sintonía con la norma propuesta, presentando siempre valores mayores de cero en las series L_t y H_t , valores próximos a cero la serie C_t y cierta correlación negativa de ρ_1 para la serie θ_t .

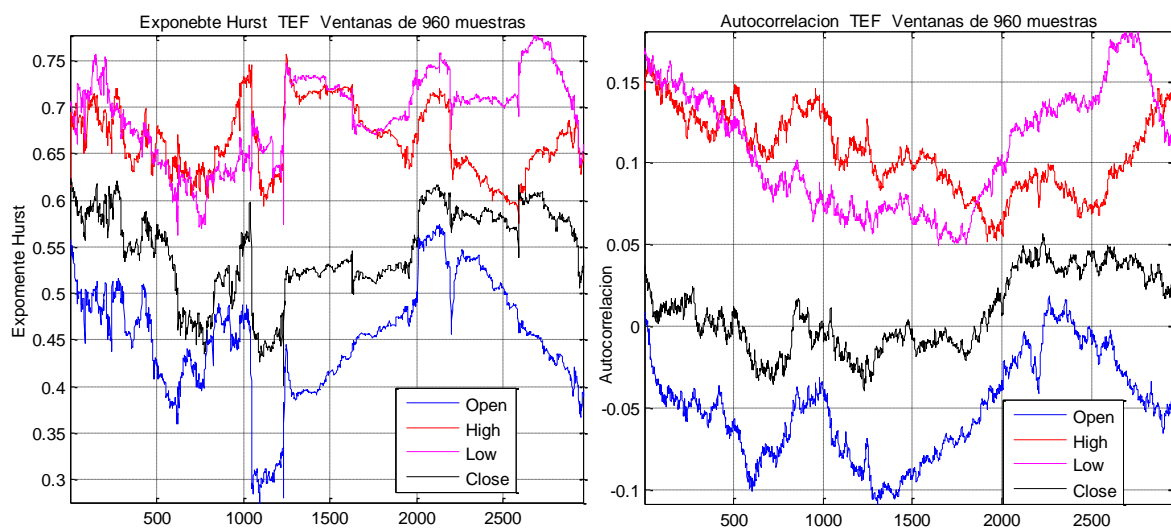


Fig.3-9: Comparación entre la exploración dinámica de \mathbf{H} y la exploración dinámica de ρ_1 para TEF con ventanas de 960 muestras

La [Fig.3-10](#) corresponde a la exploración de \mathbf{H} y ρ_1 , con ventanas de 960 muestras, para el histórico de la constructora Vinci (DG). Se han realizado 3000 cálculos de \mathbf{H} y ρ_1 para cada una de las cuatro series que forman el histórico de 3960 muestras. Se puede observar gráficamente que se cumple la norma que establecimos en la [Tabla 3-2](#).

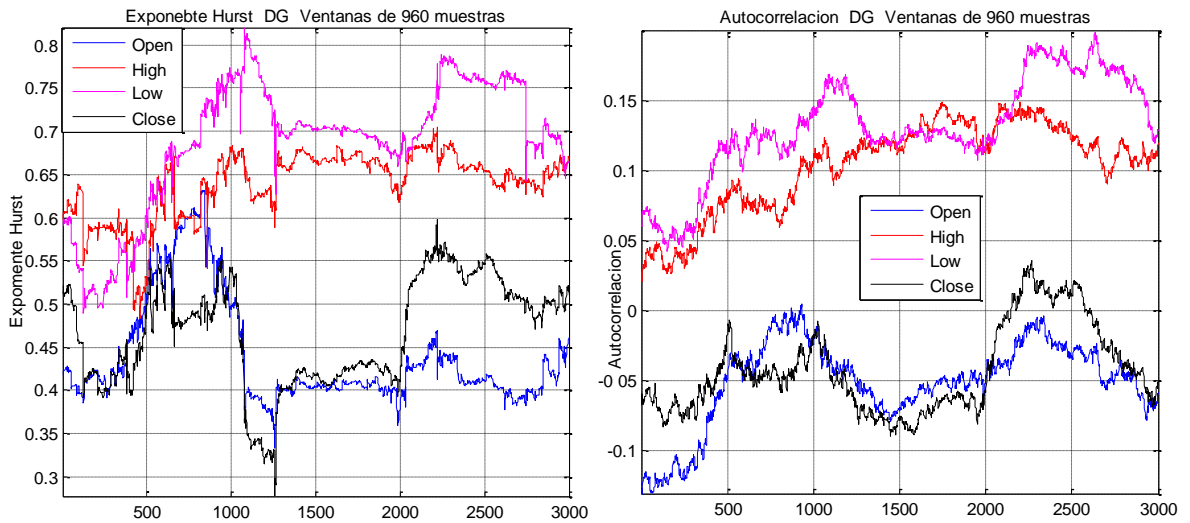


Fig.3-10: Comparación entre la exploración dinámica de H y la exploración dinámica de ρ_1 para DG con ventanas de 960 muestras

Con las Fig.3-11 y Fig.3-12 mostramos la exploración de L'Oreal (LR) y Technip (TEC) respectivamente. Resultados que confirman una vez más la norma que venimos promulgando a lo largo del capítulo sobre las discrepancias en los valores de H y ρ_1 que presentan las cuatro series de retornos diarios.

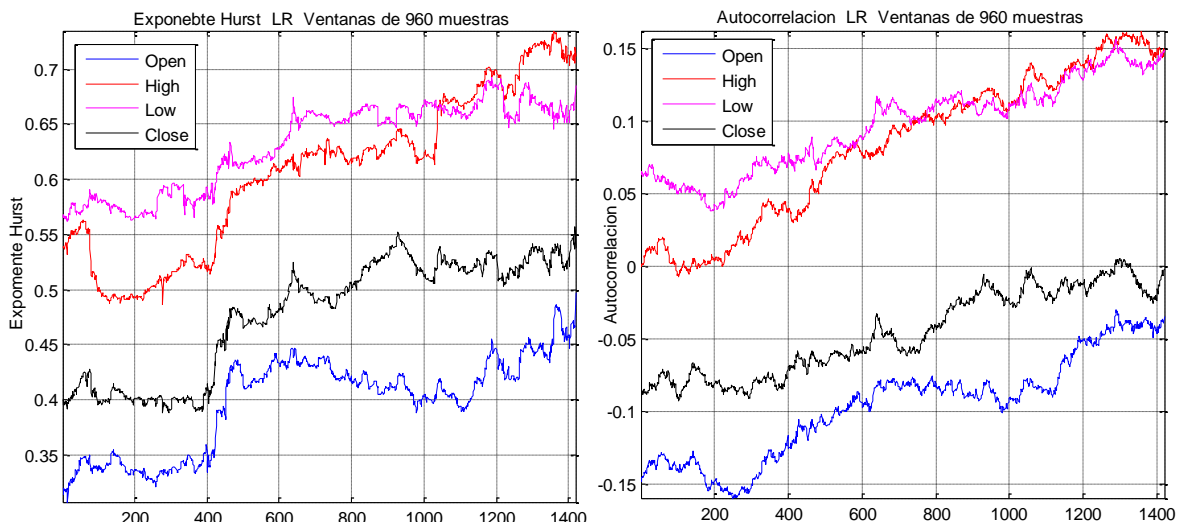


Fig.3-11: Comparación entre la exploración dinámica de H y la exploración dinámica de ρ_1 para LR con ventanas de 960 muestras

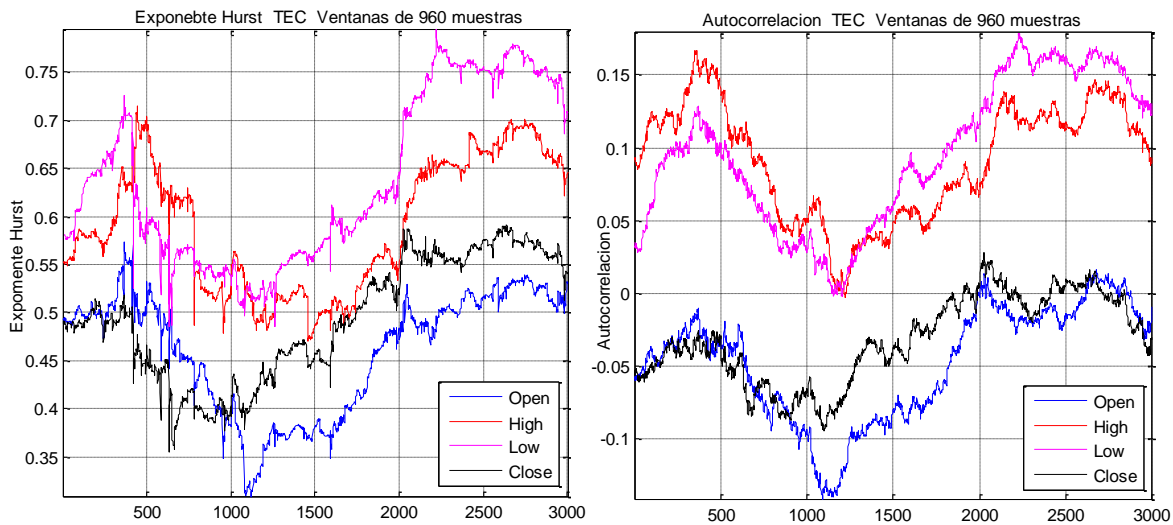


Fig.3-12: Comparación entre la exploración dinámica de H y la exploración dinámica de ρ_1 para TEC con ventanas de 960 muestras

Las gráficas de comparación, mostradas en el lote de figuras de este apartado, hablan por sí solas confirmando gráficamente las relaciones entre H y ρ_1 que presentan las series financieras y que avanzábamos en la [Tabla 3-2](#).

3.2.2. Correlograma de ocho retardos para una ventana concreta de la exploración.

En este apartado mostramos un par de ejemplos de cómo sería el correlograma de un intervalo o ventana concreta, correspondiente a la exploración dinámica de un activo determinado. Con esto mostraremos la posible relación de cada ρ_i del correlograma, con el exponente H estimado para esa ventana concreta.

En la gráfica izquierda de la [Fig.3-13](#) hemos representado la estimación dinámica de H para el histórico del SAN (*Banco de Santander*) con ventanas de 800 sesiones. La línea verde representa a la ventana o intervalo de estimación número 1616, que va desde la fecha 20/03/2006 al 14/04/2009. Se ha elegido esta ventana por la clara separación que presentan las estimaciones de H en las cuatro series, donde el color azul corresponde a las estimaciones dinámicas de O_d , el negro a las de C_d , el rojo a las de H_d y el magenta corresponde a las de L_d .

La gráfica de la derecha en la [Fig.3-13](#), representa el correlograma de ocho desplazamientos para las 800 muestras correspondientes a la ventana de exploración número 1616, señalada en la gráfica de la izquierda con una línea vertical verde. Los colores de las barras se corresponden con los de las gráficas de las estimaciones dinámicas, según indicamos anteriormente.

Con el correlograma de la derecha podemos observar que el ρ_1 de las 800 muestras correspondientes a la exploración número 1616, presenta un claro acoplamiento con el valor que toma H en esa ventana, totalmente en sintonía con la norma que venimos corroborando en los experimentos anteriores.

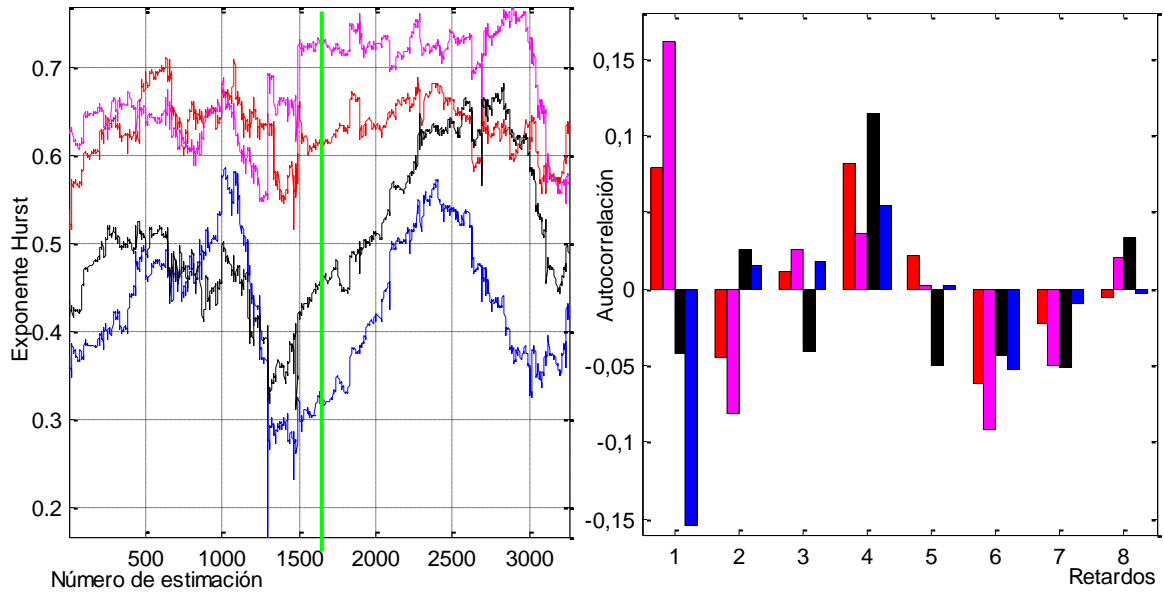


Fig.3-13: Relación entre H y ρ_1 en la ventana de exploración número 1616 del SAN

Como en el caso anterior, la gráfica de la izquierda, en la Fig.3-14, representa la exploración dinámica de H para IDR (Indra Sistemas) con ventanas de 800 muestras. La línea verde señala la ventana de exploración número 1422. La gráfica de la derecha representa el correlograma de ocho retardos para las 800 muestras correspondientes a la ventana número 1422, señalada en la gráfica de la izquierda con la línea verde vertical.

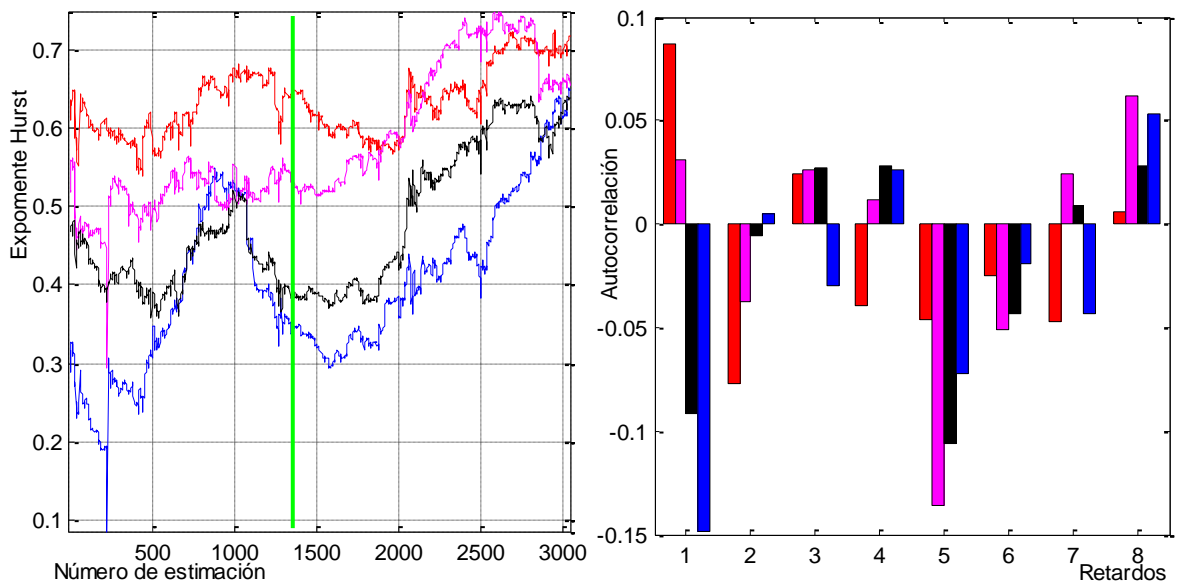


Fig.3-14: Relación entre H y ρ_1 en la ventana de exploración número 1422 para IDR

Una vez más podemos evidenciar la clara relación entre la estimación de \mathbf{H} para esta ventana y la ρ_1 de las 800 muestras pertenecientes a dicha ventana. Lo relevante de estos resultados es que, como hemos podido comprobar, se cumplen para todas las ventanas de la exploración, se cumplen para cualquier tamaño de ventana y se cumplen para todos los activos que hemos estudiado.

A modo de ejemplo en el correlograma de la [Fig.3-14](#) observamos que, en el retardo $k=5$, ρ_5 presenta una correlación negativa de cierta magnitud para las cuatro series. Pero esta ρ_5 no tiene ninguna relevancia y no la podemos utilizar en el desarrollo de un método de predicción ya que, a diferencia de la ρ_1 :

- Primero. Las correlaciones ρ_5 , de las cuatro series, no presentan concordancia con los valores de \mathbf{H} .
- Segundo. Estas magnitudes de ρ_5 no se repiten en el retardo $k=5$ del resto de ventanas de la exploración y mucho menos para otros activos.

De manera que, como ya hemos afirmado anteriormente, solo hemos podido encontrar una relación relevante entre \mathbf{H} y la autocorrelación de primer retardo, ρ_1 . No habiendo podido encontrar relación entre \mathbf{H} y cualquier otro ρ_i que tuviese relevancia para nuestro estudio de las series financieras. Con lo que podemos concluir diciendo que solo el retardo $k=1$ tiene relevancia para nuestros propósitos debido a las siguientes razones:

- En primer lugar: por la vinculación clara que hemos podido establecer entre ρ_1 y \mathbf{H} , presentando, como norma general, las series L_t y H_t correlación positiva, la serie C_t sin correlación y la O_t cierta correlación negativa.
- En segundo lugar: porque estos resultados se repiten para todos los intervalos o ventanas de la exploración, para exploraciones con cualquier tamaño de ventana y para todos los activos estudiados.

3.3. Tablas de ρ_1 de varios activos nacionales e internacionales.

Como resultaría imposible la representación gráfica de tantos correlogramas, mostramos unas tablas con el *ticker* del activo y la autocorrelación correspondiente al primer desplazamiento, ρ_1 , de cada una de las cuatro series (L_t, O_t, C_t, H_t) que componen el activo. Estas tablas no muestran una exploración dinámica como las gráficas anteriores, sino que muestran las ρ_1 de las cuatro series del histórico completas. La primera columna

de la izquierda es el *ticker* y las siguientes columnas representan el valor ρ_1 para cada una de las cuatro series. La última fila muestra la media de cada una de las columnas, es decir, es la media de los ρ_1 de las series H_d de todos los componentes del índice correspondiente, y así para las series L_d, O_d, C_d .

3.3.1. Tablas de ρ_1 para los componentes del IBEX y del DAX.

En este subapartado mostramos las *Tabla 3-5* y la *Tabla 3-6* de compactación de resultados para la autocorrelación correspondiente al primer desplazamiento, ρ_1 , de las cuatro series de precios para los componentes de los índices de *Alemania DAX (^GDAXI)* y *España (^IBEX)*.

ρ_1 para los componentes IBEX35				
<i>Ticker</i>	H_d	L_d	C_d	O_d
ABE	0.06	0.06	-0.01	-0.06
ACS	0.09	0.09	0.03	-0.05
ACX	0.1	0.05	-0.01	-0.09
BBVA	0.12	0.14	0.05	-0.01
BKT	0.1	0.13	0.04	-0.04
CABK	0.04	0.07	-0.01	-0.08
ELE	0.04	0.06	0.03	-0.01
ENG	0.1	0.05	0	-0.08
FCC	0.12	0.11	0	-0.08
FER	0.11	0.08	0.01	-0.04
GAM	-0.08	0.04	0.01	-0.01
GAS	0.04	0.03	-0.03	-0.06
GRF	0.07	0.06	-0.02	-0.04
IBE	0.09	0.11	0.01	-0.08
IDR	0.09	0.06	-0.02	-0.1
ITX	0.01	0.02	-0.01	-0.01
MAP	0.09	0.07	-0.02	-0.05
MTS	0.12	0.12	0.01	-0.1
OHL	0.12	0.1	0.07	-0.03
POP	0.05	0.05	0.01	-0.03
REE	0.1	0.09	-0.01	-0.09
REP	0.11	0.13	0.03	-0.04
SAB	0.08	0.03	0.05	-0.04
SAN	0.1	0.11	-0.01	-0.09
SCYR	0.09	0.13	0	-0.09
TEF	0.13	0.14	0.05	0
TL5	0.13	0.07	0.02	-0.03
TRE	0.05	0.04	-0.02	-0.12
Media	0.11	0.10	0.01	-0.04

Tabla 3-5: Coeficiente de autocorrelación ρ_1 para componentes del IBEX35

ρ_1 para los componentes DAX				
<i>Ticker</i>	H_d	L_d	C_d	O_d
ADS	0.13	0.12	0.03	-0.01
ALV	0.11	0.10	0.01	-0.04
BAS	0.08	0.09	-0.03	-0.05
BAYN	0.09	0.10	-0.06	-0.07
BEI	0.02	0.04	-0.07	-0.11
BMW	0.11	0.10	0.01	-0.02
CBK	0.15	0.11	0.03	-0.02
DAI	0.12	0.10	0.02	-0.01
DB1	0.08	0.10	-0.00	-0.01
DBK	0.09	0.08	0.01	-0.03
DPW	0.12	0.12	-0.01	-0.03
DTE	0.12	0.12	-0.02	-0.04
EOAN	0.11	0.12	-0.00	-0.04
FME	0.07	0.05	-0.06	-0.11
FRE	0.08	0.06	-0.02	-0.06
HEI	0.09	0.07	-0.03	-0.03
HEN3	0.09	0.09	-0.02	-0.05
IFX	0.09	0.09	0.03	-0.01
LHA	0.09	0.09	0.01	-0.01
LIN	0.07	0.08	-0.06	-0.09
LXS	0.11	0.10	0.01	-0.00
MRK	0.06	0.06	-0.04	-0.06
MUV2	0.10	0.10	-0.00	-0.05
RWE	0.14	0.14	0.02	-0.02
SAP	0.09	0.06	0.00	-0.04
SDF	0.10	0.11	0.01	0.00
SIE	0.11	0.11	-0.00	-0.01
TKA	0.13	0.12	0.00	0.00
VOW3	0.15	0.12	0.06	0.01
Media	0.10	0.09	-0.01	-0.03

Tabla 3-6: Coeficiente de autocorrelación ρ_1 para componentes del DAX

3.3.2. Tablas de ρ_1 para los componentes del CAC40 y del DJI.

En este subapartado mostramos la *Tabla 3-7* y la *Tabla 3-8* de compactación de resultados para la autocorrelación correspondiente al primer desplazamiento, ρ_1 , de las cuatro series de precios para los componentes de los índices de *Francia CAC 40 (^FCHI)* y de *Estados Unidos, Dow Jones Industrial Average (^DJI)*.

ρ_1 para los componentes CAC40				
Ticker	H_d	L_d	C_d	O_d
AC	0.09	0.13	0.02	0.00
ACA	0.10	0.11	-0.01	-0.03
AIR	0.14	0.11	0.01	-0.03
ALO	0.12	0.13	-0.02	-0.05
ALU	0.12	0.09	0.05	-0.00
BN	0.06	0.05	-0.06	-0.12
BNP	0.09	0.10	-0.00	-0.06
CA	0.09	0.10	-0.03	-0.04
CAP	0.13	0.11	0.02	0.01
CS	0.10	0.11	0.02	-0.01
DG	0.08	0.10	-0.04	-0.06
EDF	0.16	0.16	0.05	-0.01
EI	0.06	0.06	-0.10	-0.12
EN	0.12	0.14	-0.02	-0.01
FP	0.07	0.08	-0.03	-0.06
GLE	0.11	0.10	0.05	-0.02
GSZ	0.11	0.11	-0.03	-0.07
KER	0.15	0.13	0.03	-0.00
LG	0.11	0.12	-0.01	-0.03
LR	0.08	0.11	-0.04	-0.09
MC	0.09	0.09	-0.02	-0.02
ML	0.12	0.11	0.01	-0.03
MT	0.15	0.14	0.04	0.00
OR	0.05	0.05	-0.10	-0.12
ORA	0.12	0.13	0.01	-0.02
PUB	0.09	0.12	0.01	-0.02
RI	0.08	0.08	-0.08	-0.09
RNO	0.11	0.14	0.04	-0.02
SAF	0.10	0.14	-0.00	-0.03
SAN	0.08	0.07	-0.07	-0.10
SGO	0.10	0.12	-0.03	-0.05
SU	0.09	0.09	-0.05	-0.06
TEC	0.06	0.07	-0.04	-0.05
UG	0.12	0.12	0.02	-0.04
UL	0.07	0.11	-0.02	-0.07
VIE	0.15	0.12	0.02	-0.04
VIV	0.07	0.10	-0.01	-0.04
Media	0.10	0.11	-0.01	-0.04

Tabla 3-7: Coeficiente de autocorrelación ρ_1 para componentes del CAC40

ρ_1 para los componentes DJI				
Ticker	H_d	L_d	C_d	O_d
AXP	0.10	0.10	-0.05	-0.03
BA	0.10	0.11	0.00	0.04
CAT	0.13	0.12	0.03	0.07
CSCO	0.10	0.11	-0.03	-0.06
CVX	0.13	0.11	-0.02	-0.01
DD	0.09	0.10	-0.01	0.03
DIS	0.10	0.11	-0.01	0.04
GE	0.08	0.09	-0.01	-0.03
GS	0.10	0.15	-0.03	-0.05
HD	0.11	0.13	-0.00	-0.00
IBM	0.11	0.11	-0.02	-0.03
INTC	0.14	0.13	-0.01	-0.01
JNJ	0.09	0.09	-0.02	-0.06
JPM	0.09	0.11	-0.02	-0.03
KO	0.10	0.11	-0.02	0.01
MCD	0.09	0.07	-0.02	-0.04
MMM	0.07	0.08	-0.03	-0.05
MRK	0.11	0.10	0.01	-0.02
MSFT	0.12	0.11	-0.04	-0.03
NKE	0.07	0.08	-0.00	0.00
PFE	0.10	0.10	-0.02	-0.04
PG	0.09	0.09	-0.03	-0.04
T	0.12	0.11	-0.02	-0.03
TRV	0.09	0.08	-0.04	-0.06
UNH	0.12	0.09	-0.01	-0.02
UTX	0.09	0.09	-0.02	-0.01
V	0.04	0.07	-0.10	-0.06
VZ	0.12	0.10	-0.04	-0.02
WMT	0.09	0.09	-0.03	-0.04
XOM	0.08	0.08	-0.07	-0.05
Media	0.10	0.10	-0.02	-0.02

Tabla 3-8: Coeficiente de autocorrelación ρ_1 para componentes del DJI

3.3.3. Tablas de ρ_1 para los índices más representativos de Europa y EEUU

En la [Tabla 3-9](#) mostramos los resultados de ρ_1 para una muestra de índices de mercados de acciones de países europeos. Los índices analizados son: de Francia CAC 40 (^FCHI), Alemania DAX (^GDAXI), Reino Unido (^FTSE 100) y España (^IBEX).

La [Tabla 3-10](#) representa los resultados de ρ_1 para cuatro de los índices más representativos de Estados Unidos: Dow Jones Industrial Average (^DJI), NASDAQ Composite (^IXIC), Nasdaq 100 (^NDX) y S&P 500 (^GSPC).

Índices Europa				
Ticker	H_d	L_d	C_d	θ_d
^FCHI	0.09	0.11	-0.02	-0.06
^GDAXI	0.10	0.10	-0.00	0.01
^FTSE	0.13	0.12	0.00	-0.01
^IBEX	0.13	0.12	-0.00	-0.03
Media	0.11	0.11	-0.01	-0.02

Tabla 3-9: Coeficiente de autocorrelación ρ_1 para algunos índices europeos

Índices EEUU				
Ticker	H_d	L_d	C_d	θ_d
^DJI	0.14	0.17	-0.04	-0.04
^IXIC	0.19	0.17	0.05	0.04
^NDX	0.15	0.15	-0.00	-0.01
^GSPC	0.15	0.16	-0.03	-0.01
Media	0.16	0.16	-0.01	-0.01

Tabla 3-10: Coeficiente de autocorrelación ρ_1 para algunos índices de EEUU

En las tablas anteriores se aprecia la clara discrepancia en los valores de ρ_1 de cada una de las series de precios. Siendo positivo en las series L_d y H_d , con valores muy próximos a cero en la serie C_d , y finalmente, la serie θ_d , también con valores próximos a cero, aunque suele tener una ligera anticorrelación. Lo significativo de estos resultados es que se repiten sistemáticamente, para las cuatro series de retornos diarios, en todos los activos analizados.

3.4. Tablas para la exploración dinámica de ρ_1 para algunos índices europeos y de EEUU

Se exponen aquí los resultados obtenidos con la exploración dinámica de ρ_1 , con diferentes tamaños de intervalo o ventana, para algunos índices europeos como: el CAC 40 de Francia, el DAX de Alemania, el FTSE 100 de Londres y el IBEX35 de Madrid. Así como para los índices de EEUU: Dow Jones Industrial Average, NASDAQ Composite, Nasdaq 100 y S&P 500.

Las claves para la correcta interpretación de las tablas de exploración dinámica con ρ_1 , se muestran en [Tabla 3-11](#) donde, cada fila de esta tabla, describe el contenido de las columnas que forman las tablas de exploración.

Columna	Descripción
<i>Ticker</i>	Columna con los <i>tickers</i> de los activos analizados
<i>nv</i>	Número de ventanas analizadas a lo largo del histórico, según relación (2-12)
\bar{H}_d	Media de las autocorrelaciones ρ_1 de todas las ventanas analizadas para la serie H_d
\bar{L}_d	Media de las autocorrelaciones ρ_1 de todas las ventanas analizadas para la serie L_d
\bar{C}_d	Media de las autocorrelaciones ρ_1 de todas las ventanas analizadas para la serie C_d
$\bar{\theta}_d$	Media de las autocorrelaciones ρ_1 de todas las ventanas analizadas para la serie θ_d
$H_d > 0.1$	Porcentaje de ventanas analizadas en las que la serie H_d tiene un ρ_1 mayor de 0.1
$L_d > 0.1$	Porcentaje de ventanas analizadas, en las que la serie L_d tiene un ρ_1 mayor de 0.1
$C_d > 0.1$	% de ventanas analizadas, en las que la serie C_d tiene un ρ_1 mayor de 0.1
$\theta_d > 0.1$	% de ventanas analizadas, en las que la serie θ_d tiene un ρ_1 mayor de 0.1
$H_d >$	% de ventanas analizadas en las que H_d tiene un ρ_1 mayor que las otras tres series.
$L_d >$	% de ventanas analizadas en las que L_d tiene un ρ_1 mayor que las otras tres series.
$C_d >$	% de ventanas analizadas en las que C_d tiene un ρ_1 mayor que las otras tres series.
$\theta_d >$	% de ventanas analizadas en las que θ_d tiene un ρ_1 mayor que las otras tres series.
$H_d > C_d \& \theta_d$	% de ventanas analizadas en las que H_d tiene un ρ_1 mayor que las series C_d y θ_d .
$L_d > C_d \& \theta_d$	% de ventanas analizadas en las que L_d tiene un ρ_1 mayor que las series C_d y θ_d .
$H_d \& L_d > C_d \& \theta_d$	% de ventanas en las que H_d y L_d presentan un ρ_1 mayor que el de las series C_d y θ_d .

Tabla 3-11: Interpretación de las tablas de exploración dinámica con la autocorrelación ρ_1

3.4.1. Resumen de los resultados de estimación dinámica de autocorrelación del primer retardo ρ_1 para los índices más representativos de EEUU

En la [Tabla 3-12](#) y la [Tabla 3-14](#) se muestran los resultados de la exploración con tres longitudes base distintas para los índices más representativos de Estados Unidos: Dow Jones Industrial Average (^DJI), NASDAQ Composite (^IXIC), Nasdaq 100 (^NDX) y S&P 500 (^GSPC).

<i>Ticker</i>	<i>nv</i>	\bar{H}_d	\bar{L}_d	\bar{C}_d	$\bar{\theta}_d$	$H_d > 0.1$	$L_d > 0.1$	$C_d > 0.1$	$\theta_d > 0.1$	$H_d >$	$L_d >$	$C_d >$	$\theta_d >$	$H_d > C_d \& \theta_d$	$L_d > C_d \& \theta_d$	$H_d \& L_d > C_d \& \theta_d$
^DJI	7211	0.134	0.161	-0.023	-0.037	85.62	97.49	0.07	0.11	25.35	74.65	0	0	100	100	100
^IXIC	7286	0.207	0.184	0.092	0.057	91.57	95.66	42.7	35.57	67	31.97	1.03	0	98.97	88.94	88.94
^NDX	7042	0.162	0.151	0.027	0.021	79.42	91.34	28.48	28.82	61.03	38.18	0.24	0.55	99.2	94.62	94.62
^GSPC	8494	0.144	0.157	-0.011	0.002	89.57	95.08	2.96	2.78	35.29	64.71	0	0	100	100	100

Tabla 3-12: Resumen del análisis dinámico de autocorrelación ρ_1 , para los índices de EEUU: Dow Jones Industrial Average (^DJI), NASDAQ Composite (^IXIC), Nasdaq 100 (^NDX) y S&P 500 (^GSPC). La ventana base utilizada para el análisis dinámico es de 480 muestras.

Ticker	nv	\bar{H}_d	\bar{L}_d	\bar{C}_d	\bar{O}_d	$H_d > 0.1$	$L_d > 0.1$	$C_d > 0.1$	$O_d > 0.1$	$H_d >$	$L_d >$	$C_d >$	$O_d >$	$H_d >$ $C_d & O_d$	$L_d >$ $C_d & O_d$	$H_d & L_d >$ $C_d & O_d$
^DJI	6731	0.134	0.162	-0.023	-0.036	92.14	100	0	0	8.11	91.89	0	0	100	100	100
^IXIC	6806	0.206	0.181	0.089	0.054	98.81	99.97	40.19	36.22	74.67	25.33	0	0	100	86.32	86.32
^NDX	6562	0.164	0.152	0.025	0.019	85.93	97.41	24.6	24.72	70.75	29.25	0	0	100	99.76	99.76
^GSPC	8014	0.146	0.159	-0.012	0.001	99.11	100	0	0	23.8	76.2	0	0	100	100	100

Tabla 3-13: Resumen del análisis dinámico de autocorrelación ρ_1 , para los índices de EEUU: Dow Jones Industrial Average (^DJI), NASDAQ Composite (^IXIC), Nasdaq 100 (^NDX) y S&P 500 (^GSPC). La ventana base utilizada para el análisis dinámico es de 960 muestras.

Ticker	nv	\bar{H}_d	\bar{L}_d	\bar{C}_d	\bar{O}_d	$H_d > 0.1$	$L_d > 0.1$	$C_d > 0.1$	$O_d > 0.1$	$H_d >$	$L_d >$	$C_d >$	$O_d >$	$H_d >$ $C_d & O_d$	$L_d >$ $C_d & O_d$	$H_d & L_d >$ $C_d & O_d$
^DJI	6251	0.134	0.163	-0.023	-0.035	99.28	100	0	0	2.91	97.09	0	0	100	100	100
^IXIC	6326	0.205	0.178	0.085	0.051	99.76	100	38.36	32.84	80.35	19.65	0	0	100	93.69	93.69
^NDX	6082	0.162	0.152	0.019	0.014	85.04	99.67	20.23	20.28	78.24	21.76	0	0	100	100	100
^GSPC	7534	0.147	0.16	-0.013	0	100	100	0	0	25.7	74.3	0	0	100	100	100

Tabla 3-14: Resumen del análisis dinámico de autocorrelación ρ_1 , para los índices de EEUU: Dow Jones Industrial Average (^DJI), NASDAQ Composite (^IXIC), Nasdaq 100 (^NDX) y S&P 500 (^GSPC). La ventana base utilizada para el análisis dinámico es de 1440 muestras.

3.4.1.1. Ejemplo práctico, para la correcta lectura, de las tablas de exploración dinámica mediante la autocorrelación, ρ_1

Dado que sería complicado explicar y comentar todos los resultados condensados en estas tablas, procedemos a dar las pautas a fin de que el lector pueda obtener, de forma sencilla, la información que le pueda resultar de interés para sacar sus propias conclusiones. Para ello pondremos como ejemplo, la interpretación de los resultados que muestra la [Tabla 3-14](#) para el ^DJI. Resultados que interpretaremos ayudándonos de la [Tabla 3-15](#), donde cada fila explica cada uno de los resultados obtenidos en la exploración de dicho activo.

Columna	Resultado	Interpretación de los resultados
Ticker	^DJI	Nos indica el <i>ticker</i> del activo analizado: Índice Dow Jones Industrial Average
nv	6251	Es el número de intervalos o ventanas analizadas a lo largo de todo el histórico
\bar{H}_d	0.134	Media de las 6251 ρ_1 calculadas para la serie H_d
\bar{L}_d	0.163	Media de las 6251 ρ_1 calculadas para la serie L_d
\bar{C}_d	-0.023	Media de las 6251 ρ_1 calculadas para la serie C_d
\bar{O}_d	-0.035	Media de las 6251 ρ_1 calculadas para la serie O_d
$H_d > 0.1$	99.28	En el 99.28% de las ventanas analizadas la serie H_d tiene un ρ_1 mayor de 0.1
$L_d > 0.1$	100	En el 100% de las ventanas analizadas la serie L_d tiene un ρ_1 mayor de 0.1
$C_d > 0.1$	0	En el 0% de las ventanas analizadas la serie C_d tiene un ρ_1 mayor de 0.1
$O_d > 0.1$	0	En el 0% de las ventanas analizadas la serie O_d tiene un ρ_1 mayor de 0.1
$H_d >$	2.91	El 2.91% de ventanas analizadas la serie H_d tiene un ρ_1 mayor que las otras tres series.
$L_d >$	97.09	El 97.09% de ventanas analizadas la serie L_d tiene un ρ_1 mayor que las otras tres series
$C_d >$	0	El 0% de ventanas analizadas la serie C_d tiene un ρ_1 mayor que las otras tres series

$O_d >$	0	El 0% de ventanas analizadas la serie O_d tiene un ρ_1 mayor que las otras tres series
$H_d >$ $C_d \& O_d$	100	El 100% de ventanas analizadas H_d tiene un ρ_1 mayor que las series C_d y O_d
$L_d >$ $C_d \& O_d$	100	El 100% de ventanas analizadas L_d tiene un ρ_1 mayor que las series C_d y O_d
$H_d \& L_d >$ $C_d \& O_d$	100	El 100% de ventanas analizadas H_d y L_d presentan un ρ_1 mayor que el de las series C_d y O_d

Tabla 3-15: Ejemplo de lectura de las tablas de exploración dinámica con ρ_1

Una vez visto este ejemplo de interpretación ya estamos en condiciones de analizar las relaciones entre los ρ_1 de las cuatro series de cualquiera de los índices analizados. Siguiendo el procedimiento de este ejemplo, también podemos interpretar las tablas que adjuntamos en el [Anexo C](#) con la exploración dinámica de ρ_1 para los componentes de varios índices. Concretamente, el [Anexo C.3](#) contiene las tablas con los resultados de la exploración dinámica, con las tres longitudes base, para los componentes de índice Dow Jones Industrial Average (^DJI).

3.4.2. Resumen de los resultados de estimación dinámica de la autocorrelación para índices de mercados de acciones de cuatro países europeos

En este sub-apartado mostramos desde la [Tabla 3-16](#) a la [Tabla 3-18](#) los resultados de la exploración para una muestra de índices de mercados de acciones de países europeos obtenidos, también para tres valores distintos de la longitud base en el algoritmo de estimación dinámica. Los índices analizados son: de Francia CAC 40 (^FCHI), Alemania DAX (^GDAXI), Reino Unido (^FTSE 100) y España (^IBEX).

Ticker	nv	\bar{H}_d	\bar{L}_d	\bar{C}_d	\bar{O}_d	$H_d > 0.1$	$L_d > 0.1$	$C_d > 0.1$	$O_d > 0.1$	$H_d >$	$L_d >$	$C_d >$	$O_d >$	$H_d >$ $C_d \& O_d$	$L_d >$ $C_d \& O_d$	$H_d \& L_d >$ $C_d \& O_d$
^FCHI	2243	0.064	0.093	-0.059	-0.088	22.93	41.08	0	0	26.09	73.91	0	0	97.9	100	97.9
^GDAXI	1306	0.081	0.115	0.029	0.003	28.05	58.85	0	0	11.65	88.35	0	0	83.45	100	83.45
^FTSE	3706	0.143	0.138	-0.048	-0.047	98.11	85.07	0	0	55.57	44.43	0	0	100	100	100
^IBEX	3315	0.119	0.117	-0.005	-0.048	72.96	57.91	6.28	0	62.01	37.99	0	0	94.96	100	94.96

Tabla 3-16: Resumen del análisis dinámico de autocorrelación ρ_1 , para los índices Europeos de Francia CAC 40 (^FCHI), Alemania DAX (^GDAXI), Reino Unido (^FTSE 100) y España (^IBEX). La ventana base utilizada para el análisis dinámico es de 480 muestras.

Ticker	nv	\bar{H}_d	\bar{L}_d	\bar{C}_d	\bar{O}_d	$H_d > 0.1$	$L_d > 0.1$	$C_d > 0.1$	$O_d > 0.1$	$H_d >$	$L_d >$	$C_d >$	$O_d >$	$H_d >$ $C_d \& O_d$	$L_d >$ $C_d \& O_d$	$H_d \& L_d >$ $C_d \& O_d$
^FCHI	1763	0.072	0.11	-0.041	-0.083	16	57.15	0	0	0	100	0	0	100	100	100
^GDAXI	826	0.081	0.122	0.036	-0.004	17.7	100	0	0	3.64	96.36	0	0	100	100	100
^FTSE	3226	0.146	0.144	-0.051	-0.051	100	100	0	0	54.26	45.74	0	0	100	100	100
^IBEX	2835	0.118	0.117	-0.004	-0.049	80.1	56.7	0	0	62.24	37.76	0	0	100	100	100

Tabla 3-17: Resumen del análisis dinámico de autocorrelación ρ_1 , para los índices Europeos de Francia CAC 40 (^FCHI), Alemania DAX (^GDAXI), Reino Unido (^FTSE 100) y España (^IBEX). La ventana base utilizada para el análisis dinámico es de 960 muestras.

Ticker	nv	\bar{H}_d	\bar{L}_d	\bar{C}_d	\bar{O}_d	$H_d > 0.1$	$L_d > 0.1$	$C_d > 0.1$	$O_d > 0.1$	$H_d >$	$L_d >$	$C_d >$	$O_d >$	$H_d >$	$L_d >$	$H_d \& L_d >$
^FCHI	1283	0.075	0.111	-0.037	-0.076	0	73.4	0	0	0	100	0	0	100	100	100
^GDAXI	346	0.087	0.118	0.026	0.007	0	100	0	0	0	100	0	0	100	100	100
^FTSE	2746	0.146	0.144	-0.052	-0.052	100	100	0	0	52.28	47.72	0	0	100	100	100
^IBEX	2355	0.117	0.11	-0.006	-0.05	98.56	58.71	0	0	56.8	43.2	0	0	100	100	100

Tabla 3-18: Resumen del análisis dinámico de autocorrelación ρ_1 , para los índices Europeos de Francia CAC 40 (^FCHI), Alemania DAX (^GDAXI), Reino Unido (^FTSE 100) y España (^IBEX). La ventana base utilizada para el análisis dinámico es de 1440 muestras.

En el **Anexo C** adjuntamos algunas de las tablas manejadas en la exploración de ρ_1 , para los componentes de los índices europeos de Francia CAC 40 (**Anexo C.1**), Alemania DAX (**Anexo C.2**), Reino Unido y España IBEX35 (**Anexo C.4**).

Tablas que el lector puede interpretar fácilmente siguiendo el ejemplo de la **Tabla 3-15**, pudiendo deducir por si mismo las discrepancias entre los ρ_1 de las cuatro series que forman los activos financieros analizados.

3.5. Breve resumen de los resultados

En este capítulo hemos comprobado empíricamente la vinculación que existe entre el ρ_1 y el H_d de las cuatro series que forman un activo financiero. Como consecuencia de esta relación, aparece también, una discrepancia entre el ρ_1 que presentan las cuatro series:

- Las series L_d y H_d suelen presentar valores de H superiores a 0.6 y de ρ_1 por encima de 0.1.
- La serie C_d suele presentar valores de H que oscilan en torno a 0.5 y los de ρ_1 oscilan muy próximos al entorno de cero.
- La serie O_d con valores de H próximos a 0.5, aunque algo menores, siendo habitual que ρ_1 pueda presentar cierta correlación negativa.

Lo verdaderamente relevante de estos resultados es que, como también hemos podido constatar, se repiten sistemáticamente para todos los activos analizados y para cualquier tamaño de ventana utilizada. En este sentido no hemos podido evidenciar una relación, que se repitiese sistemáticamente, entre H y cualquier otro ρ_i del correlograma de las series H_d, L_d, C_d y O_d .

En la **Tabla 3-19** se resumen los valores que podemos esperar para H y ρ_1 en función de cada una de las cuatro series (H_d, L_d, C_d y O_d) que forman los activos. Estos valores concuerdan con la norma que habíamos establecido en la **Tabla 3-2** del apartado 3.1.2, según la cual:

- Si H tiende a cero implica que ρ_1 tiende a -1
- Si H tiende a 0.5 implica que ρ_1 tiende al 0
- Si H tiende a 1 implica que ρ_1 tiende a 1

	H_d	L_d	C_d	O_d
H	$H > 0.6$	$H > 0.6$	$H \approx 0.5$	$H < 0.5$
ρ_1	$\rho_1 > 0.1$	$\rho_1 > 0.1$	$\rho_1 \approx 0$	$\rho_1 < 0$

Tabla 3-19: Resumen de los valores típicos de H y ρ_1 en función de la serie H_d, L_d, C_d y O_d

En principio estos resultados pueden parecer muy sutiles y sin interés práctico, sin embargo tienen importancia a la hora de valorar algunas propiedades de las series, como puede ser la persistencia, la predictibilidad o la información que porta cada serie. Como veremos más adelante, las series más predecibles y que más información aportan son la L_d y la H_d , pero curiosamente la C_d , es la que únicamente usan la mayoría de pequeños inversores para tomar sus decisiones. En el siguiente capítulo propondremos un método estadístico, basado en estos resultados, para predecir el margen de valores en el que probablemente se muevan los precios de un activo en la sesión siguiente a la actual.

CAPÍTULO 4

CAPÍTULO 4: Predictibilidad a una muestra de las series H , L , C , O en función del exponente de Hurst.

4.1. Introducción

En capítulos anteriores hemos comprobado que las cuatro series de retornos diarios H_d , L_d , C_d y O_d que caracterizan los distintos activos financieros presentan cierta discrepancia en sus valores de H y ρ_1 , independientemente del histórico y del intervalo de tiempo analizado (tamaño de ventana).

El objetivo de este capítulo será explorar el grado de dificultad que presenta una serie financiera para predecir eventos simples en la observación futura inmediata y su relación con el exponente H . El método seguido se basa en la estimación de la probabilidad condicionada de que suceda el evento si se ha cumplido un determinado patrón, lo que llamaremos predictibilidad. Para ello desarrollamos una serie de experimentos que van aumentando en complejidad, lo que nos permitirá relacionar empíricamente los valores H y ρ_1 de una serie, con la información que porta dicha serie.

Finalmente, basándonos en los resultados de estos experimentos, propondremos un método de aplicación práctica, para predecir el comportamiento de un evento simple en la sesión siguiente a la actual, es decir, a una muestra.

4.1.1. Descripción de términos utilizados en el capítulo

Para desarrollar los experimentos que aparecen en este capítulo hemos tenido que utilizar algunos términos o conceptos que describimos a continuación:

- **Semilla:** vector (o matriz) utilizado para buscar conjuntos de observaciones consecutivas de la serie con las que, este vector/matriz presenta una correlación superior a un valor previamente establecido.
- **Patrón:** conjunto de observaciones consecutivas de la serie temporal, que tienen una correlación con la semilla, superior a un valor preestablecido.

- **Condición post-patrón:** condición que imponemos sobre las observaciones posteriores al patrón. En los experimentos de este capítulo, la condición post-patrón (en adelante *cpp*) siempre será $x_t < x_{t+1}$ (aunque podría ser cualquier otra). Donde x_t es la última muestra perteneciente al patrón y x_{t+1} es la observación siguiente al patrón. Si se cumple que $x_t < x_{t+1}$, decimos que se ha cumplido la *cpp*.
- **Índice de predictibilidad:** el índice de predictibilidad (en adelante *ip*) es la relación entre el número de patrones (en adelante *nptr*), que una determinada semilla genera o identifica en la serie financiera, y el número de veces que se cumple la condición post-patrón (en adelante *ncpp*) en dicha serie.

4.2. Valoración de la predictibilidad, *ip*

4.2.1. Pasos para determinar el *ip*

➤ Paso 1

A través de un vector $\mathbf{s}^T = [s_1 \dots s_n]^T$, que llamamos ‘semilla’, exploramos toda la serie, buscando conjuntos de observaciones consecutivas $\mathbf{x}^T_i = [x_i \dots x_{i+n}]^T$ de las mismas dimensiones que \mathbf{s} , de forma que el valor del coeficiente de correlación entre \mathbf{x} y \mathbf{s} sea mayor que un valor establecido. Contabilizamos el número de vectores \mathbf{x}^T_i encontrados (*nptr*) a lo largo de toda la serie.

➤ Paso 2

Contabilizamos el número de condiciones post-patrón *ncpp* que se cumplen a lo largo de toda la serie. Como se ha mencionado, en estos experimentos, la condición post-patrón siempre será $x_t < x_{t+1}$. Donde x_t es la última muestra perteneciente al patrón, y x_{t+1} es la observación siguiente al patrón. Si se cumple que $x_t < x_{t+1}$, decimos que se ha cumplido la *cpp*.

➤ Paso 3

Finalmente, una vez determinado el número de patrones *ncpp* generados por la semilla y el número de condiciones post-patrón que se cumplen *ncpp*, podemos determinar el índice de predictibilidad¹ *ip* mediante el cociente (4-1)

$$ip = ncpp / nptr \quad (4-1)$$

¹ El índice *ip* sería la estimación de la probabilidad del cumplimiento de la condición condicionada a la aparición del patrón.

4.2.1.1. Identificación de patrones

Para identificar el patrón utilizamos el coeficiente de correlación de Pearson, r , definido, para el caso de un vector de observaciones \mathbf{x} y una semilla \mathbf{s} de n elementos cada uno, según la expresión:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(s_i - \bar{s})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (s_i - \bar{s})^2}} \quad (4-2)$$

donde:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{y} \quad \bar{s} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n s_i \quad (4-3)$$

De manera que diremos que se cumple un patrón, cuando el valor r supera un determinado umbral r_0 , que establecemos arbitrariamente, según lo restrictivos que queramos ser a la hora del cumplimiento del patrón y, por tanto, en el número de patrones que queramos reconocer y el grado de semejanza que busquemos entre ellos. Recordemos que $|r| \leq 1$.

4.2.1.2. Consideraciones sobre el ip

- a) El índice de predictibilidad de una serie depende de los siguientes parámetros:
 - ✓ Del umbral r_0 establecido.
 - ✓ De la semilla $\mathbf{s}^T = [s_1 \dots s_n]^T$ utilizada para buscar los patrones.
 - ✓ De la condición post-patrón establecida.
- b) El índice de predictibilidad nos proporciona la estimación de probabilidad de que, una vez detectado un patrón, se cumpla la condición post-patrón.
- c) El índice de predictibilidad pertenece al intervalo $[0 \ 1]$. Una serie será más predecible cuando su ip se encuentre más cerca de los extremos del intervalo $[0 \ 1]$. Una serie con un ip próximo a 0.5 será impredecible.

4.3. Experimento I

Se trata de un sencillo experimento con el que intentaremos comprobar que existe una relación entre el exponente H y la información que portan las series financieras en términos de predictibilidad.

En este experimento calcularemos el ip de las cuatro series de precios para varios activos nacionales e internacionales utilizando unos parámetros muy sencillos y genéricos, que describimos seguidamente.

- **Semilla.** La semilla utilizada es la más sencilla y genérica posible, se trata del vector de dos elementos $\mathbf{s}^T = [0.1, 0.2]^T$. Es tan genérica que cualquier otro vector $\mathbf{s}^T = [s_1, s_2]^T$ con tal que $s_1 < s_2$ sería equivalente y arrojaría los mismos resultados.
- **Condición post-patrón.** Imponemos se cumpla la condición $x_t < x_{t+1}$, siendo x_t la última observación perteneciente al vector patrón y x_{t+1} la siguiente observación de la serie.
- **Umbral de correlación r_o .** Seremos muy genéricos, también con esta condición, asumiendo que dos muestras consecutivas de la serie forman un patrón \mathbf{x} si presentan con la semilla \mathbf{s} una correlación $r > 0$. Muy poco restrictivo, pero al ser una semilla tan sencilla el valor del coeficiente de correlación de Pearson, r , entre \mathbf{s} y \mathbf{x} solo va a tomar los valores de 1 y -1.

En la [Tabla 4-1](#) se muestra un resumen de los parámetros utilizados en este experimento para el cálculo del índice de predictibilidad de las series de precios de los diferentes activos.

Semilla	$\mathbf{s}^T = [0.1, 0.2]^T$
Condición post-patrón	$x_t < x_{t+1}$ (condición binaria)
Umbral de correlación r_o	$r_o > 0$

Tabla 4-1: Tabla resumen de los parámetros utilizados en el Experimento 1

4.3.1. Resultados del experimento I

El índice de predictibilidad ip es un valor relativo ya que, como hemos visto, depende de los parámetros utilizados para su cálculo. Por consiguiente, solo podremos comparar el ip de las diferentes series financieras, si lo hemos calculado utilizando los mismos parámetros. En este apartado se muestran los resultados obtenidos para ip , de gran cantidad de activos, calculado siempre con los mismos parámetros de la [Tabla 4-1](#).

4.3.1.1. Tablas de predictibilidad de varios activos

En las siguientes tablas se muestran los resultados obtenidos para el ip de las cuatro series de varios activos e índices. Así como el número de patrones encontrados $nptr$ y el número de condiciones post-patrón cumplidas $ncpp$.

En la primera columna aparecen los *ticker* de los activos analizados, en el [Anexo A](#): mostramos el nombre completo del activo correspondiente. La segunda columna representa el número de muestras u observaciones de las que consta cada una de las series del histórico. Las siguientes columnas encabezadas por H, L, C y θ , muestran los resultados para cada una de las cuatro series respectivamente. Cada una de estas columnas esta subdividida en tres: la $nptr$ representa el número de patrones encontrados

en la serie, la $ncpp$ indica el número de condiciones post-patrón cumplidas y la ip muestra el índice de predictibilidad obtenido para dicha serie. Nótese que los resultados mostrados en estas tablas corresponden a las series completas del histórico disponible.

4.3.1.1-a) Índices europeos y americanos

La [Tabla 4-2](#) representa el ip obtenido para los índices de EEUU: Dow Jones Industrial Average (^DJI), NASDAQ Composite (^XIC), Nasdaq 100 (^NDX) y S&P 500 (^GSPC).

Ticker	Nº muestras	H			L			C			θ		
		$nptr$	$ncpp$	ip	$nptr$	$ncpp$	ip	$nptr$	$ncpp$	ip	$nptr$	$ncpp$	ip
^DJI	7691	4056	2328	0.57	4278	2625	0.61	4087	2118	0.52	4091	2112	0.52
^XIC	7766	4348	2794	0.64	4304	2713	0.63	4301	2549	0.59	4287	2498	0.58
^NDX	7522	4072	2458	0.60	4068	2474	0.61	4095	2296	0.56	4099	2289	0.56
^GSPC	8974	4690	2778	0.59	4924	2991	0.61	4776	2526	0.53	4776	2555	0.53

Tabla 4-2: Predictibilidad con semilla $s^t=[0.1, 0.2]^t$ para los índices americanos

En la [Tabla 4-3](#) mostramos los resultados de ip para los índices europeos de Francia CAC 40 (^FCHI), Alemania DAX (^GDAXI), Reino Unido (^FTSE 100) y España (^IBEX).

Ticker	Nº muestras	H			L			C			θ		
		$nptr$	$ncpp$	ip	$nptr$	$ncpp$	ip	$nptr$	$ncpp$	ip	$nptr$	$ncpp$	ip
^FCHI	2723	1431	765	0.53	1455	826	0.57	1409	680	0.48	1441	717	0.50
^GDAXI	1786	952	543	0.57	966	562	0.58	951	507	0.53	957	517	0.54
^FTSE	4186	2101	1195	0.57	2261	1355	0.60	2157	1103	0.51	2151	1095	0.51
^IBEX	3795	2030	1181	0.58	2005	1141	0.57	2002	1042	0.52	1985	1009	0.51

Tabla 4-3: Predictibilidad con semilla $s^t=[0.1, 0.2]^t$ para los índices europeos

Como ejemplo de interpretación de estas tablas, describimos los resultados que muestra la [Tabla 4-3](#), para el índice del Reino Unido (^FTSE 100); donde nos dice que se han explorado 4186 muestras, encontrando 2101 patrones en la serie H , 2261 en la serie L , 2157 en la serie C y 2151 en la serie θ . Se han cumplido 1195 condiciones post-patrón en la serie H , 1355 en la serie L , 1103 en la C y 1095 en la θ . De esta forma hemos obtenido unos ip de 0.57 para la serie H , 0.60 para la serie L y 0.51 para las series C y θ .

Siguiendo el anterior ejemplo de interpretación, el lector podrá navegar por los resultados de estas tablas y comprobar por sí mismo que, por norma general, series L y H tienen un ip ligeramente más alto que las series C y θ , siendo el ip de estas últimas más cercano a 0.5, lo que indica, como vimos en las consideraciones sobre el ip , que son más impredecibles. Como podemos apreciar se trata de unas diferencias muy sutiles, pero son relevantes en cuanto se repiten con todos los índices mostrados en estas tablas así, como

por la relación que ya se aprecia con el exponente H y que más adelante podremos comprobar con más detalle.

4.3.1.1-b) Cálculo de ip para los componentes de los índices

En las siguientes tablas que van de la *Tabla 4-4* a la *Tabla 4-7* se muestran los resultados para el cálculo de la ip con los parámetros de *Tabla 4-1*, para los componentes de los índices europeos de España IBEX35 (*Tabla 4-4*), Francia CAC 40 (*Tabla 4-5*), Alemania DAX (*Tabla 4-6*) y el de Estados Unidos: Dow Jones Industrial Average (*Tabla 4-7*).

Ticker	Nº muestras	H			L			C			θ		
		$nptr$	$ncpp$	ip	$nptr$	$ncpp$	ip	$nptr$	$ncpp$	ip	$nptr$	$ncpp$	ip
ABE	3925	2012	1102	0.55	2147	1274	0.59	1958	1006	0.51	2035	1030	0.51
ACS	3408	1767	1010	0.57	1892	1112	0.59	1788	989	0.55	1774	930	0.52
ACX	3928	1918	1001	0.52	2126	1230	0.58	1946	988	0.51	2007	993	0.49
BBVA	3928	1981	1098	0.55	2008	1117	0.56	1913	992	0.52	1983	1010	0.51
BKT	3928	1898	1006	0.53	2018	1094	0.54	1928	1006	0.52	1939	938	0.48
CABK	1985	974	520	0.53	1054	599	0.57	976	506	0.52	997	471	0.47
ELE	3926	1987	1096	0.55	2118	1235	0.58	1998	1065	0.53	2007	994	0.50
ENG	3325	1736	980	0.56	1816	1050	0.58	1693	880	0.52	1717	836	0.49
FCC	3927	1899	1003	0.53	2068	1182	0.57	1911	940	0.49	1957	937	0.48
FER	2735	1398	770	0.55	1516	868	0.57	1348	687	0.51	1418	737	0.52
GAM	3375	1664	889	0.53	1852	1069	0.58	1695	886	0.52	1717	885	0.52
GAS	3924	1475	819	0.56	1570	899	0.57	1480	774	0.52	1506	778	0.52
GRF	2346	1149	620	0.54	1336	808	0.60	1177	618	0.53	1200	619	0.52
IBE	3931	2013	1132	0.56	2088	1172	0.56	1999	1079	0.54	2009	975	0.49
IDR	3741	1833	969	0.53	2003	1118	0.56	1816	903	0.50	1850	866	0.47
ITX	3590	1845	1001	0.54	1993	1165	0.58	1803	919	0.51	1873	918	0.49
MAP	3515	1672	902	0.54	1764	999	0.57	1646	854	0.52	1695	862	0.51
MTS	2296	1132	625	0.55	1171	648	0.55	1158	597	0.52	1171	619	0.53
OHL	3927	1872	1020	0.54	2149	1266	0.59	1911	1059	0.55	2001	1012	0.51
POP	3810	1823	982	0.54	2000	1114	0.56	1840	937	0.51	1885	918	0.49
REE	3926	1990	1078	0.54	2148	1272	0.59	1994	1054	0.53	2008	937	0.47
REP	3927	1999	1103	0.55	2071	1175	0.57	1956	1020	0.52	2004	988	0.49
SAB	3868	1764	966	0.55	2014	1201	0.60	1816	1027	0.57	1883	990	0.53
SAN	3928	2003	1117	0.56	2060	1146	0.56	1988	1038	0.52	2046	1032	0.50
SCYR	3924	1860	991	0.53	2133	1252	0.59	1939	1021	0.53	1960	971	0.50
TEF	3926	1988	1082	0.54	2021	1130	0.56	1955	1008	0.52	1985	975	0.49
TL5	2826	1395	765	0.55	1496	852	0.57	1386	715	0.52	1421	729	0.51
TRE	2324	1186	659	0.56	1332	792	0.59	1187	622	0.52	1199	611	0.51

Tabla 4-4: Predictibilidad con semilla $s^r=[0.1, 0.2]^r$ para los componentes del IBEX

Ticker	Nº muestras	H			L			C			θ		
		$nptr$	$ncpp$	ip	$nptr$	$ncpp$	ip	$nptr$	$ncpp$	ip	$nptr$	$ncpp$	ip
AC	3964	1931	1019	0.53	2087	1197	0.57	1972	988	0.50	2013	1025	0.51
ACA	3483	1704	915	0.54	1833	1042	0.57	1718	847	0.49	1737	851	0.49
AI	3963	2012	1069	0.53	2139	1211	0.57	2029	982	0.48	2081	1043	0.50

4.3.1.2. Exploración dinámica mediante ventanas del ip

Realizando la exploración dinámica dividimos la serie del histórico en partes más pequeñas, con lo que conseguimos dos cosas:

- Primero: ver como depende la ip del tamaño de la serie
- Segundo: obtener miles de ip calculadas para cada histórico, en vez de solo una, lo que nos da mucha más profundidad, a la hora de comparar las ip de las cuatro series, y a la hora de valorar las posibles relaciones entre la ip el H y la ρ_1 .

Recordemos que el método desarrollado para la estimación dinámica fue descrito en el apartado 2.3. La correcta interpretación de las tablas de exploración dinámica para el ip se explica en la [Tabla 4-8](#) donde cada fila explica el contenido de cada una de las columnas que forman las tablas de exploración.

Columna	Descripción
<i>Ticker</i>	Columna con los <i>tickers</i> de los activos analizados
<i>nv</i>	Número de ventanas analizadas a lo largo del histórico de un activo, relación (2-12)
$\overline{H_i}$	Media de los ip de todas las ventanas analizadas para la serie H
$\overline{L_o}$	Media de los ip de todas las ventanas analizadas para la serie L
\overline{C}	Media de los ip de todas las ventanas analizadas para la serie C
$\overline{\theta}$	Media de los ip de todas las ventanas analizadas para la serie θ
$H > 0.6$	Porcentaje de ventanas analizadas en las que la serie H tiene un ip mayor de 0.6
$L > 0.6$	Porcentaje de ventanas analizadas, en las que la serie L tiene un ip mayor de 0.6
$C > 0.6$	% de ventanas analizadas, en las que la serie C tiene un ip mayor de 0.6
$\theta > 0.6$	% de ventanas analizadas, en las que la serie θ tiene un ip mayor de 0.6
$H >$	% de ventanas analizadas en las que H tiene un ip mayor que las otras tres series.
$L >$	% de ventanas analizadas en las que L tiene un ip mayor que las otras tres series.
$C >$	% de ventanas analizadas en las que C tiene un ip mayor que las otras tres series.
$\theta >$	% de ventanas analizadas en las que θ tiene un ip mayor que las otras tres series.
$H > C \& \theta$	% de ventanas analizadas en las que H tiene un ip mayor que las series C y θ .
$L > C \& \theta$	% de ventanas analizadas en las que L tiene un ip mayor que las series C y θ .
$H \& L > C \& \theta$	% de ventanas en las que H y L presentan un ip mayor que el de las series C y θ .

Tabla 4-8: Interpretación de las tablas de análisis dinámico mediante ip

En este apartado mostramos la exploración dinámica del índice de predictibilidad ip , para varios índices europeos y americanos. Para el cálculo del ip hemos utilizado los parámetros de la [Tabla 4-1](#) en todos los casos, con lo que podremos establecer comparaciones entre los resultados obtenidos para las diferentes series.

4.3.1.2-a) Tablas de análisis dinámico para los índices europeos

Mostramos aquí varias tablas con los resultados de realizar la exploración dinámica del ip (con diferentes tamaños de ventana), para los índices europeos de Francia CAC 40 (^FCHI), Alemania DAX (^GDAXI), Reino Unido (^FTSE 100) y España (^IBEX).

La [Tabla 4-10](#) muestra los resultados de la exploración dinámica para ip de los índices europeos con ventanas de 480 muestras. En el caso del IBEX el 30.77% de las ventanas exploradas el ip , de la serie H ha sido mayor de 0.6, el ip de la serie L ha sido superior a 0.6 en el 23.44% de las ventanas. Las series C y θ no han superado el 0.6 en ninguna ventana de las 3315 que se han analizado en la exploración. En el 78.01% de las ventanas el ip de la serie H ha sido mayor que el de las demás, la serie L solo ha sido mayor que las demás en el 21.39% de las ventanas y las C y θ en ninguna ventana han tenido el mayor ip . Seguidamente, en la [Tabla 4-9](#) resumimos los resultados comentados anteriormente, para el caso del IBEX.

Columna	Resultado	Interpretación de los resultados
Ticker	^IBEX	Nos indica el <i>ticker</i> del activo analizado: en este caso el IBEX35
nv	3315	Es el número de intervalos o ventanas analizadas a lo largo de todo el histórico
\overline{H}	0.58	Media de los 3315 ip calculados para la serie H del IBEX
\overline{L}	0.56	Media de los 3315 ip calculados para la serie L
\overline{C}	0.52	Media de los 3315 ip calculados para la serie C
$\overline{\theta}$	0.50	Media de los 3315 ip calculados para la serie θ
$H > 0.6$	30.77	El 30.77% de las ventanas analizadas, la serie H tiene un ip mayor de 0.6
$L > 0.6$	23.44	El 23.44% de las ventanas analizadas, la serie L tiene un ip mayor de 0.6
$C > 0.6$	0	El 0% de las ventanas analizadas, la serie C tiene un ip mayor de 0.6
$\theta > 0.6$	0	El 0% de las ventanas analizadas, la serie θ tiene un ip mayor de 0.6
$H >$	78.01	El 78.01% de ventanas analizadas, la serie H tiene un ip mayor que las otras tres series.
$L >$	21.39	El 21.39% de ventanas analizadas, la serie L tiene un ip mayor que las otras tres series
$C >$	0	El 0% de ventanas analizadas la serie, C tiene un ip mayor que las otras tres series
$\theta >$	0	El 0% de ventanas analizadas la serie, θ tiene un ip mayor que las otras tres series
$H > C \& \theta$	99.91	El 99.91% de ventanas analizadas H tiene un ip mayor que las series C y θ
$L > C \& \theta$	91.64	El 91.64% de ventanas analizadas L tiene un ip mayor que las series C y θ
$H \& L > C \& \theta$	91.55	El 91.55% de ventanas analizadas H y L presentan un ip mayor que el de las series C y θ

Tabla 4-9: Ejemplo de interpretación de las tablas de exploración dinámica con ip , para el caso del IBEX

Ticker	nv	\bar{H}	\bar{L}	\bar{C}	\bar{O}	$H>0.6$	$L>0.6$	$C>0.6$	$O>0.6$	$H>$	$L>$	$C>$	$O>$	$H>$ $C\&O$	$L>$ $C\&O$	$H\&L>$ $C\&O$
^FCHI	2243	0.53	0.57	0.48	0.49	0.00	5.04	0.00	0.00	0.76	99.06	0.00	0.00	88.81	100	88.81
^GDAXI	1306	0.57	0.58	0.54	0.55	10.26	9.42	0.00	0.00	33.84	65.93	0.00	0.00	89.59	100	89.59
^FTSE	3706	0.56	0.59	0.50	0.50	4.37	49.62	0.00	0.00	1.51	98.49	0.00	0.00	97.57	100	97.57
^IBEX	3315	0.58	0.56	0.52	0.50	30.77	23.44	0.00	0.00	78.01	21.39	0.00	0.00	99.91	91.64	91.55

Tabla 4-10: Resumen del análisis dinámico de la predictibilidad para los índices europeos de Francia CAC 40 (^FCHI), Alemania DAX (^GDAXI), Reino Unido (^FTSE 100) y España (^IBEX) La ventana base utilizada para el análisis dinámico es de 480 muestras.

Ticker	nv	\bar{H}	\bar{L}	\bar{C}	\bar{O}	$H>0.6$	$L>0.6$	$C>0.6$	$O>0.6$	$H>$	$L>$	$C>$	$O>$	$H>$ $C\&O$	$L>$ $C\&O$	$H\&L>$ $C\&O$
^FCHI	1763	0.53	0.56	0.48	0.49	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	100.00	0.00	0.00	100	100	100
^GDAXI	826	0.57	0.58	0.53	0.55	0.00	0.00	0.00	0.00	24.82	74.33	0.00	0.00	97.34	100	97.34
^FTSE	3226	0.56	0.59	0.50	0.50	0.00	37.35	0.00	0.00	0.00	100.00	0.00	0.00	100	100	100
^IBEX	2835	0.58	0.56	0.52	0.51	19.08	12.73	0.00	0.00	85.01	14.99	0.00	0.00	100	98.87	98.87

Tabla 4-11: Resumen del análisis dinámico de la predictibilidad para los índices europeos de Francia CAC 40 (^FCHI), Alemania DAX (^GDAXI), Reino Unido (^FTSE 100) y España (^IBEX). La ventana base utilizada para el análisis dinámico es de 960 muestras.

Tabla 4-12 representa las exploraciones dinámicas para los mismos índices, pero con ventanas de 1440 muestras. Vemos que con este tamaño de ventana los resultados se aproximan más a los obtenidos para la serie completa, siendo ip de las series H y L mayor que el de las C y O en el 100% de las 2355 ventanas analizadas. Las medias se mantienen independientemente del tamaño de ventana.

Ticker	nv	\bar{H}	\bar{L}	\bar{C}	\bar{O}	$H>0.6$	$L>0.6$	$C>0.6$	$O>0.6$	$H>$	$L>$	$C>$	$O>$	$H>$ $C\&O$	$L>$ $C\&O$	$H\&L>$ $C\&O$
^FCHI	1283	0.53	0.57	0.49	0.49	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	100	0.00	0.00	100	100	100
^GDAXI	346	0.57	0.58	0.53	0.55	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	100	0.00	0.00	100	100	100
^FTSE	2746	0.56	0.60	0.50	0.50	0.00	36.05	0.00	0.00	0.00	100	0.00	0.00	100	100	100
^IBEX	2355	0.59	0.56	0.52	0.51	13.16	0.00	0.00	0.00	97.15	2.85	0.00	0.00	100	100	100

Tabla 4-12: Resumen del análisis dinámico de la predictibilidad para los índices europeos de Francia CAC 40 (^FCHI), Alemania DAX (^GDAXI), Reino Unido (^FTSE 100) y España (^IBEX). La ventana base utilizada para el análisis dinámico es de 1440 muestras.

En el **Anexo D** se adjuntan las tablas de compactación, con las exploraciones de ip manejadas para los componentes de los índices europeos de Francia CAC 40 (**Anexo D.1**), Alemania DAX (**Anexo D2**), Reino Unido y España IBEX35 (**Anexo D.4**).

4.3.1.2-b) Tablas de análisis dinámico para los índices de EEUU

En este sub-apartado se muestran las tablas de exploración dinámica para los índices de EEUU: Dow Jones Industrial Average (^DJI), NASDAQ Composite (^IXIC), Nasdaq 100

(\wedge NDX) y S&P 500 (\wedge GSPC). Explorados con tamaños de ventana de 480 muestras (Tabla 4-13), 960 muestras (Tabla 4-14) y 1440 muestras (Tabla 4-15).

Ticker	nv	\overline{H}	\overline{L}	\overline{C}	\overline{O}	$H>0.6$	$L>0.6$	$C>0.6$	$O>0.6$	$H>$	$L>$	$C>$	$O>$	$H>$ $C\&O$	$L>$ $C\&O$	$H\&L>$ $C\&O$
\wedge DJI	7211	0.57	0.609	0.514	0.513	14.96	62.71	0	0	3.91	96.06	0	0	99.42	100	99.42
\wedge IXIC	7286	0.632	0.619	0.584	0.575	77.13	56.67	47.15	33.86	62.96	28.89	7.92	0	86.67	83.83	78.55
\wedge NDX	7042	0.598	0.599	0.554	0.552	54.44	46.69	20.36	18.57	39.56	52.68	2.97	3.34	89.35	81.78	78.83
\wedge GSPC	8494	0.58	0.6	0.524	0.529	30.42	50.39	2.61	2.91	26.69	72.18	0.04	0.94	90.89	98.07	90.03

Tabla 4-13: Resumen del análisis dinámico de la predictibilidad para los índices de EEUU: Dow Jones Industrial Average (\wedge DJI), NASDAQ Composite (\wedge IXIC), Nasdaq 100 (\wedge NDX) y S&P 500 (\wedge GSPC). La ventana base utilizada para el análisis dinámico es de 480 muestras.

Ticker	nv	\overline{H}	\overline{L}	\overline{C}	\overline{O}	$H>0.6$	$L>0.6$	$C>0.6$	$O>0.6$	$H>$	$L>$	$C>$	$O>$	$H>$ $C\&O$	$L>$ $C\&O$	$H\&L>$ $C\&O$
\wedge DJI	6731	0.57	0.61	0.51	0.51	3.95	58.73	0.00	0.00	0.10	99.87	0.00	0.00	100	100	100
\wedge IXIC	6806	0.63	0.62	0.58	0.57	75.32	55.04	45.20	32.38	76.96	22.91	0.13	0.00	99.66	92.64	92.43
\wedge NDX	6562	0.60	0.60	0.55	0.55	57.56	51.08	15.15	15.27	46.91	49.89	2.56	0.58	88.66	96.80	88.66
\wedge GSPC	8014	0.58	0.60	0.52	0.53	25.49	49.30	0.00	0.00	14.15	85.84	0.00	0.00	95.30	100.00	95.30

Tabla 4-14: Resumen del análisis dinámico de la predictibilidad para los índices de EEUU: Dow Jones Industrial Average (\wedge DJI), NASDAQ Composite (\wedge IXIC), Nasdaq 100 (\wedge NDX) y S&P 500 (\wedge GSPC). La ventana base utilizada para el análisis dinámico es de 960 muestras.

Ticker	nv	\overline{H}	\overline{L}	\overline{C}	\overline{O}	$H>0.6$	$L>0.6$	$C>0.6$	$O>0.6$	$H>$	$L>$	$C>$	$O>$	$H>$ $C\&O$	$L>$ $C\&O$	$H\&L>$ $C\&O$
\wedge DJI	6251	0.57	0.61	0.51	0.51	0.30	59.99	0.00	0.00	0.00	100	0.00	0.00	100	100	100
\wedge IXIC	6326	0.63	0.61	0.58	0.57	79.83	50.06	42.67	35.09	88.18	11.82	0.00	0.00	100	98.25	98.25
\wedge NDX	6082	0.60	0.60	0.55	0.55	51.61	45.89	14.04	12.50	51.68	48.32	0.00	0.00	95.74	100	95.74
\wedge GSPC	7534	0.58	0.60	0.53	0.53	20.36	47.36	0.00	0.00	9.88	90.12	0.00	0.00	100	100	100

Tabla 4-15: Resumen del análisis dinámico de la predictibilidad para los índices de EEUU: Dow Jones Industrial Average (\wedge DJI), NASDAQ Composite (\wedge IXIC), Nasdaq 100 (\wedge NDX) y S&P 500 (\wedge GSPC). La ventana base utilizada para el análisis dinámico es de 1440 muestras.

En el Anexo D.3 hemos adjuntado las tablas con los resultados de la exploración dinámica, con las tres longitudes base, para los componentes de índice Dow Jones Industrial Average (\wedge DJI). Y que se pueden interpretar fácilmente siguiendo el ejemplo mostrado en la Tabla 4-9.

4.3.1.2-c) Comparación gráfica entre las exploraciones dinámicas de H, ρ_1 e ip

Si realizamos las exploraciones dinámicas de H, ρ_1 e ip , con el mismo tamaño de ventana para un determinado activo y las representamos gráficamente, a pesar de que en el eje de ordenadas tendremos medidas de cosas distintas (como el exponente de Hurst, la correlación ρ_1 y la probabilidad de ip), podemos realizar una comparación de los resultados obtenidos.

Las figuras [Fig.4.1](#) y [Fig.4.2](#) muestran las exploraciones dinámicas de H , ρ_1 e ip para el índice de *Francia CAC40* ($\wedge FCHI$) y el índice del *Reino Unido* ($\wedge FTSE 100$) respectivamente. En el eje de abscisas se representan las ventanas exploradas y en el eje de ordenadas se representa el exponente H para la gráfica de la izquierda, la correlación de primer retardo ρ_1 en la gráfica central y el índice de predictibilidad ip en la gráfica de la derecha. Recordemos que los parámetros utilizados para determinar la ip en este experimento son los de [Tabla 4-1](#), muy genéricos y sencillos.

La [Fig.4.1](#) representa las tres exploraciones, con ventanas de 1440 muestras, para el *CAC40*. Las gráficas de esta figura muestran los resultados obtenidos para las 1280 ventanas de 1440 muestras cada una, con las que se ha explorado dicho histórico de 2723 observaciones.

Los resultados mostrados en las gráficas de la [Fig.4.1](#) aparecen compactados en la fila correspondiente al $\wedge FCHI$ de las siguientes tablas de exploración dinámica:

- Gráfica de la izquierda en la [Tabla 2-13](#) para la exploración dinámica de H , con intervalos de 1440 muestras.
- Gráfica central en la [Tabla 3-17](#) para la exploración dinámica de ρ_1 , con intervalos de 1440 muestras.
- Gráfica de la derecha en la [Tabla 4-12](#) para la exploración dinámica de ip , con intervalos de 1440 muestras.

Observamos que las cuatro series tienen un ip diferente, siendo más elevado el de las series H y L y más cercano a 0.5 en las series C y θ . Resultado que se mantiene para las 1280 ventanas analizadas en la exploración. Comparando la tres gráficas de la figura, podemos observar la clara relación que presentan el ρ_1 y el ip , de las cuatro series con el exponente H de dichas series.

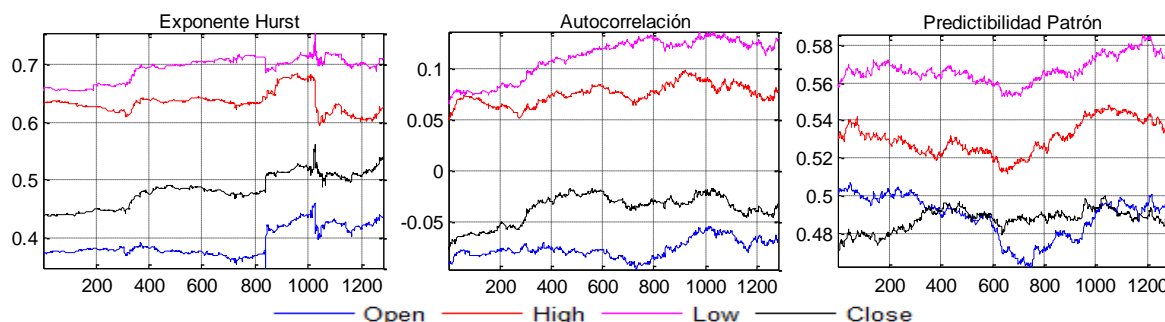


Fig.4-1: Exploración dinámica de H , coeficiente de autocorrelación ρ_1 e ip , con ventanas de 1440 muestras, para el CAC40

La [Fig.4.2](#) representa la exploración dinámica del exponente de Hurst (gráfica izquierda), la autocorrelación ρ_1 (gráfica central) y la predictibilidad ip (gráfica derecha), con ventanas de 1440 muestras, para el índice del *Reino Unido* ($\wedge FTSE 100$). Las gráficas de la [Fig.4.2](#) muestran 2746 estimaciones realizadas sobre 4186 observaciones.

Los resultados mostrados en las gráficas de la [Fig.4.2](#) aparecen compactados en la fila correspondiente al \wedge FTSE de las siguientes tablas de exploración dinámica:

- Gráfica de la izquierda en la [Tabla 2-13](#) para la exploración dinámica de H , con intervalos de 1440 muestras.
- Gráfica central en la [Tabla 3-17](#) para la exploración dinámica de ρ_1 , con intervalos de 1440 muestras.
- Gráfica de la derecha en la [Tabla 4-12](#): para la exploración dinámica de ip , con intervalos de 1440 muestras.

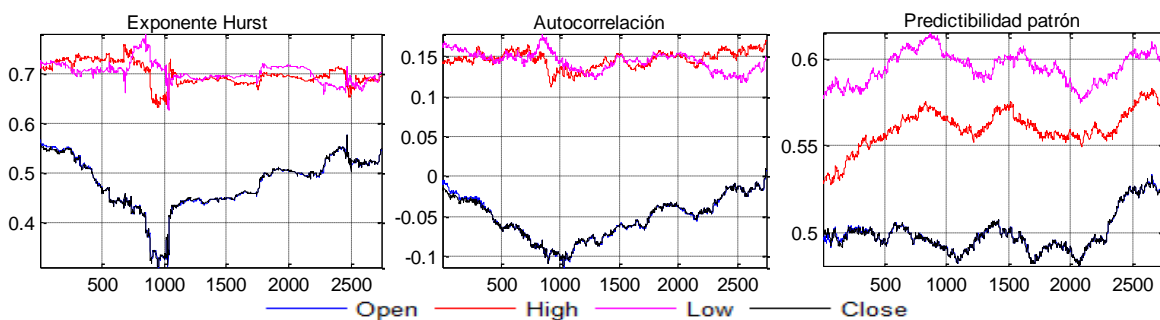


Fig.4-2: Exploración dinámica de H , coeficiente de autocorrelación ρ_1 e ip , con ventanas de 1440 muestras, para el FTSE 100

Mediante la comparación de las gráficas de la [Fig.4.2](#), podemos confirmar que se repiten los resultados observados en la figura anterior. Destacar que, lo verdaderamente importante de estos resultados es que se repiten sistemáticamente a lo largo de la gran cantidad de activos analizados.

Finalmente concluimos el experimento diciendo que, mediante la herramienta ip , y con los parámetros más genéricos ([Tabla 4-1](#)), hemos podido evidenciar empíricamente, que existe cierta relación entre el exponente H y la predictibilidad de las series financieras, siendo más predecibles las series H y L que las C y θ . Además, hemos comprobado que, estos resultados también se repiten sistemáticamente, para todos los activos analizados y con cualquier tamaño de ventana (para cualquier longitud de la serie analizada).

Atendiendo a estos resultados, podemos ampliar la [Tabla 3-2](#) de las relaciones entre H y ρ_1 del apartado 3.1.2, con la [Tabla 4-16](#) que relaciona los valores de H , ρ_1 y la predictibilidad ip de una serie financiera.

Si $H \rightarrow 0$	\Leftrightarrow	$\rho_1 \rightarrow -1$	\Leftrightarrow	$ip \rightarrow 0$
Si $H \rightarrow 0.5$	\Leftrightarrow	$\rho_1 \rightarrow 0$	\Leftrightarrow	$ip \rightarrow 0.5$
Si $H \rightarrow 1$	\Leftrightarrow	$\rho_1 \rightarrow 1$	\Leftrightarrow	$ip \rightarrow 1$

Tabla 4-16: Relaciones entre H, ρ_1 e ip

Interpretamos la [Tabla 4-16](#) diciendo que, si H se aproxima a 0, ρ_1 se aproxima a -1 e ip a 0. Si H se aproxima a 0.5, ρ_1 se aproxima a 0 e ip a 0.5. Si H se aproxima a 1, ρ_1 se aproxima a 1 e ip a 1.

4.4. Experimento II.

La filosofía de este experimento es básicamente la misma que la del experimento I, aunque utilizando unos parámetros más restrictivos para el cálculo de ip , seleccionando como semilla vectores del tipo $\mathbf{s}^T = [s_{t-3}, s_{t-2}, s_{t-1}, s_t]^T$. Con esta semilla exploraremos la serie financiera buscando conjuntos de cuatro observaciones consecutivas $\mathbf{x}^T = [x_{t-3}, x_{t-2}, x_{t-1}, x_t]^T$, tales que su correlación de Pearson r con \mathbf{s}^T , según fórmula (4-2), sea superior a un valor r_0 preestablecido. Cuando encontremos un conjunto de cuatro observaciones consecutivas \mathbf{x}^T , tales que su correlación con \mathbf{s}^T , sea superior al valor establecido, diremos que hemos encontrado un patrón en la serie.

La [Tabla 4-17](#) resume los parámetros utilizados para calcular el índice de predictibilidad ip en el experimento II. En este caso hemos elegido como semilla al vector $\mathbf{s}^T = [0.9596 \ 0.9641 \ 0.9633 \ 1.0000]^T$, la condición post-patrón es la misma que en el experimento I y el umbral de correlación es $r_0 > 0.90$, mucho más restrictivo que en el caso anterior. Si reducimos mucho r_0 estaremos admitiendo como patrones generados por la semilla \mathbf{s} conjuntos de observaciones bastante dispares, lo que aumenta el número de patrones detectados pero baja el índice de predictibilidad, ip .

Semilla	$\mathbf{s}^T = [0.9596 \ 0.9641 \ 0.9633 \ 1.0000]^T$
Condición post-patrón	$x_t < x_{t+1}$ (condición binaria)
Umbral de correlación r_0	$r_0 > 0.90$

Tabla 4-17: Parámetros de ip en el experimento II

4.4.1. Resultados de experimento II

En la [Tabla 4-18](#) y la [Tabla 4-19](#) representamos los resultados obtenidos en este experimento. En la primera columna aparecen los *ticker* de los índices analizados. La segunda columna representa el número de muestras u observaciones de las que consta cada una de las series del histórico. Las siguientes columnas encabezadas por H, L, C y θ , muestran los resultados para cada una de las cuatro series respectivamente. Cada una de estas columnas esta subdividida en tres: la $nptr$ representa el número de patrones encontrados en la serie, la $ncpp$ indica el número de condiciones post-patrón cumplidas y la ip muestra el índice de predictibilidad obtenido para dicha serie, utilizando los parámetros de la [Tabla 4-17](#).

Ticker	Nº muestras	H			L			C			θ		
		$nptr$	$ncpp$	ip	$nptr$	$ncpp$	ip	$nptr$	$ncpp$	ip	$nptr$	$ncpp$	ip
^FCHI	2723	217	127	0.59	207	116	0.56	220	104	0.47	208	104	0.50
^GDAXI	1786	160	93	0.58	148	83	0.56	157	83	0.53	147	75	0.51
^FTSE	4186	319	193	0.61	369	224	0.61	306	154	0.50	304	154	0.51
^IBEX	3795	306	196	0.64	312	179	0.57	275	154	0.56	287	149	0.52
Semilla	s=[0.9596 0.9641 0.9633 1.0000]												

Tabla 4-18: Predictibilidad para las cuatro series de los índices de Francia CAC 40 (^FCHI), Alemania DAX (^GDAXI), Reino Unido (^FTSE 100) y España (^IBEX) utilizando como semilla el vector [0.9596 0.9641 0.9633 1.0000]

Ticker	Nº muestras	H			L			C			θ		
		$nptr$	$ncpp$	ip	$nptr$	$ncpp$	ip	$nptr$	$ncpp$	ip	$nptr$	$ncpp$	ip
^DJI	7691	710	450	0.63	761	482	0.63	653	352	0.54	648	338	0.52
^IXIC	7766	692	514	0.74	705	466	0.66	660	419	0.63	640	390	0.61
^NDX	7522	653	459	0.70	678	440	0.65	614	368	0.60	599	363	0.61
^GSPC	8974	809	557	0.69	841	503	0.60	778	451	0.58	777	455	0.59
Semilla	s=[0.9596 0.9641 0.9633 1.0000]												

Tabla 4-19: Predictibilidad para las cuatro series de los índices Dow Jones Industrial Average (^DJI), NASDAQ Composite (^IXIC), Nasdaq 100 (^NDX) y S&P 500 (^GSPC). Utilizando como semilla el vector [0.9596 0.9641 0.9633 1.0000]

Como norma general, se observa que ha aumentado el ip y ha disminuido el número de patrones detectados. Las series C y θ continúan con valores más próximos a 0.5, lo que nos indica que sus cpp son más difíciles de predecir.

Un ejemplo de lectura de las tablas y que confirma el anterior razonamiento son los resultados obtenidos para el ^FTSE en la [Tabla 4-18](#), donde la semilla $s^T=[0.9596 \ 0.9641 \ 0.9633 \ 1.0000]^T$ ha generado:

- 319 patrones en la serie H , y que tienen un índice de predictibilidad ip de 0.61.
- 369 patrones en la serie L , que también tienen un ip de 0.61.
- 306 patrones en la serie C , con un índice de predictibilidad ip de 0.50.
- 304 patrones en la serie θ , con un índice de predictibilidad ip de 0.51.

4.5.Experimento III. Semillas en forma de matriz.

Se ha podido comprobar que las series L y H son las que mayor información portan en términos de predictibilidad, pero las series θ y C también aportan información que no debemos desperdiciar. Es más, las relaciones entre las cuatro series también es información valiosa que podemos aprovechar.

En este experimento veremos cómo podemos calcular el ip de las series L y H combinando las observaciones de las cuatro series que forman el histórico de un activo. Para ello utilizaremos como germen una matriz semilla S de dimensiones $m \times n$ que nos

generara patrones que permitirán cruzar datos de las cuatro series del activo financiero organizados en una matriz $m \times n$, \mathbf{X}_t tales como:

$$S_t = \begin{bmatrix} S_{11} & \dots & S_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ S_{m1} & \dots & S_{mn} \end{bmatrix} \quad y \quad X_t = \begin{bmatrix} X_{11} & \dots & X_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ X_{m1} & \dots & X_{mn} \end{bmatrix}$$

En este caso, para encontrar el patrón extendemos la correlación anterior a la expresión (4-4), donde m y n son las dimensiones de las matrices:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{tij} - \bar{x})(s_{ij} - \bar{s})}{\sqrt{(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_i - \bar{x})^2)(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (s_i - \bar{s})^2)}} \quad (4-4)$$

donde:

$$\bar{x} = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \bar{x}_{ij} \quad y \quad \bar{s} = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \bar{s}_{ij} \quad (4-5)$$

Con este experimento complicamos un poco más la filosofía de los anteriores, trabajado con semillas \mathbf{S} de dimensiones 3×4 con las que buscaremos en la serie conjuntos de observaciones estructuradas en una matriz \mathbf{X}_t de dimensiones 3×4 de la siguiente forma:

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \end{bmatrix} \quad X_t = \begin{bmatrix} h_t & l_t & c_t & o_t \\ h_{t-1} & l_{t-1} & c_{t-1} & o_{t-1} \\ h_{t-2} & l_{t-2} & c_{t-2} & o_{t-2} \end{bmatrix}$$

Siendo h_t, l_t, c_t y o_t el valor que toman las cuatro series de un determinado activo financiero en el instante t . El procedimiento consiste en recorrer el histórico del activo buscando matrices \mathbf{X}_t de dimensiones 3×4 , que presenten una correlación (4-4) con la semilla \mathbf{S} , superior a un valor r_0 predeterminado. Cuando encontremos en el histórico una matriz \mathbf{X}_t de estas características, decimos que hemos encontrado un patrón.

En la [Tabla 4-20](#) se muestran los parámetros para calcular ip de los patrones detectados en este experimento. Donde se muestra una semilla genérica ya que en el experimento utilizaremos diferentes semillas \mathbf{S} , de dimensiones 3×4 . La condición post-patrón $X_t < X_{t+1}$, es la misma que en experimentos anteriores, siendo $h_t < h_{t+1}$ cuando estudiamos la serie H y $l_t < l_{t+1}$ cuando estudiamos la serie L . El umbral r_0 usado es bastante elevado, lo que reduce el número de patrones detectados, pero aumenta el ip .

Semilla	$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \end{bmatrix}$
Condición post-patrón	$X_t < X_{t+1}$
Umbral de correlación r_0	$r_0 > 0.97$

Tabla 4-20: Parámetros de ip en el Experimento III

4.5.1. Índices de predictibilidad para la serie H

Utilizando los parámetros de la [Tabla 4-20](#), buscamos patrones en los históricos de varios índices americanos. Cuando aparece un patrón comprobamos si se ha cumplido la condición post-patrón ($h_t < h_{t+1}$) en la serie H .

En la [Tabla 4-21](#) hemos representado los resultados de aplicar este método a los índices diarios de EEUU que figuran en la columna *ticker* cuya interpretación se describe a continuación: en la columna *ticker* indicamos los símbolo del activo analizado, en la columna *nptr* aparece el número de patrones encontrados usando la semilla que se muestra en la fila inferior, nombrada como **semilla**. La columna *ncpp* muestra el número de condiciones post-patrón que se cumplen para la serie H , y en la *ip* aparece la predictibilidad de la serie H .

Ticker	<i>nptr</i>	<i>ncpp</i>	<i>ip</i>	<i>nptr</i>	<i>ncpp</i>	<i>ip</i>	<i>nptr</i>	<i>ncpp</i>	<i>ip</i>
^DJI	17	17	1.00	161	83	0.52	53	1	0.02
^IXIC	6	6	1.00	81	58	0.72	34	0	0.00
^NDX	13	12	0.92	181	99	0.55	47	2	0.04
^GSPC	26	23	0.88	221	127	0.57	83	4	0.05
Semilla	$S_1 = \begin{bmatrix} 0.9950 & 0.9853 & 0.9949 & 0.9855 \\ 0.9923 & 0.9815 & 0.9860 & 0.9922 \\ 1.0000 & 0.9892 & 0.9914 & 0.9974 \end{bmatrix}$			$S_2 = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.9952 & 0.9964 & 0.9954 \\ 0.9976 & 0.9897 & 0.9953 & 0.9897 \\ 0.9914 & 0.9832 & 0.9899 & 0.9836 \end{bmatrix}$			$S_3 = \begin{bmatrix} 0.9818 & 0.9463 & 0.9532 & 0.9818 \\ 0.9906 & 0.9738 & 0.9821 & 0.9851 \\ 1.0000 & 0.9789 & 0.9850 & 0.9996 \end{bmatrix}$		

Tabla 4-21: Resultados de explorar los índices de EEUU con las semillas S_1, S_2 y S_3 observando la serie H con los parámetros de la [Tabla 4-20](#)

Como ejemplo de interpretación de la [Tabla 4-21](#) podemos observar que: para el ^DJI explorado con la semilla S_1 se identifican 17 patrones en el histórico, para los cuales siempre se ha cumplido la condición post-patrón $h_t < h_{t+1}$. No sería descabellado pensar que, si analizando este activo en tiempo real, apareciese otro patrón se cumpliera que $h_t < h_{t+1}$.

Otro ejemplo lo tenemos en histórico del S&P 500 (^GSPC) explorado con la semilla S_3 , mediante la que encontramos 83 patrones, para los que solo en cuatro se cumple la condición post-patrón (*cpp*). Con lo que, si en un análisis en tiempo real nos aparece un patrón, podemos esperar que se cumpla que $h_t > h_{t+1}$, que la observación siguiente sea menor que la actual. Recordemos que, cuando describíamos el *ip* decíamos que: los patrones generados por una semilla en una serie financiera, son más predecibles cuando su *ip* se aproxima a los extremos del intervalo [0,1].

Otra lectura que podemos hacer en [Tabla 4-21](#) es que, si exploramos estos índices con la semilla S_2 , no vamos a poder predecir el comportamiento de H , ya que, aunque esta semilla genera muchos patrones tiene un ip más cercano a 0.5 para todos los índices explorados.

Hemos puesto esta tabla con las exploraciones de las semillas S_1 , S_2 y S_3 , ya que son tres casos bastante representativos de los valores más significativos que puede tomar el ip :

- $ip = 0$: tendremos patrones con la cpp (condición post-patrón) muy predecible
- $ip = 0.5$: patrones con la cpp impredecible
- $ip = 1$: patrones con la cpp muy predecible

4.5.2. Índices de predictibilidad para la serie L

En este caso hemos utilizado los parámetros de la [Tabla 4-20](#), para explorar los históricos de varios índices de EEUU buscando patrones. Cuando aparece un patrón comprobamos si se ha cumplido la condición post-patrón ($I_t < I_{t+1}$) en la serie L .

La interpretación de la tabla es la misma que la descrita en el caso anterior para la [Tabla 4-21](#). Como en el caso anterior, se han explorado los índices que aparecen en la columna *ticker* con tres semillas S_4 , S_5 y S_6 , que nos generan patrones con un ip próximo a 0, a 0.5 y a 1 respectivamente. Como podemos ver, estas semillas que generan patrones con un ip muy parecido para todos los activos estudiados, en el siguiente experimento trabajaremos con semillas más específicas para el activo estudiado y que generan patrones que proporcionan mejores ip .

Podemos poner como ejemplo de lectura de la [Tabla 4-22](#) el caso de la exploración del Dow Jones Industrial Average (^DJI) con la semilla S_6 , que genera 119 patrones, en los que se cumple 115 veces la condición post-patrón (cpp) en la serie L . Sería de esperar estadísticamente que, si estamos analizando este activo en tiempo real y nos aparece un patrón generado por esta semilla, se produjese de nuevo la condición post-patrón para la serie L . Esta es la idea que vamos a desarrollar en el experimento siguiente, para predecir las series de precios de los activos financieros.

Un ejemplo del caso contrario sería la semilla S_5 que ha generado 234 patrones en el histórico del Dow Jones Industrial Average, habiéndose cumplido la cpp en la serie L 117 veces, con lo que tenemos un ip de 0.5 para que se cumpla la cpp en los patrones generados por esta semilla. Es decir, si encontramos un patrón no tenemos ninguna garantía estadística para predecir si se va a cumplir la cpp en la serie L , o no.

Ticker	$nptr$	$ncpp$	ip	$nptr$	$ncpp$	ip	$nptr$	$ncpp$	ip			
^DJI	40	3	0.07	234	117	0.50	119	115	0.97			
^IXIC	25	5	0.20	162	91	0.56	108	101	0.94			
^NDX	47	7	0.15	228	121	0.53	128	122	0.95			
^GSPC	62	12	0.19	271	138	0.51	179	165	0.92			
Semilla	$S_4 = \begin{bmatrix} 0.9949 & 0.9789 & 0.9789 & 0.9945 \\ 1.0000 & 0.9929 & 0.9943 & 0.9961 \\ 0.9984 & 0.9925 & 0.9960 & 0.9934 \end{bmatrix}$				$S_5 = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.9898 & 0.9956 & 0.9936 \\ 0.9984 & 0.9813 & 0.9937 & 0.9813 \\ 0.9826 & 0.9678 & 0.9806 & 0.9696 \end{bmatrix}$				$S_6 = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.9739 & 0.9987 & 0.9739 \\ 0.9759 & 0.9529 & 0.9736 & 0.9563 \\ 0.9650 & 0.9490 & 0.9569 & 0.9580 \end{bmatrix}$			

Tabla 4-22: Resultados de explorar los índices de EEUU con las semillas S_4, S_5 y S_6 observando la serie L , con los parámetros de la [Tabla 4-20](#)

Como conclusión, y para ir introduciendo conceptos del siguiente experimento, podemos decir que: una semilla será más relevante en la medida que su índice de predictibilidad se acerque más a los extremos del intervalo $[0,1]$ y el número de patrones que genera sea mayor. Un germen o semilla que genera patrones con un índice de predictibilidad cercano a 0.5 no aporta información, por muy elevado que sea el número de patrones que genere en las series de un activo.

4.6. Experimento IV: Propuesta de método para predecir un activo financiero

Con este experimento avanzamos un paso más y basándonos en los resultados de experimentos anteriores, proponemos un método para predecir la evolución de un activo a corto plazo.

En este apartado el planteamiento es ligeramente distinto y en vez de utilizar una semilla predefinida, usaremos semillas específicas para cada histórico, cogiéndolas de las últimas observaciones del propio histórico. Con esto garantizamos que las últimas observaciones disponibles pertenezcan al conjunto de patrones generados por la semilla. Veremos la importancia de este detalle al explicar el funcionamiento en tiempo real.

4.6.1. Descripción del prototipo básico

Se trata de un método, basado en los experimentos anteriores, con el que pretendemos predecir el comportamiento de las series L y H de un activo en la sesión siguiente a la actual. Se podría haber incluido la predicción de la serie C , pero, al tratarse de un prototipo experimental y para no complicar más la explicación, lo dejamos para siguientes versiones.

4.6.1.1. Funcionamiento del método

La novedad sobre los experimentos anteriores es que no utilizamos una semilla genérica, sino que la construimos con las dos últimas observaciones del histórico, con lo que tendremos una matriz 2×4 como \mathbf{S} :

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} h_t & l_t & c_t & o_t \\ h_{t-1} & l_{t-1} & c_{t-1} & o_{t-1} \end{bmatrix}$$

Siendo h_t, l_t, c_t y o_t las últimas muestras conocidas de cada serie. Con esta semilla buscamos en la serie conjuntos de observaciones estructuradas en una matriz \mathbf{X}_i de dimensiones 2×4 de la siguiente forma:

$$\mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} h_i & l_i & c_i & o_i \\ h_{i-1} & l_{i-1} & c_{i-1} & o_{i-1} \end{bmatrix}$$

Siendo h_i, l_i, c_i y o_i las muestras i -ésimas de cada serie, pudiendo tomar i valores entre 2 y t . El procedimiento para buscar los patrones consiste en recorrer el histórico del activo buscando matrices \mathbf{X}_t de dimensiones 2×4 que presenten una correlación (4-4) con la semilla \mathbf{S} , superior a un valor r_0 predeterminado. Según esto podemos asegurar que las dos últimas barras del histórico van a pertenecer al conjunto de patrones generados por la semilla. En la [Tabla 4-23](#) se muestran los parámetros utilizados en este método para el cálculo del ip de las series H y L .

Semilla	$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} h_t & l_t & c_t & o_t \\ h_{t-1} & l_{t-1} & c_{t-1} & o_{t-1} \end{bmatrix}$	
Condición post-patrón	$x_t < x_{t+1}$	$h_t < h_{t+1}$
		$l_t < l_{t+1}$
Umbral de correlación r_0	$r_0 > 0.98$	

Tabla 4-23: Parámetros de ip en el método de predicción

4.6.1.1-a) Descripción del proceso paso a paso

➤ Paso 1

Construimos la matriz semilla \mathbf{S} de dimensión 2×4 , con las dos últimas observaciones disponibles de las cuatro series.

➤ Paso 2

Buscamos el número de patrones ($nptr$) que la semilla \mathbf{S} genera en el Histórico. Para ello exploramos el histórico buscando matrices \mathbf{X}_t de dimensiones 2×4 que presenten una correlación (4-4) con la semilla \mathbf{S} , superior a un valor $r_0 > 0.98$.

➤ Paso 3

Buscamos el número de condiciones post-patrón ($ncpp$) que se cumplen, tanto para la serie $H(h_t < h_{t+1})$, como para la serie $L(l_t < l_{t+1})$.

➤ Paso 4

Con el número de patrones $nptr$ generados, a lo largo del histórico, por la semilla actual y el número de condiciones post-patrón $ncpp$, que se cumplen para cada una de las series L y H , podemos determinar el índice de predictibilidad ip mediante el cociente (4-1), para cada una de las dos series, H y L .

➤ Paso 5

Si la semilla actual genera un número de patrones superior a un valor predeterminado y el ip para alguna de las dos series (o de las dos al mismo tiempo) cumple unas condiciones, también predeterminadas, diremos que hemos encontrado una semilla relevante. Las condiciones predeterminadas en este experimento para semilla relevante son:

$$(ip > 0.8 \parallel ip < 0.2) \& nptr > 25$$

➤ Paso 6

Una vez identificada una semilla relevante, podemos predecir la observación siguiente a la actual para la serie que haya cumplido las condiciones del ip (o las dos si ambas la cumplen), según [Tabla 4-24](#).

ip	Serie	Predicción
$ip > 0.8$	H	$h_{t+1} > h_t$
	L	$l_{t+1} > l_t$
$ip < 0.2$	H	$h_{t+1} \leq h_t$
	L	$l_{t+1} \leq l_t$

Tabla 4-24: Posibles predicciones en función de la serie y del ip

➤ Paso 7

Como se supone que estamos trabajando en tiempo real, cuando tengamos la siguiente observación construimos la nueva semilla, con las que ahora son las dos últimas observaciones. Con esta semilla repetimos todos los pasos del proceso y así sucesivamente con las nuevas observaciones que vayamos recibiendo.

4.6.1.1-b) Simulación real para el histórico de Telefónica.

Para analizar el comportamiento del método dividimos el histórico en dos partes, utilizando la primera para buscar los patrones y la segunda para realizar el test. En el caso del histórico de Telefónica que consta de 3926 observaciones, separamos las 3000 primeras observaciones y dejamos las 926 restantes para realizar el test. Empezamos a trabajar como si la 3002 fuese la última observación conocida, considerando las 924 restantes como futuro desconocido.

La primera semilla estará formada por los valores que toman las cuatro series en las observaciones 3002 y 3001. Con esta semilla realizamos los pasos 1 a 6 del proceso, en el paso 7 construimos la nueva semilla con las observaciones 3003 y 3002. Así sucesivamente hasta terminar el histórico.

Los resultados de las predicciones realizadas en esas 924 sesiones desconocidas de Telefónica, se muestran en la [Tabla 4-26](#). Para simplificar, en la [Tabla 4-25](#), hemos dado un nombre a cada una de las posibles predicciones que nos genera el método.

Predicción	Nombre
$h_{t+1} > h_t$	Tipo I
$h_{t+1} \leq h_t$	Tipo II
$l_{t+1} \leq l_t$	Tipo III
$l_{t+1} > l_t$	Tipo IV

Tabla 4-25: Tipos de predicción

Con lo que la interpretación de [Tabla 4-26](#) sería la siguiente: las columnas tipo I a tipo IV representan el número de predicciones que hemos hecho de cada tipo y la columna que está a la derecha de cada tipo de predicción, representa el porcentaje de aciertos que hemos tenido en cada tipo de predicción.

Ticker	Tipo I	Aciertos (%)	Tipo II	Aciertos (%)	Tipo III	Aciertos (%)	Tipo IV	Aciertos (%)
TEF	14	92.86%	40	92.5%	12	75%	23	95.65%

Tabla 4-26: Resultados de la simulación real sobre las últimas 924 muestras de Telefónica.

Podemos desarrollar los resultados mostrados en la [Tabla 4-26](#), diciendo que se han realizado las siguientes predicciones:

- 14 predicciones tipo I, acertando el 92.86% de las predicciones
- 40 predicciones tipo II, acertando el 92.5% de las predicciones
- 12 predicciones tipo III, acertando el 75% de las predicciones
- 23 predicciones tipo IV, acertando el 95.65% de las predicciones.

4.6.1.1-c) Simulación real para varios históricos

Hemos reproducido la simulación realizada para telefónica para distintos activos obteniendo los resultados que se muestran en la [Tabla 4-27](#) que aparece a continuación.

Ticker	Tipo I	Aciertos (%)	Tipo I	Aciertos (%)	Tipo I	Aciertos (%)	Tipo I	Aciertos (%)
SAN	23	86.96	27	96.3	6	83.33	34	97.06
BBVA	25	88	33	93.94	16	93.75	46	95.65
REE	30	83.33	36	80.56	13	61.54	60	91.67
^IBEX	42	90.48	40	97.5	7	100	53	94.34
^FTSE	59	84.75	128	89.84	31	70.97	156	89.1
^FCHI	14	78.57	8	100	2	50	23	78.26
^IXIC	131	78.63	94	89.36	47	70.21	121	86.78
^DJI	88	78.41	139	89.93	58	75.86	225	91.11
^GSPC	93	74.19	108	88.89	39	71.79	136	86.03
^NDX	68	83.82	51	84.31	24	70.83	71	85.92

Tabla 4-27: Resultados de la simulación real para varios activos

Los resultados hablan por sí mismos y no dejan lugar a dudas sobre la calidad de las predicciones, superando ampliamente, en la mayoría de los casos, el 80% de aciertos. Estas primeras pruebas ya nos han permitido identificar algunos puntos fuertes y posibles mejoras que se pueden ir incorporando al método.

➤ Puntos fuertes

- El elevado porcentaje de aciertos en las predicciones.
- Fácil de usar por cualquier persona no experta ya que directamente nos proporciona la predicción, sin tener que interpretar gráficas ni figuras de ningún tipo.
- Nos da la predicción y la fiabilidad de la predicción.
- Fácil de integrar en un sistema automático de trading.

➤ Posibles mejoras

- Añadir a las predicciones la serie de los cierres (C)
- Modificar estructura de las semillas para conseguir mayor número de predicciones.
- Modificar cpp para realizar predicciones a más largo plazo
- Modificar la estructura de las semillas y condiciones post-patrón para detectar anticipadamente cambios de tendencia.
- Introducir nuevas variables en la semilla, como puede ser el volumen
- Trabajar con varias semillas de distintas estructuras (matrices y vectores de distintos tamaños) en paralelo.

- Utilizar otras métricas distintas a la correlación para encontrar los patrones como, por ejemplo, la distancia Euclídea.

4.6.1.1-d) Ejemplo de utilización en los mercados

Seguidamente se expone un sencillo ejemplo de como utilizar este método, con los datos disponibles al cierre de la sesión, para obtener beneficios en los mercados.

Al cierre de la sesión exploramos los mercados buscando activos que estén “en su punto”, es decir, activos para los cuales el método nos dé la predicción, con una probabilidad superior a un valor determinado (por ejemplo 0.8), de que los máximos/mínimos superen, por encima/por debajo, a los de la sesión anterior.

Si en la apertura de la sesión siguiente podemos entrar con un margen suficiente entre el precio actual y la predicción, abrimos posiciones y ponemos un stop loss para limitar las pérdidas en caso de que la predicción no se cumpla. Abriremos posiciones largas si la predicción es para la serie de los máximos y cortas si es para la serie de los mínimos.

Finalmente, si la predicción se cumple, deshacemos posiciones y recogemos beneficios. Si la predicción no se ha cumplido, habrán saltado los stop loss y asumiremos las pérdidas.

Podemos asegurar que si repetimos el proceso un número suficiente de veces acabaremos obteniendo un balance de ganancias positivo. Afirmación que estamos en condiciones de realizar abalados por los resultados obtenidos con las simulaciones reales descritas en el apartado anterior de este experimento.

4.7. Breve resumen de resultados

En este capítulo, mediante una serie de herramientas de desarrollo propio, hemos realizado varios experimentos, con los que hemos podido relacionar de una forma empírica los valores H y ρ_1 de una serie, con la información que porta dicha serie, en términos de predictibilidad. Con lo que se ha demostrado que las series L y H son más fáciles de predecir que las C y θ .

Los experimentos realizados han ido aumentando en complejidad hasta llegar al experimento IV, donde exponemos la filosofía de un método para predecir el histórico de un activo financiero.

Se trata de un prototipo en fase embrionaria, que ya en las primeras pruebas presenta resultados que superan ampliamente el 80 y el 90% de aciertos sobre la predicción de eventos muy simples tales como que el valor de la serie del día siguiente sea superior a la última registrada. En principio, no será difícil ampliar las predicciones para la serie C o encontrar semillas que, por ejemplo, detecten patrones que anticipen un cambio de tendencia.

CAPÍTULO 5

CAPÍTULO 5: Exploración de estrategias no convencionales para la generación automática de señales de entrada y salida a los mercados.

5.1. Introducción

En la introducción apuntábamos que esta memoria estaba dedicada en su mayor parte al estudio de los activos mediante la estimación dinámica del exponente de Hurst, sin embargo hemos querido incluir en este capítulo una breve exposición de diferentes trabajos llevados a cabo durante este periodo de investigación con el objetivo principal de explorar técnicas para la generación automática de señales temporales que indiquen puntos de entrada y salida a los mercados con el intento de generar beneficios de manera persistente en el tiempo.

En estos trabajos se aborda el análisis de las series financieras desde tres diferentes perspectivas o enfoques. Estos enfoques se caracterizan por utilizar técnicas ampliamente utilizadas en diferentes campos de aplicación pero que no forman parte del '*mainstream*' en el análisis de las series financieras. En algunos casos, hemos tenido que realizar ligeras modificaciones para poder aplicarlas en el contexto deseado y es por ello que podemos considerar que, en el campo de las series financieras, son enfoques no convencionales. Es importante destacar que una vez establecida cualquier estrategia, ésta se ha contrastado utilizando datos distintos a los utilizados para su desarrollo a fin de evaluar el grado de validez de los resultados. Aunque los resultados experimentales obtenidos son similares a los proporcionados por las mejores técnicas existentes, que hemos evaluado. Consideramos su inclusión de forma breve en la memoria de la tesis por la novedad de los enfoques.

En ninguno de las aproximaciones presentadas se pretende desarrollar ningún modelo de las series ni estimar densidades de probabilidades para el cálculo de parámetros de mayor complejidad como podrían ser entropías o informaciones mutuas, etc... porque el objetivo es que trabajen en tiempo real. La característica de los enfoques es que todos ellos son de tipo reactivo en el sentido de ocurre A ('la señal cruza el nivel 0 con pendiente positiva') se activa B ('una orden de compra').

En el caso del primer enfoque aplicamos técnicas de morfología matemática desarrolladas en el procesado de imágenes en sus modalidades binarias, de escala de grises y de color. En el campo del procesado de imágenes, la morfología matemática permite obtener información acerca de la forma y tamaño de los objetos analizados. En nuestro caso, se han adaptado para que pueda funcionar con señales unidimensionales constituidas por las series temporales de precios que se actualizan cada nuevo instante, adaptando a una dimensión una técnica que se utiliza principalmente para procesar imágenes. Las funciones básicas son distintas a las originales y sus propiedades matemáticas difieren de las de las funciones clásicas, pero hemos mantenido el nombre de la técnica que las inspiró.

En el segundo enfoque se ha estudiado la posibilidad de trazar líneas de tendencia de los precios de forma automática a partir de ciertas reglas, para ver si estas líneas rigen el comportamiento de los precios en el futuro. La razón por la cual se ha intentado establecer un conjunto de reglas para determinar, a priori, líneas de tendencia significativas o relevantes es que, en diferido, cualquier representación gráfica de los precios permite trazar un conjunto de líneas que parecen explicar su evolución y sobre las cuales los precios parecen rebotar. Los analistas técnicos utilizan muy habitualmente este recurso, no obstante, las grafican utilizando criterios subjetivos. En todo caso anticipar la línea buena que explique la evolución futura de los precios no es una tarea fácil como hemos podido constatar.

Finalmente se ha utilizado la teoría de filtros discretos lineales e invariantes en el tiempo para generar nuevas señales e interpretarlas en términos de su contenido espectral de acuerdo con teorías bien establecidas en el ámbito de los sistemas de control y de la teoría de filtros. En este contexto los filtros se modelan, tanto a nivel secuencial con ecuaciones en diferencias, como utilizando el dominio transformado a partir de la transformada Z. En este contexto recogemos distintos enfoques que admiten además numerosas variantes. Entre ellas está el desarrollo de filtros alimentados con la serie temporal de precios como si de una señal discreta se tratara, para generar salidas que respondan con un sobre-impulso, a los cambios de tendencia a corto plazo, a la de generar señales rápidas y lentas que se crucen, o bien la de generar señales que oscilan entorno a cero a partir de filtros paso banda, inspirándonos en los osciladores, un tipo de señales muy utilizadas en análisis técnico. La ventaja que obtenemos es que los filtros son fáciles de diseñar, su teoría está muy desarrollada y admiten una interpretación en términos de frecuencia.

Los dos primeros enfoques, el de la morfología matemática y el de las líneas de tendencia utilizan técnicas de análisis no lineales mientras que la tercera de las técnicas, utiliza la teoría de filtros lineales.

5.2. Análisis utilizando morfología matemática

La morfología matemática, comúnmente aplicada para el procesamiento de imágenes, se basa en operaciones de teoría de conjuntos. En el caso de imágenes binarias, los conjuntos tratados son subconjuntos de Z^2 y en el de las imágenes en escala de grises, se trata de conjuntos de puntos con coordenadas en Z^3 .

La morfología matemática fue propuesta originalmente por J.Serra y G. Matheron en 1966 para imágenes binarias [46] pero progresivamente fue extendida para imágenes en nivel de gris y posteriormente en color [47] [48][49].

La dilatación y la erosión son las dos operaciones fundamentales de la morfología matemática a partir de las cuales se derivan funciones más complejas. A grandes rasgos, la dilatación ensancha las fronteras de los objetos en una imagen, mientras que la erosión adelgaza las fronteras de los objetos. Estas operaciones se realizan a partir de un elemento estructurante que proporciona la dimensión y las formas buscadas en las imágenes y suelen tener formas rectangulares, circulares o cuadradas.

Basándonos en los anteriores conceptos hemos implementado dos funciones para realizar una transformación similar a la erosión y la dilatación, en las series temporales financieras. En nuestro caso hemos adaptado los elementos estructurantes bidimensionales reduciéndolos a segmentos unidimensionales de pocos elementos.

A nivel de ejemplo, considerando que el vector $\mathbf{e}=[e_{N-1} \dots e_0]$ es el elemento estructurante, éste se utiliza a modo de ventana y recorre toda la serie temporal almacenando el producto de cada elemento del vector por cada elemento del subconjunto correspondiente de la serie. Luego para cada posición de la ventana el valor de salida correspondiente a la erosión se obtiene de tomar el menor de los productos anteriores y lo colocamos en el último lugar. En términos del producto de Hadamard \odot , la operación se describe:

$$y_t = \min([e_{t-N+1} \dots e_t] \odot [x_{t-N+1} \dots x_t]) \quad (5-1)$$

Donde y_t es el elemento de salida en en instante t . Para la dilatación tomaremos el valor máximo de los productos y el elemento de salida y_t se expresará como:

$$y_t = \max([e_{t-N+1} \dots e_t] \odot [x_{t-N+1} \dots x_t]) \quad (5-2)$$

En la [Fig.5-1](#) hemos representado la erosión y la dilatación de una serie temporal financiera con el elemento estructurante $\mathbf{e}=[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$.

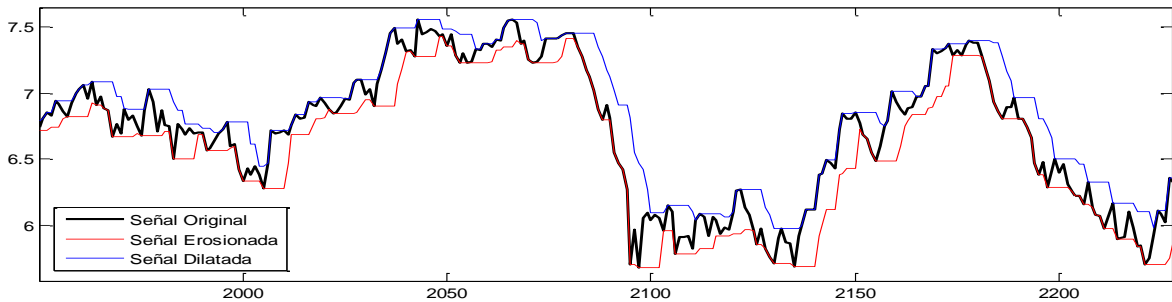


Fig.5-1: Ejemplo de erosión y dilatación de una serie temporal financiera con el elemento estructurante $e=[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$

La Fig.5-2 muestra la misma serie temporal erosionada con $e_r=[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1.08 \ 1]$ y dilatada con $d_i=[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0.8 \ 1]$ como podemos imaginar las posibilidades de ajuste son inmensas, tanto en los valores como en el tamaño de los elementos estructurantes.

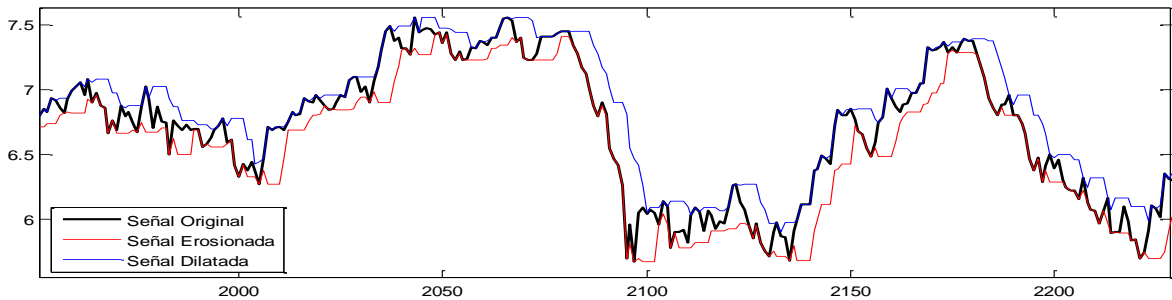


Fig.5-2: Ejemplo de erosión y dilatación de una serie temporal financiera con el elemento estructurante $e=[1 \ 1 \ 1 \ 1.08 \ 1]$

Utilizando las funciones anteriores y una media móvil hemos implementado un indicador técnico, que proporciona señales de apertura y cierre de posiciones, cuando la señal erosión o la señal dilatación se cruzan con la señal de la media móvil. Variando el valor de los componentes y la longitud de los elementos estructurantes así como el número de muestras utilizadas para el cálculo de la media móvil, ajustamos el indicador para obtener mejores resultados.

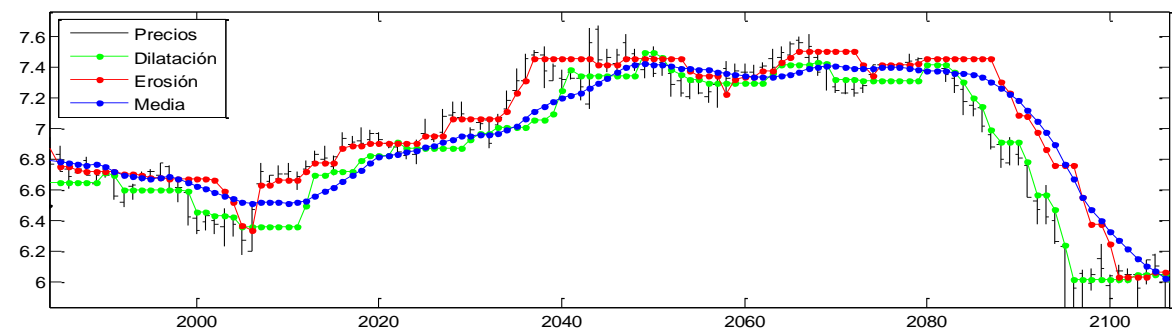


Fig.5-3: Ejemplo gráfico de cruces entre la señal erosionada, la señal dilatada y la media móvil

Seguidamente describimos algunos experimentos realizados con este indicador. En la gráfica a) de la Fig.5-4 hemos representado los cierres de las acciones del Banco de Santander (1917 días). A esta serie le hemos realizado una erosión seguida de una dilatación (Opening) y una dilatación seguida de una erosión (Closing), ambas, con un elemento estructurante uniforme de longitud 8, en rojo se representa la media móvil utilizada (de 34 elementos). En la gráfica b) de la Fig.5-4 se muestra el funcionamiento, donde en rojo aparecen las indicaciones de toma de posiciones cortas y en azul, las señales de toma de posiciones largas.

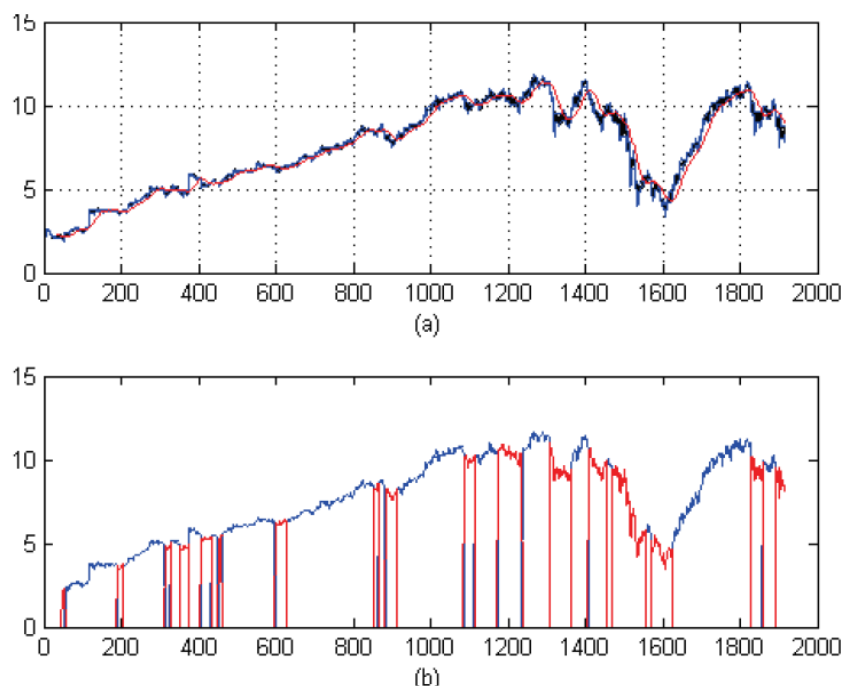


Fig.5-4: Representación de los cierres de las acciones del banco de Santander (1917 días). a) Opening (una erosión seguida de una dilatación) y Closing (una dilatación seguida de una erosión), ambas, con un elemento estructurante uniforme de longitud 8, en azul y media móvil $T=34$, en rojo. b) Funcionamiento del sistema.

5.2.1. Trabajo I: Evaluación del indicador técnico

En estos experimentos evaluamos los resultados obtenidos por el indicador técnico desarrollado y los comparamos con otro indicador ampliamente conocido y utilizado por los analistas técnicos, el ADX (*Average Directional movement index*). En este experimento evaluamos el indicador técnico desarrollado y se comparan los resultados en cuanto a las pérdidas medias y beneficios que se producen en diferentes condiciones de mercado, después de 200 días de actividad.

Algunos resultados relacionados con estos experimentos fueron presentados en el congreso *International Conference on Next Generation Web Services Practices (NWeSP'11)* celebrado en Salamanca en octubre de 2011 (indexado en ISI Proceedings). Se trata del artículo titulado “*Web-based system for evaluating day trading strategies*”. En el [Anexo E.1](#) de esta memoria adjuntamos el artículo completo.

5.2.2. Trabajo II: Application for back-testing stop-loss

Back-testing es el proceso consistente en hacer una simulación de una estrategia de trading con los datos del pasado con el objetivo de medir su eficacia. En este experimento, analizamos el comportamiento de los indicadores al variar sus parámetros y añadirles un stop-loss (un valor que si el activo financiero alcanza se realiza una operación automática de cierre de posiciones). Lo que nos ha permitido comprobar, contrariamente a lo que se pudiera pensar, que con unos márgenes de stop-loss muy pequeños, aunque disminuye la desviación estándar de los resultados obtenidos, aumentan las pérdidas de forma sistemática. Aumentar el margen de los stop-loss aumenta el riesgo, pero a cambio obtendríamos mayores beneficios.

En el mundo financiero el objetivo central es maximizar los ingresos para un cierto nivel de riesgo, pero se ha demostrado la importancia de elegir adecuadamente los stop-loss, ya que no se puede limitar en exceso el riesgo sin limitar las posibilidades de optar a obtener beneficios.

Este trabajo se ha presentado a la revista *International Journal of Computer Information Systems and Industrial Management Applications (IJCISIM)* con el título “*Application for back-testing day Trading strategies*”. En el [Anexo E.2](#) se adjunta este trabajo.

5.2.3. Trabajo III: Histogramas de beneficios

En este experimento realizamos el back-testing para diferentes combinaciones en los parámetros de los indicadores. Para ello se desarrolla un sistema que ajusta automáticamente los parámetros de un indicador, para maximizar los beneficios.

Se realizan una serie de experimentos que consisten en ajustar un indicador para un periodo de tiempo en la serie temporal y comprobar cómo se comporta en periodos de

tiempo diferentes. Hemos podido observar que un ajuste de parámetros que funcionan muy bien en un periodo de tiempo determinado no garantiza que los buenos resultados se repitan en periodos diferentes.

Dichos experimentos fueron presentados en el Barcelona International Conference on Advances in Statistics (BAS2012) con el artículo titulado “*Analysis of day trading strategies using histograms of benefits*”. Trabajo que adjuntamos en el [Anexo E.3](#) de esta memoria.

5.3. Análisis utilizando líneas de tendencia

Las líneas de tendencia son una de las herramientas más básicas del análisis de series temporales financieras y se han utilizado desde el comienzo del análisis técnico.

A partir de las líneas de tendencia se infiere la dirección general y la fuerza del movimiento del precio actual. Las líneas de tendencia se adaptan bien a cualquier tipo de mercado (acciones, divisas, futuros, etc.). Una línea de tendencia se forma cuando se puede trazar una línea diagonal entre dos o más puntos de giro de precios. En la práctica siempre se pueden trazar una gran cantidad de líneas de tendencia, pero sólo un reducido conjunto de ellas tiene importancia y pueden ser clasificadas como relevantes. El uso de las líneas de tendencia se basa en la idea de que los mercados se mueven en tendencias, es decir no obedecen al paseo aleatorio puro sino más bien al modelo Browniano fraccional, lo que significa que los movimientos sostenidos en una dirección son seguidos por los movimientos sostenidos en la dirección opuesta.

Las líneas de tendencia son ampliamente utilizadas por los analistas técnicos, sin embargo, su trazado puede ser muy subjetivo. En el análisis técnico bursátil, la tendencia es la dirección o trayectoria en que evolucionan las cotizaciones de los activos o mercados en el tiempo. Esta dirección de los precios puede ser ascendente, descendente o lateral, con lo que podemos tener tres tipos de tendencias:

- **Tendencia alcista:** Cuando el precio va realizando máximos cada vez más altos, y a su vez los mínimos también sean cada vez más altos que los anteriores.
- **Tendencia bajista:** Cuando el precio va realizando máximos cada vez más bajos, y a su vez los mínimos también sean cada vez más bajos que los anteriores.
- **Tendencia lateral:** Cuando no es posible encontrar una secuencia clara entre los máximos y los mínimos.

Hoy en día la mayor parte del software para análisis técnico permite trazar líneas de tendencia. A partir de una representación gráfica de la serie de tiempo completa es fácil de

encontrar las líneas de tendencia. Sin embargo, es muy difícil y subjetivo tomar la decisión de trazar una nueva línea de tendencia relevante en la fase incipiente de su formación.

Con el fin de superar los aspectos subjetivos en el trazado de las líneas de tendencia, hemos trabajado investigando la manera de establecer algunos criterios para elaborar líneas de tendencia, en tiempo real, siguiendo la evolución de los precios.

Para hacer esto automáticamente y establecer cuáles son los criterios objetivos para obtener resultados reproducibles y simulaciones significativas se tienen que definir los criterios para la siguiente toma de decisiones:

- Cuándo se puede considerar que una línea ha pasado a ser relevante
- Cómo manejar múltiples líneas de tendencia, esto es, cuándo dos o más líneas de tendencia son similares y se pueden considerar que son la misma
- Cómo manejar diferentes escalas temporales
- Cómo agregar o descartar la información

Con el fin de estudiar todos estos puntos se ha desarrollado un programa basado en Matlab que nos permite analizar las posibilidades de implantar unos criterios que se puedan reproducir sistemáticamente. En la [Fig.5-5](#) se muestra un ejemplo de línea de tendencia alcista trazada automáticamente y en la [Fig.5-6](#) se ha representado un ejemplo de trazado automático de línea de tendencia bajista.

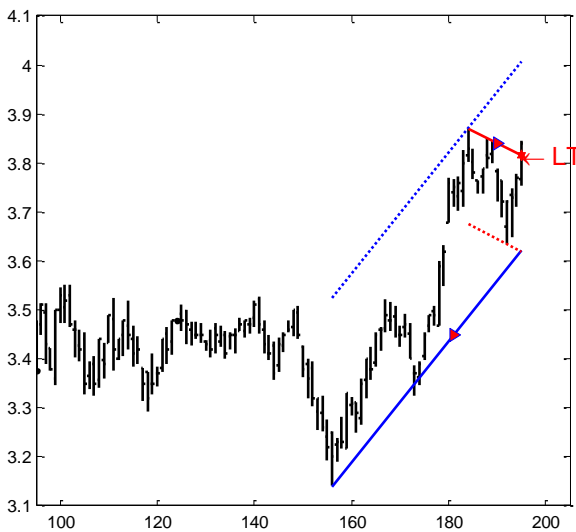


Fig.5-5: Línea de tendencia alcista

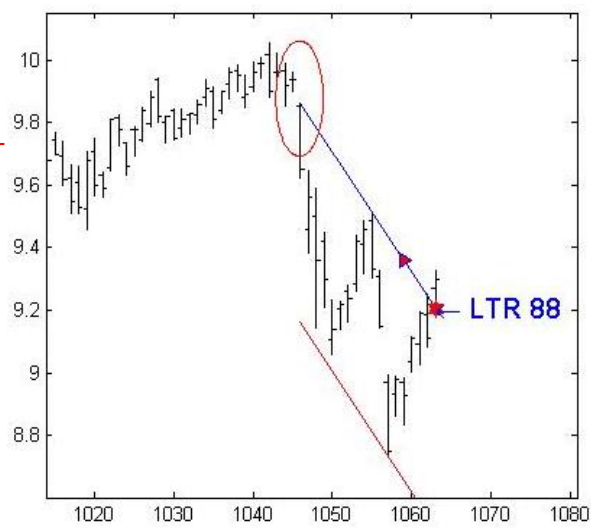


Fig.5-6: Línea de tendencia bajista

La [Fig.5-7](#) hemos representado un ejemplo de las líneas trazadas automáticamente sobre un intervalo del histórico del Banco Santander. Para la interpretación de estas líneas podemos apuntar: que el punto rojo al final de la línea indicaría la ruptura de la línea de

tendencia, lo que significaría la señal de cierre de las posiciones que habíamos abierto cuando se cumplieron las condiciones de línea relevante. Las líneas de puntos junto con las líneas continuas del mismo color, indicarían la formación de un canal.



Fig.5-7: Ejemplo de trazado automático de líneas de tendencia sobre el histórico del Banco Santander (SAN).

La [Fig.5-8](#) representa las líneas que el sistema ha trazado sobre el histórico de Telefónica. La interpretación del gráfico es la descrita en el párrafo anterior. Se puede apreciar que gran cantidad de las líneas habrían dado unos resultados excelentes, pero también vemos otras que hubiesen producido señales falsas.

Relacionado con esta investigación hemos presentado un trabajo en el Decimosexto Congreso Internacional de la Asociación Catalana de Inteligencia Artificial (CCIA 2013), titulado “*Automatic Trend Line Generation for time-series analysis: a Graphical Approach*” y que adjuntamos en el [Anexo E.4](#) de esta memoria.

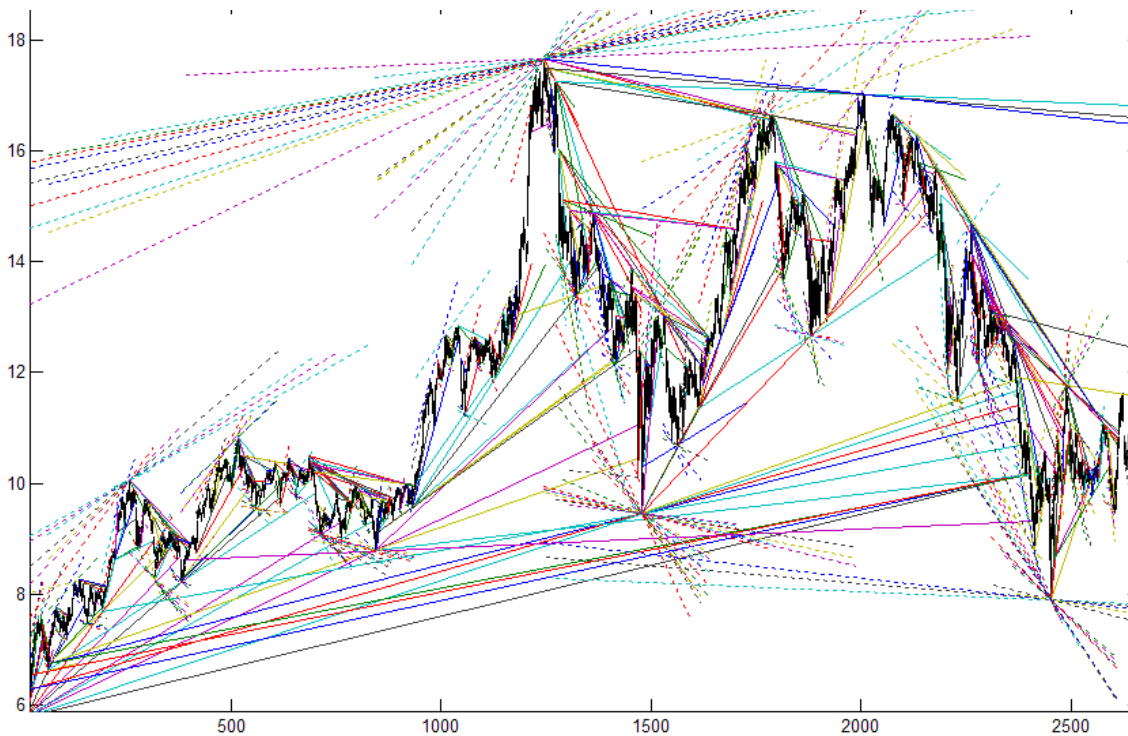


Fig.5-8: Representación completa de las líneas que van surgiendo y rompiendo a lo largo de histórica de Telefónica (TEF)

5.4. Análisis utilizando filtros discretos

Con este enfoque tratamos a la serie financiera como si fuese una señal en tiempo discreto. Con estos experimentos hemos comenzado a analizar las series temporales de los mercados bajo la perspectiva del filtrado discreto, con el fin de valorar la posibilidad de generar automáticamente señales útiles a la hora de tomar decisiones.

Para centrar el tema, simplemente recordamos aquí [50] que un sistema discreto esta descrito por una ecuación en diferencias donde la salida de la posición k , $y(k)$, es una combinación lineal de la entrada $x(k)$ y de N valores pasados de la entrada y de la salida según la expresión:

$$y(k) = -a_1y(k - 1) - a_2y(k - 2) + b_0x(k) + b_1x(k - 1) + b_2x(k - 2) \tag{5-3}$$

Donde a_i y b_j son los coeficientes de la ecuación en diferencias. La transformada Z de este sistema discreto $Y(z)$ se define de la siguiente forma.

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(k) z^{-k} \tag{5-4}$$

El sistema puede ser representado en el dominio Z por su función de transferencia $T(z)$ que es el cociente entre $Y(z)$ y $X(z)$

$$T(z) = \frac{X(z)}{Y(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}} \quad (5-5)$$

Los ceros y los polos son las raíces de los polinomios del numerador y del denominador respectivamente. De acuerdo con la teoría de la caracterización de los sistemas en tiempo discreto [50][51], la posición de los ceros y polos en el plano Z nos proporciona información del comportamiento y la estabilidad del sistema, por ejemplo: un sistema es estable cuando todos sus polos deben estar dentro del círculo unitario $z=1$ del plano complejo Z.

Estudiando la posición de ceros y polos en el plano Z [52] podemos diseñar filtros paso alto, paso bajo o paso banda. En estos experimentos hemos trabajado con varios tipos de filtros y combinaciones de ellos.

Una técnica consiste en generar filtros que, tras ser alimentados con las series temporales de entrada, proporcionan señales que oscilan entorno a cero. Otra técnica consiste en combinar señales filtradas con filtros de distintas características para combinar sus salidas. De la primera estrategia obtenemos la información deseada o bien de los cruces por cero o del cambio de pendiente de las señales, mientras que en la segunda la sacamos de las señales de los cruces de las salidas de los distintos filtros.

Sólo para presentar un ejemplo, diseñamos un oscilador con un filtro paso alto y utilizamos los pasos por cero o los cambios de pendiente de la señal filtrada para, obtener las señales de apertura o cierre de posiciones. En la [Fig.5-9](#) representamos un ejemplo de utilización de los pasos por cero de la señal filtrada para obtener las señales de apertura o cierre de posiciones. La salida es la señal que oscila en torno al origen y se ha representado en color azul cuando presenta valores positivos y en rojo cuando presenta valores negativos. De acuerdo con el valor del signo que toma la salida de la señal filtrada se han marcado sobre los cierres, en azul, los tramos en los que la salida de nuestro filtro identificaría como alcistas y en rojo los bajistas. La imagen [Fig.5-9](#) habla por sí sola y no queda duda del buen comportamiento del filtro, detectando en pocas sesiones, y de forma muy prematura, los cambios de tendencia.

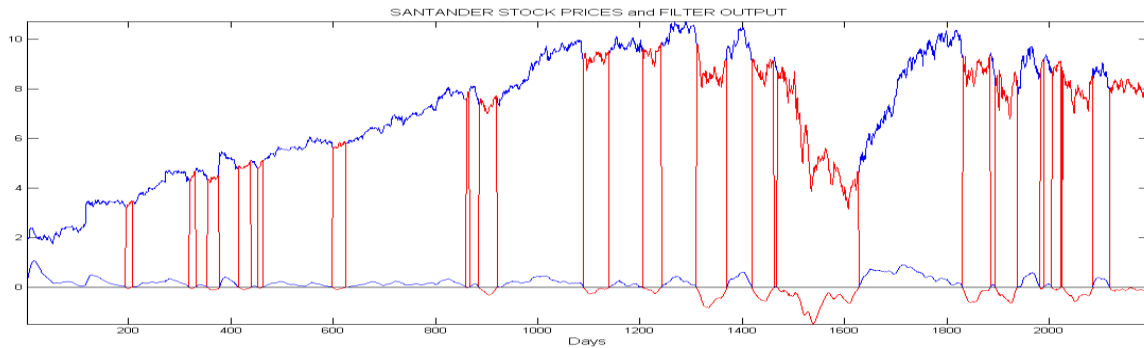


Fig.5-9: Ejemplo de filtro paso alto utilizando los paso por cero para dar señales de apertura o cierre

De acuerdo con la segunda estrategia hemos analizado los cruces de dos señales filtradas. En esta estrategia generalmente se deben utilizar filtros pasa banda o pasa bajos. El cruce de las dos señales filtradas nos dará la indicación de entrar o salir del mercado.

En la [Fig.5-10](#) hemos representado un ejemplo gráfico de la utilización de dos filtros paso-banda. En esta gráfica las señales filtradas se representan en trazo continuo sobre el gráfico de barras, que representa las series de precios. Como podemos ver en la figura, el cruce de las señales filtradas nos da las indicaciones de apertura y cierre de posiciones. Es de destacar, como se han detectado eficazmente los cambios de tendencia, y lo bien que funciona esta técnica, sobre todo, cuando existe poca volatilidad y los mercados están en tendencia.

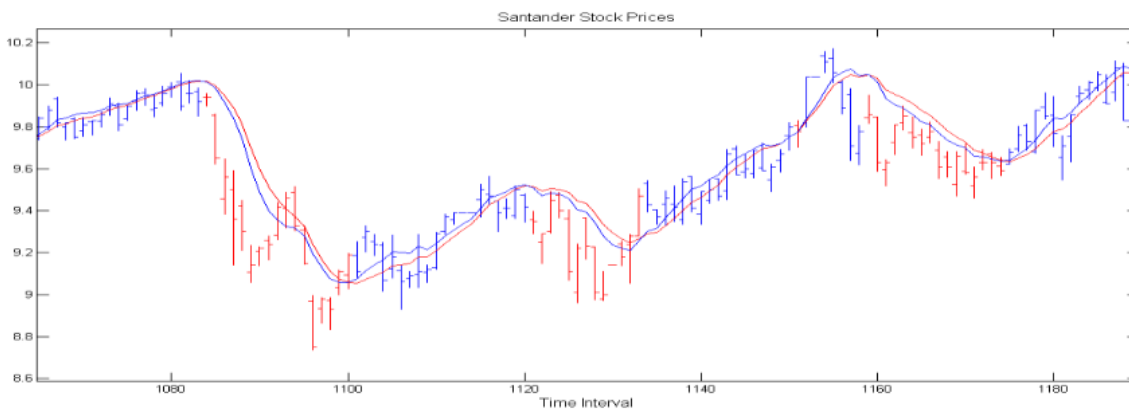


Fig.5-10: Ejemplo de utilización de los cruces de la señal filtrada con dos filtros paso bajos

Los resultados de estos experimentos han sido expuestos en el artículo titulado “Filtering Discrete-Time Series of Financial Assets under a Classical Control Theory Perspective” que hemos presentado en el International work-conference on Time Series (ITISE 2014) celebrado en Granada. En el [Anexo E.5](#) de esta memoria adjuntamos este trabajo completo.

5.5. Breve resumen de resultados

Cómo conclusión más importante cabe destacar que en la mayoría de las técnicas expuestas y para la mayoría de series temporales utilizadas, disponiendo de toda la serie, es fácil ajustar los valores de uno o varios filtros para que las señales obtenidas presenten un comportamiento extremadamente bueno. Sin embargo, la misma configuración no suele reproducir el mismo comportamiento en otra serie financiera para la cual no se ha ajustado el filtro, es más, en ocasiones puede funcionar muy mal, generando importantes pérdidas.

Tampoco es evidente el buen funcionamiento de una configuración ajustada sólo en un tramo de la señal de la serie, para un determinado activo, y evaluada en otro tramo del mismo activo. En su momento no pudimos encontrar cuáles eran las características de las señales de entrada que favorecían unas determinadas configuraciones en términos del contenido espectral de las series y abandonamos esta línea como línea principal de la tesis. Era difícil la generalización de resultados. La idea entonces fue la de estudiar las características de las series desde otro punto de vista con lo cual abordamos su análisis a través del exponente de Hurst. En nuestro caso, la inclusión en el estudio de las series temporales formadas por las aperturas, valores máximos, valores mínimos, además de los cierres fue natural procediendo de nuestro primer enfoque puesto que estas series temporales ya las utilizábamos tanto para alimentar los filtros cómo para generar las líneas de tendencia.

CAPÍTULO 6

CAPÍTULO 6: Discusión y conclusiones

El hilo conductor de esta tesis son los distintos estudios hechos de forma progresiva sobre las cuatro series temporales que definen un activo financiero en términos del exponente de Hurst. En el inicio del periodo de investigación, como ya se ha comentado, los estudios se centraron inicialmente en la búsqueda de estrategias automáticas de entrada y salida de los mercados a través de lo que, en el capítulo 5, hemos comentado como enfoques no convencionales. Muchas de las estrategias que desarrollamos, tales como la utilización de filtros morfológicos adaptados o los filtros convencionales inspirados de las estrategias de teoría de control o procesado de señal, a pesar de ser novedosas en su forma de aplicación, presentaban los mismos problemas que las estrategias convencionales que utilizan las estrategias de especulación en base diaria y que nosotros ya habíamos analizado estadísticamente sobre gran variedad de históricos. La cuestión es que los sistemas al ser entrenados sobre una parte de los históricos, cuando los aplicábamos a la parte restante perdían parte de sus propiedades y era común el hecho de que combinaban secuencias de resultados que podían ser extremadamente buenos en una parte del histórico seguidos de resultados que podían ser extremadamente malos. Al final, el cómputo global de beneficios/perdidas en una secuencia desconocida daba unos resultados que presentaban, en términos estadísticos, una media ligeramente positiva pero bastante próxima a cero con una varianza sumamente elevada. Replicamos nuestros barridos comenzando en distintos puntos de entrada temporal y asumimos incluso el retraso en la ejecución de operaciones entre la generación de las señales y la ejecución de las órdenes. Los resultados podían arrojar enormes beneficios y cuando eso ocurría las gráficas eran del todo espectaculares, pero también podíamos incurrir en enormes pérdidas ya que a veces se generaban las señales con el paso cambiado. El caso es que en el primer enfoque no fuimos capaces de encontrar el criterio sistemático que nos diera la clave para la selección de los filtros en cada momento. Estos resultados fueron el motivo por el cual se aparcó el enfoque inicial y nos centramos en el estudio de las propiedades de las series temporales. En este punto existían distintas posibilidades como por ejemplo la caracterización de las señales a partir de su entropía o de la información mutua pero teníamos el inconveniente que para realizar estos cálculos se precisa estimar las densidades de probabilidad y probabilidad conjunta de las series implicadas. En estos últimos años sin embargo han aparecido numerosos estudios sobre la caracterización de

series financieras a través de la fractalidad y del exponente de Hurst con lo que nos decantamos por esta técnica.

Como hemos comentado al inicio del primer capítulo prácticamente la totalidad de los estudios consultados basan sus estudios en la serie de retornos diarios y en menor grado sobre la serie temporal de los cierres o *closing* (\mathcal{C}) y suelen ignorar las otras tres series temporales; aperturas u *opening* (\mathcal{O}), máximos o *high* (\mathcal{H}) y mínimos o *low* (\mathcal{L}). Averiguar cómo se comportan el resto de series temporales en comparación con la serie de los precios del cierre y realizar un estudio en términos de sus propiedades de fractalidad y dependencia a largo plazo (persistencia) era una cuestión no abordada en la literatura y por tanto una oportunidad para explorar las series de precios. Los primeros resultados ya fueron sorprendentes ya que observamos una divergencia de valores entre las series temporales de aperturas y cierres con las de los valores de máximos y mínimos. En líneas generales observamos que las aperturas y los cierres presentan un comportamiento similar, caracterizado con un valor de \mathbf{H} siempre muy próximo a 0,5 (el correspondiente al modelo Browniano o paseo aleatorio puro). Muchos estudios recientes ya reportan que los precios (de cierre) no se corresponden con un valor de \mathbf{H} exactamente de 0,5 sino demuestran que estas series se adaptan mejor al modelo de Browniano fraccional. Sin embargo, nuestros resultados mostraban que las series de máximos y mínimos presentaban valores de \mathbf{H} marcadamente superiores, indicando la presencia de mayor dependencia estadística entre sus elementos, mayor presencia de correlación y por tanto la existencia de mayor grado de predictibilidad. Este resultado nos motivó a realizar un estudio en profundidad de muy diversas series temporales procedentes de índices y acciones de muy diversos mercados mundiales constatando que se cumple de forma muy generalizada en todos ellos.

Siguiendo las tendencias más recientes de la investigación de las series temporales y financieras también hemos desarrollado un método a partir de una variación de un estimador del exponente de Hurst que destacamos como aportación y que nos ha servido para completar los estudios al permitirnos evaluar la variación temporal de \mathbf{H} . La idea buscada es la capacidad de obtener mayor resolución temporal de la variación de este parámetro, el exponente de Hurst, y poder estudiar si su valor es estable o varía y si somos capaces de recoger las variaciones estadísticas de las series en este parámetro.

Con este método hemos podido observar que en las estimaciones dinámicas de las cuatro series aparece una divergencia parecida a la observada anteriormente y que \mathbf{H} varía a lo largo del tiempo. La exploración en profundidad permite comprobar que este fenómeno se repite sistemáticamente tanto para activos nacionales como internacionales y además para configuraciones del estimador con diferentes tamaños de ventana.

Este fenómeno, que en principio pudiera parecer carente de importancia, tiene importantes consecuencias en términos de correlación, persistencia, predictibilidad y por

ende, en la información que portan las cuatro series. Por lo que, como hemos demostrado en estos estudios, el comportamiento de las series va a ser muy distinto en función de su exponente de Hurst. Las series H y L aportan más información que las θ y C . Siendo la C la que menos información aporta al tener su exponente de Hurst más cercano a 0.5. Curiosamente son los cierres la información que mayoritariamente se publica en la prensa no especializada y en la que, única y exclusivamente, se basan algunos indicadores técnicos.

Puesto que por los valores de H las series H y L presentaran cierta correlación el siguiente paso es el análisis de los correlogramas, cosa que hemos hecho con hasta veinte retardos para las cuatro series. En este punto detectamos que el valor de la correlación correspondiente al primer retardo depende del valor del exponente H que presenta la serie. Con el método de la estimación dinámica hemos calculado y representado gráficamente la auto-correlación del primer retardo de las cuatro series y también pudimos comprobar gráficamente esta relación. Efectivamente, como era de esperar las series L y H presentan una mayor autocorrelación, mientras que la C presenta, como norma general, valores próximos a cero, y la θ , correlación ligeramente negativa. Una vez más hemos realizado esta prueba para diferentes activos nacionales e internacionales y con distintos tamaños de ventana, y también pudimos comprobar que los resultados se repiten, de forma sistemática, en prácticamente todos los activos. En las tablas del [Anexo.C](#) hemos dejado documentado este fenómeno.

A tenor de los resultados, en el capítulo cuatro presentamos una serie de experimentos que han ido aumentando en complejidad hasta llegar al experimento IV, donde desarrollamos la filosofía de un método para predecir una condición simple en la muestra siguiente del histórico de un activo financiero. En este capítulo aprovechamos de forma empírica los resultados sobre H y ρ_1 en términos de la estimación de una probabilidad condicionada que hemos dado en llamar predictibilidad. Otra vez constatamos que las series L y H son más fáciles de predecir que las C y θ . Las primeras pruebas, simulando condiciones reales, han sido muy alentadoras, ya que a pesar de ser un prototipo experimental básico, hemos obtenido resultados muy buenos, que se repiten con todos los activos probados, lo que da una idea de la contundencia y robustez del método. En estas primeras pruebas ya se han detectado posibles mejoras que nos permitirán continuar evolucionando en esta línea de trabajo. Por ejemplo, no será difícil encontrar semillas que, detecten patrones que anticipen un cambio de tendencia.

Al final, como hemos presentado al principio de la introducción, hemos creído oportuno dedicar el capítulo 5 a realizar una breve exposición de diferentes trabajos llevados a cabo durante la primera fase de la investigación. En estos trabajos se abordó el análisis de las series financieras, desde diferentes perspectivas o enfoques y cuyos resultados ya fueron presentados en los respectivos congresos. En el [Anexo.E](#) adjuntamos una copia de cada uno de estos trabajos. Al final de la tesis y con relación a los trabajos

mencionados en el capítulo 5, que fueron aparcados en su momento, podrían, como línea de investigación futura, ser retomados y confrontados con la estimación dinámica de \mathbf{H} , o la estimación dinámica de los ρ_1 de las distintas series para comprobar si, al final, éstas fueran las herramientas que nos faltaban para adaptar las características de los filtros con la estadística de señal y poder saber en qué momento podemos emplear o dejar de emplearlos. La mayor parte de los resultados del exponente de Hurst, al ser resultados más recientes están todavía sin publicar. El primer intento, “Empirical evidence for day-to-day persistence of higher and lower American and European stock indices”, ya aceptado, ha sido enviado al 19th International Conference of the Catalan Association for Artificial Intelligence. En el [Anexo E.6](#) adjuntamos una copia de este trabajo.

REFERENCIAS

Referencias

- [1] U.S. Department of State, “El sistema financiero mundial,” *eJournal USA*, vol. 14, 2009.
- [2] A. Calvo, J. A. Parejo, L. Rodriguez, and A. Cuervo, “Manual del sistema financiero español,” p. 28, 2014.
- [3] A. Scherk, “Manual de Análisis Fundamental,” pp. 5–103, 2011.
- [4] J. R. Aragonés and J. Mascareñas, “La eficiencia y el equilibrio en los mercados de capital,” *Análisis Financ.*, vol. 64, pp. 76–89, 1994.
- [5] Kirkpatrick and Dahlquist, “Technical Analysis: The Complete Resource for Financial Market Technicians.,” *Financ. Times Press*, p. 3, 2006.
- [6] J. J. Murphy, *Análisis técnico de los mercados financieros*. Gestión 2000, 2000.
- [7] J. Fang, Y. Qin, and B. Jacobsen, “Technical market indicators: An overview,” *J. Behav. Exp. Financ.*, vol. 4, pp. 25–56, Dec. 2014.
- [8] S. B. Achelis, “Technical Analysis from A to Z,” *Search*, vol. 77, pp. 33–4, 2000.
- [9] E. Peters, “Fractal Markets Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics.” John Wiley & Son, 1994.
- [10] R. Brown, “A brief account of microscopical observations made on the particles contained in the pollen of plants,” *Philos. Mag.*, vol. 4, pp. 161–173, 1828.
- [11] A. Einstein, “Investigations on the Theory of the Brownian Movement,” *Ann. Phys.*, vol. 17, p. 549, 1905.
- [12] S. Tzouras, C. Anagnostopoulos, and E. McCoy, “Financial time series modeling using the Hurst exponent,” *Phys. A Stat. Mech. its Appl.*, vol. 425, pp. 50–68, 2015.
- [13] A. Sensoy, “Generalized Hurst exponent approach to efficiency in MENA markets,” *Phys. A Stat. Mech. its Appl.*, vol. 392, no. 20, pp. 5019–5026, 2013.
- [14] B. B. Mandelbrot and R. L. Hudson, *The (mis) behavior of markets: a fractal view of risk, ruin, and reward*. Basic Books, 2005.
- [15] P. Abry, “The Wavelet-Based Synthesis for Fractional Brownian Motion Proposed by F. Sellan and Y. Meyer: Remarks and Fast Implementation,” *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, vol. 3, no. 4, pp. 377–383, 1996.

- [16] B. B. Mandelbrot and J. W. Van Ness, "Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications," *SIAM Review*, vol. 10, no. 4. pp. 422–437, 1968.
- [17] E. E. Peters, "Fractal structure in the capital markets," *Financ. Anal. J.*, vol. 45, no. 4, pp. 32–37, 1989.
- [18] A. Serletis and A. A. Rosenberg, "The Hurst exponent in energy futures prices," *Phys. A Stat. Mech. its Appl.*, vol. 380, no. 1–2, pp. 325–332, 2007.
- [19] K. Yim, G. Oh, and S. Kim, "An analysis of the financial crisis in the KOSPI market using Hurst exponents," *Phys. A Stat. Mech. its Appl.*, vol. 410, pp. 327–334, 2014.
- [20] B. Qian and K. Rasheed, "Hurst exponent and financial market predictability," *Proc. 2nd IASTED Int. Conf. Financ. Eng. Appl.*, pp. 203–209, 2004.
- [21] C. Eom, S. Choi, G. Oh, and W. S. Jung, "Hurst exponent and prediction based on weak-form efficient market hypothesis of stock markets," *Phys. A Stat. Mech. its Appl.*, vol. 387, no. 18, pp. 4630–4636, 2008.
- [22] M. Couillard and M. Davison, "A comment on measuring the Hurst exponent of financial time series," *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 348. pp. 404–418, 2005.
- [23] J. Mielniczuk and P. Wojdyłło, "Estimation of Hurst exponent revisited," *Comput. Stat. Data Anal.*, vol. 51, no. 9, pp. 4510–4525, 2007.
- [24] J. Qi and H. Yang, "Hurst exponents for short time series," *Phys. Rev. E - Stat. Nonlinear, Soft Matter Phys.*, vol. 84, no. 6, pp. 1–7, 2011.
- [25] A. Carbone, G. Castelli, and H. E. Stanley, "Time-dependent Hurst exponent in financial time series," *Phys. A Stat. Mech. its Appl.*, vol. 344, no. 1–2, pp. 267–271, Dec. 2004.
- [26] J. a O. Matos, S. M. a Gama, H. J. Ruskin, A. Al Sharkasi, and M. Crane, "Time and scale Hurst exponent analysis for financial markets," *Phys. A Stat. Mech. its Appl.*, vol. 387, no. 15, pp. 3910–3915, 2008.
- [27] R. Morales, T. Di Matteo, R. Gramatica, and T. Aste, "Dynamical generalized Hurst exponent as a tool to monitor unstable periods in financial time series," *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 391, no. 11. Elsevier B.V., pp. 3180–3189, 2012.
- [28] J. Alvarez-Ramirez, J. Alvarez, E. Rodriguez, and G. Fernandez-Anaya, "Time-varying Hurst exponent for US stock markets," *Phys. A Stat. Mech. its Appl.*, vol. 387, no. 24, pp. 6159–6169, 2008.
- [29] D. O. Cajueiro and B. M. Tabak, "The Hurst exponent over time: Testing the assertion that emerging markets are becoming more efficient," *Phys. A Stat. Mech. its Appl.*, vol. 336, no. 3–4, pp. 521–537, 2004.

-
- [30] D. O. Cajueiro and B. M. Tabak, "The rescaled variance statistic and the determination of the Hurst exponent," *Math. Comput. Simul.*, vol. 70, no. 3, pp. 172–179, 2005.
- [31] G. J. Ross, "Modelling financial volatility in the presence of abrupt changes," *Phys. A Stat. Mech. its Appl.*, vol. 392, no. 2, pp. 350–360, 2013.
- [32] K. Domino, "The use of the Hurst exponent to predict changes in trends on the Warsaw Stock Exchange," *Phys. A Stat. Mech. its Appl.*, vol. 390, no. 1, pp. 98–109, 2011.
- [33] P. Flandrin, "Wavelet analysis and synthesis of fractional Brownian motion," *Inf. Theory, IEEE Trans.*, vol. 38, no. 2, pp. 910–917, 1992.
- [34] Z. Wang, D. Guo, X. Li, and Y. Fei, "Estimating hurst exponent with wavelet packet," *2006 7th Int. Conf. Comput. Ind. Des. Concept. Des. CAIDC*, 2006.
- [35] S. Albeverio, P. E. T. Jorgensen, and a. M. Paolucci, *On Fractional Brownian Motion and Wavelets*, vol. 6, no. 1. 2012.
- [36] A. Chamoli, A. Ram Bansal, and V. P. Dimri, "Wavelet and rescaled range approach for the Hurst coefficient for short and long time series," *Comput. Geosci.*, vol. 33, no. 1, pp. 83–93, 2007.
- [37] G. Rilling, P. Flandrin, and P. Gonc, "EMPIRICAL MODE DECOMPOSITION, FRACTIONAL GAUSSIAN NOISE AND HURST EXPONENT ESTIMATION," pp. 489–492, 2005.
- [38] G. Rotundo, "The Hurst ' s exponent in technical analysis signals Technical analysis signals : trendlines," pp. 121–125.
- [39] S. K. Mitra, "Is Hurst exponent value useful in forecasting financial time series?," *Asian Soc. Sci.*, vol. 8, no. 8, pp. 111–120, 2012.
- [40] L. Plazas, M. A. Ávila, A.gulo, and Mo.cada, "Estimating hurst exponent and fractal dimension for uv-vis absorbance time series analysis," pp. 133–143, 2014.
- [41] P. Abry, P. Flandrin, M. S. Taqqu, and D. Veitch, "Self-similarity and long-range dependence through the wavelet lens," *Theory Appl. Longrange Depend.*, vol. 59, no. 6, p. 666–&, 2003.
- [42] J.-M. Bardet, G. Lang, G. Oppenheim, A. Philippe, S. Stoev, and M. S. Taqqu, "Semi-Parametric Estimation of the Long-Range Dependence Parameter: A Survey," *Theory Appl. Long-Range Depend.*, no. October 2015, pp. 557–578, 2003.
- [43] J. Istas and G. Lang, "Quadratic variations and estimation of the local Hölder index of a Gaussian process," *Ann. l'Institut Henri Poincare Probab. Stat.*, vol. 33, no. 4, pp. 407–436, 1997.
- [44] G. E. P. Box and G. M. Jenkins, *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, vol. Third. 1994.

- [45] M. S. Bartlett, "An introduction to stochastic processes, with special reference to methods and applications," *Cambridge Univ. Press*, 1978.
- [46] G. Matheron and J. Serra, "The birth of mathematical morphology," *Math. Morphol.*, 2002.
- [47] J. A. Bangham and S. Marshall, "Image and signal processing with mathematical morphology," *Electron. Commun. Eng. J.*, vol. 10, no. 3, pp. 117–128, 1998.
- [48] G. Matheron and J. Serra, *Morphologie Mathématique et granulométries en place*. 1967.
- [49] W. J. Torres and R. J. Bello, "Procesamiento de imágenes a color utilizando morfología matemática," pp. 79–83, 2010.
- [50] J. G. M. Proakis and S. G. Dimitris, *Tratamiento digital de señales*. Madrid: Pearson Educación S.A., 2007.
- [51] K. Ogata, *Ingeniería de control moderna*. Pearson Educación, 2003.
- [52] B. C. Kuo, *Sistemas de control automático*. Pearson Educación S.A., 1996.

ANEXOS

Anexo A: Tablas de *tickers*

Anexo A.1: Índices Europeos

<i>Ticker</i>	Nombre	Descripción
^ATX	ATX	Compuesto por las veinte empresas con mayor capitalización bursátil de la Bolsa de Viena
^BFX	BEL-20	Un índice bursátil de la bolsa de Bruselas. consiste en un mínimo de 10 y un máximo de 20 compañías de este mercado
^FCHI	CAC 40	Es una medida ponderada según la capitalización de los 40 valores más significativos de entre las 100 mayores empresas negociadas en la Bolsa de París (<i>Cotation Assistée en Continu</i>),
^GDAXI	DAX	Es el índice bursátil de referencia de la <i>Frankfurter Wertpapierbörse</i> (Bolsa de Fráncfort).
^FTSE	FTSE 100	Es un índice de capitalización medurado de 100 empresas británicas en la Bolsa de Londres
^IBEX	IBEX 35	Está formado por las 35 empresas con más liquidez que cotizan en el Sistema de Interconexión Bursátil Electrónico (SIBE) en las cuatro bolsas españolas (Madrid, Barcelona, Bilbao y Valencia).

Tabla Anexo A.1-1: Tickers Índices europeos

Anexo A.2: Índices de EEUU

<i>Ticker</i>	Nombre	Descripción
^DJI	30 Industrials	Índice bursátil Refleja el comportamiento de las 30 compañías industriales más importantes y representativas de Estados Unidos.
^IXIC	Composite	Es un índice bursátil de Estados Unidos que incluye todos los valores (tanto nacionales como extranjeros) que cotizan en el mercado Nasdaq, un total de más de 5000 empresas
^NDX	Nasdaq 100	Índice bursátil de Estados Unidos que recoge a los 100 valores de las compañías más importantes del sector de la industria incluyendo empresas tanto americanas como internacionales
^GSPC	S&P 500	Standard & Poor's 500 Index. Se basa en la capitalización bursátil de 500 grandes empresas que poseen acciones que cotizan en las bolsas NYSE o NASDAQ

Tabla Anexo A.2-1: Tickers Índices de EEUU

Anexo A.3: Componentes para el IBEX

<i>Ticker</i>	<i>Nombre</i>
ABE.MC	Abertis Infraestructuras SA
ABG.MC	ABENGOA -B-
ACS.MC	Actividades de Construccion y Servicios SA
AMS.MC	Amadeus IT Holding SA
ANA.MC	Acciona,S.A.
BBVA.MC	Banco Bilbao Vizcaya Argentaria SA
BKIA.MC	BANKIA SA
BKT.MC	Bankinter SA
BME.MC	Bolsas y Mercados Espanoles
CABK.MC	CAIXABANK
DIA.MC	DIA
ENG.MC	Enagas SA
FCC.MC	Fomento de Constry Contratas SA
FER.MC	Ferrovial SA
GAM.MC	Gamesa Corporacion Tecnologica SA
GAS.MC	Gas Natural SDG SA
GRF.MC	Grifols SA
IAG.MC	INTL. CONS. AIR GRP
IBE.MC	Iberdrola SA
IDR.MC	Indra Sistemas SA Serie A
ITX.MC	Industria de Diseno Textil Inditex SA
JAZ.MC	Jazztel PLC
MAP.MC	Mapfre SA
MTS.MC	ArcelorMittal SA
OHL.MC	Obrascon Huarte Lain SA
POP.MC	Banco Popular Español S.A.
REE.MC	Red Electrica de España SA
REP.MC	Repsol SA
SAB.MC	Banco de Sabadell SA
SAN.MC	Banco Santander SA
SCYR.MC	SACYR
TEF.MC	Telefonica SA
TL5.MC	Mediaset Espana Comunicacion SA
TRE.MC	Tecnicas Reunidas SA
VIS.MC	Viscofan SA

Tabla Anexo A.3-1: Tickers de componentes del IBEX

Anexo A.4: Componentes para CAC 40 de Francia (^FCHI)

<i>Ticker</i>	<i>Nombre</i>
AC.PA	Accor S.A.
ACA.PA	Credit Agricole S.A.
AI.PA	Air Liquide SA
AIR.PA	AIRBUS GROUP
BN.PA	Danone
BNP.PA	BNP Paribas SA
CA.PA	Carrefour SA
CAP.PA	Cap Gemini S.A.
CS.PA	AXA Group
DG.PA	VINCI SA
EI.PA	Essilor International SA
EN.PA	Bouygues SA
ENGI.PA	ENGIE
FP.PA	TOTAL S.A.
FR.PA	Valeo SA
GLE.PA	Societe Generale Group
KER.PA	Kering SA
LHN.PA	LafargeHolcim Ltd.
LI.PA	Klepierre SA
LR.PA	Legrand SA
MC.PA	LVMH Moët Hennessy Louis Vuitton S.E.
ML.PA	Compagnie Generale DES Etablissements Michelin SCA
MT.PA	ARCELORMITTAL REG
NOKIA.PA	Nokia Corporation
OR.PA	L'Oreal SA
ORA.PA	Orange
PUB.PA	Publicis Groupe SA
RI.PA	Pernod-Ricard SA
RNO.PA	Renault SA
SAF.PA	Safran SA
SAN.PA	Sanofi
SGO.PA	Compagnie de Saint-Gobain S.A.
SOLB.PA	SOLVAY
SU.PA	Schneider Electric SE
SW.PA	Sodexo S.A.
TEC.PA	Technip SA
UG.PA	Peugeot S.A.
UL.PA	UNIBAIL-RODAMCO
VIE.PA	Veolia Environnement S.A.
VIV.PA	Vivendi SA

Tabla Anexo A.4-1: Componentes del CAC 40 de Francia (^FCHI)

Anexo A.5: Componentes para el DAX de Alemania (^GDAXI)

<i>Ticker</i>	<i>Nombre</i>
ADS.DE	Adidas AG
ALV.DE	Allianz SE
BAS.DE	BASF SE
BAYN.DE	Bayer AG
BEI.DE	Beiersdorf AG
BMW.DE	Bayerische Motoren Werke Aktiengesellschaft
CBK.DE	Commerzbank AG
CON.DE	Continental Aktiengesellschaft
DAI.DE	Daimler AG
DB1.DE	Deutsche Boerse AG
DBK.DE	Deutsche Bank AG
DPW.DE	Deutsche Post AG
DTE.DE	Deutsche Telekom AG
EOAN.DE	E.ON SE
FME.DE	Fresenius Medical Care AG & Co. KGAA
FRE.DE	Fresenius SE & Co KGaA
HEI.DE	HeidelbergCement AG
HEN3.DE	Henkel AG & Co. KGaA
IFX.DE	Infineon Technologies AG
LHA.DE	Deutsche Lufthansa Aktiengesellschaft
LIN.DE	Linde Aktiengesellschaft
MRK.DE	Merck KGaA
MUV2.DE	Münchener Rückversicherungs-Gesellschaft Aktiengesellschaft
PSM.DE	ProSiebenSat.1 Media SE
RWE.DE	RWE AG
SAP.DE	SAP SE
SIE.DE	Siemens Aktiengesellschaft
TKA.DE	ThyssenKrupp AG
VNA.DE	VONOVIA N
VOW3.DE	Volkswagen AG

Tabla Anexo A.5-1: Componentes del DAX de Alemania (^GDAXI)

Anexo A.6: Componentes para el Dow Jones Industrial Average (^DJI)

<i>Ticker</i>	<i>Nombre</i>
AXP	American Express Company
BA	The Boeing Company
CAT	Caterpillar Inc.
CSCO	Cisco Systems, Inc.
CVX	Chevron Corporation
DD	E. I. du Pont de Nemours and Company
DIS	The Walt Disney Company
GE	General Electric Company
GS	The Goldman Sachs Group, Inc.
HD	The Home Depot, Inc.
IBM	International Business Machines Corporation
INTC	Intel Corporation
JNJ	Johnson & Johnson
JPM	JPMorgan Chase & Co.
KO	The Coca-Cola Company
MCD	McDonald's Corp.
MMM	3M Company
MRK	Merck & Co. Inc.
MSFT	Microsoft Corporation
NKE	NIKE, Inc.
PFE	Pfizer Inc.
PG	The Procter & Gamble Company
TRV	The Travelers Companies, Inc.
UNH	UnitedHealth Group Incorporated
UTX	United Technologies Corporation
V	Visa Inc.
VZ	Verizon Communications Inc.
WMT	Wal-Mart Stores Inc.
XOM	Exxon Mobil Corporation

Tabla Anexo A.6-1: Componentes para el Dow Jones Industrial Average (^DJI)

Anexo B: Tablas de exploración dinámica para el exponente de Hurst

Anexo B.1: Resumen de los resultados de estimación dinámica del exponente de Hurst para los valores del índice CAC 40

Ticker	\bar{H}_d	\bar{L}_d	\bar{C}_d	\bar{O}_d	$H_d > 0.6$	$L_d > 0.6$	$C_d > 0.6$	$O_d > 0.6$	$H_d >$	$L_d >$	$C_d >$	$O_d >$	$H_d >$ $C_d \& O_d$	$L_d >$ $C_d \& O_d$	$H_d \& L_d >$ $C_d \& O_d$
AC	0.607	0.639	0.521	0.465	58.94	69.54	15.1	4.22	19.09	75.11	0	5.8	88.29	89.32	83.41
ACA	0.646	0.671	0.537	0.469	84.81	84.68	19.65	1.8	34.61	60.06	0	5.33	86.94	93.24	85.51
AI	0.619	0.542	0.419	0.347	60.51	49.2	0	0.2	55.05	44.95	0	0	100	84.38	84.38
AIR	0.662	0.601	0.526	0.452	78.61	45.8	15.63	6.15	58.92	41.08	0	0	99.93	77.47	77.41
ALO	0.611	0.67	0.527	0.447	65.4	75	10.28	0.77	10.81	89.19	0	0	95.66	100	95.66
ALU	0.619	0.616	0.517	0.475	61.47	66.9	7.69	7.12	40.45	59.43	0.03	0.09	90.53	81.17	71.81
BN	0.634	0.616	0.457	0.42	60.92	63.71	1.81	3.79	66.38	32.9	0.72	0	98.42	98.79	97.93
BNP	0.647	0.652	0.519	0.425	70.53	63.86	27.95	0	36.63	63.37	0	0	95.75	99.97	95.72
CA	0.618	0.632	0.504	0.468	63.57	77.52	4.45	1.09	39.48	60.52	0	0	93.57	99.97	93.54
CAP	0.664	0.671	0.537	0.521	91.44	96.21	16.71	16.11	49.12	49.84	0	1.03	90.61	95.29	86.94
CS	0.652	0.659	0.554	0.463	76.49	66.98	21.81	0	53.33	46.61	0	0.06	95.29	96.55	91.9
DG	0.631	0.666	0.472	0.444	74.94	70.55	0.6	5.14	37.33	62.64	0	0.03	93.88	95.69	89.6
EDF	0.668	0.697	0.589	0.493	99.55	84.72	31.46	7.21	28.46	70.24	1.3	0	94.69	79.61	75.6
EI	0.488	0.457	0.341	0.322	24.66	7.26	1.09	0	54.75	31.18	13.78	0.29	82.92	78.01	74.99
EN	0.581	0.62	0.465	0.452	46.56	59.28	9.75	1.12	20.39	65.17	4.29	10.15	80.16	80.44	75.04
FP	0.633	0.644	0.496	0.446	70.14	77.09	2.96	0	40.45	59.55	0	0	97.24	99.97	97.22
FR	0.552	0.685	0.538	0.436	35.58	79.06	31.52	9.44	0.19	97.21	2.6	0	59.15	97.4	59.15
GLE	0.605	0.663	0.568	0.457	58.01	81.28	33	0.63	24.15	67.06	8.76	0.03	57.38	83.29	49.45
GSZ	0.629	0.657	0.512	0.441	61.09	68.97	12.28	0	28.42	69.72	0.12	1.75	95.77	88.84	86.48
KER	0.693	0.66	0.549	0.504	94.42	83.79	15.81	6.15	70.82	29.18	0	0	99.97	97.82	97.79
LG	0.634	0.658	0.484	0.433	74.66	80.13	9.04	0.26	39.27	60.73	0	0	98.42	100	98.42
LR	0.602	0.624	0.467	0.387	49.61	66.09	0	0	44.87	55.13	0	0	98.63	100	98.63
MC	0.648	0.655	0.507	0.488	74.78	79.87	2.13	5.31	47.13	52.81	0.06	0	94.77	98.45	93.28
ML	0.64	0.608	0.531	0.439	70.54	52.54	17.54	0	58.02	35.31	6.66	0	90.04	85.41	82.11
MT	0.593	0.585	0.487	0.435	52.63	53.82	13.46	9.71	53.03	39.17	7.8	0	92.12	87.18	87.1
OR	0.604	0.564	0.422	0.354	55.76	34.56	0	0	68.14	29.45	2.41	0	93.11	88.34	83.86
ORA	0.67	0.686	0.568	0.458	85.34	91.35	29.84	0.86	42.48	57.43	0.09	0	95.57	96.18	91.84
PUB	0.607	0.591	0.51	0.465	58.98	49.58	9.76	4.11	64.84	35.01	0.15	0	78.3	89.12	67.56
RI	0.611	0.599	0.452	0.438	64.05	46.91	0.11	0	57.08	41.46	0	1.46	95.55	97.9	94.92
RNO	0.657	0.676	0.576	0.455	91.7	93.4	34.82	0.11	32.29	60.05	7.66	0	87.23	88.09	82.98
SAF	0.574	0.6	0.489	0.455	46.65	44.96	5.86	7.33	26.86	62.91	6.38	3.85	73.48	86.33	70.04
SAN	0.651	0.637	0.481	0.424	70.37	68.85	6.55	0.75	42.06	57.94	0	0	98.56	98.25	96.81
SGO	0.647	0.64	0.465	0.429	84.84	61.81	4.16	0.57	48	52	0	0	100	90.87	90.87
SU	0.63	0.634	0.489	0.438	71.96	67.88	7.67	0	51.11	48.49	0.4	0	95.81	95.03	91.24
TEC	0.603	0.644	0.501	0.477	57.05	64.46	2.56	4.48	21.14	78.86	0	0	90.18	98.82	89
UG	0.621	0.647	0.539	0.469	62.68	74.45	29.46	12.72	23.34	65.69	1.95	9.02	84.15	88.11	83.23
UL	0.425	0.482	0.378	0.303	16.09	27.09	3.2	0	8.36	81.23	10.41	0	76.18	86.98	73.57
VIE	0.666	0.66	0.549	0.46	78.05	86.5	29.02	6.57	47.42	52.49	0.09	0	92.15	89.97	82.2
VIV	0.602	0.616	0.522	0.393	52.46	52.54	8.3	0.06	32.26	60.07	7.67	0	84.26	90.41	82.33

Tabla Anexo B.1-1: Resumen del análisis dinámico del exponente de Hurst para los componentes del CAC40, explorados con ventanas de 480 muestras.

Ticker	\bar{H}_d	\bar{L}_d	\bar{C}_d	\bar{O}_d	$H_d > 0.6$	$L_d > 0.6$	$C_d > 0.6$	$O_d > 0.6$	$H_d >$	$L_d >$	$C_d >$	$O_d >$	$H_d >$ $C_d \& O_d$	$L_d >$ $C_d \& O_d$	$H_d \& L_d >$ $C_d \& O_d$
AC	0.61	0.638	0.533	0.461	65.33	67.13	5.19	0	10.69	89.28	0.03	0	98.9	99.97	98.9
ACA	0.652	0.682	0.541	0.457	93.54	94.05	30.02	0	24.31	75.69	0	0	95.16	95.12	90.29
AI	0.627	0.479	0.421	0.305	84.24	61.63	0	0	51.97	48.03	0	0	100	68.02	68.02
AIR	0.666	0.58	0.515	0.453	91.2	46.49	1.2	0	74.92	25.08	0	0	100	78.86	78.86
ALO	0.603	0.667	0.517	0.438	61.49	61.49	0.06	0	8.17	91.83	0	0	99.81	100	99.81
ALU	0.615	0.602	0.519	0.461	64.24	51.91	0.1	1.63	56.31	43.69	0	0	99.97	88.54	88.51
BN	0.654	0.624	0.474	0.43	84.22	75.26	0	0	82.58	17.42	0	0	100	100	100
BNP	0.663	0.66	0.522	0.423	88.77	91.14	17.73	0	39.05	60.95	0	0	100	100	100
CA	0.623	0.635	0.504	0.453	75.22	93.27	0	0	36.86	63.14	0	0	99.87	100	99.87
CAP	0.667	0.666	0.538	0.506	97.5	99.33	11.02	3.46	60.17	39.83	0	0	99.97	99.23	99.2
CS	0.654	0.655	0.552	0.457	85.6	88	21.57	0	49.7	50.23	0	0.07	98.33	96.53	94.93
DG	0.639	0.688	0.468	0.44	83	83.73	0	3.23	15.77	84.23	0	0	97.43	100	97.43
EDF	0.668	0.702	0.595	0.476	99.93	96.31	30.94	0	29.35	70.45	0.2	0	98.22	98.81	97.23
EI	0.395	0.369	0.282	0.263	29.57	0.53	0	0	52.98	15.08	31.9	0.03	68.03	68.07	68.03
EN	0.589	0.634	0.469	0.443	51.62	63.9	1.77	0	14.85	84.22	0.9	0.03	85.59	98.37	84.88
FP	0.64	0.657	0.499	0.454	84.02	99.4	0	0	30.34	69.66	0	0	100	100	100
FR	0.553	0.681	0.536	0.433	37.48	89.66	36.87	0.61	0	99.16	0.84	0	64.86	99.16	64.86
GLE	0.597	0.663	0.58	0.447	59.46	93.6	37.34	0	11.23	77.02	11.76	0	42.54	85.38	39.67

GSZ	0.643	0.683	0.527	0.447	73.31	84.02	1.17	0	13.61	86.19	0.1	0.1	97.3	91.52	89.02
KER	0.694	0.671	0.555	0.503	97.67	93.66	8.9	0	71.79	28.21	0	0	100	100	100
LG	0.645	0.67	0.494	0.425	82.73	94.72	6.48	0	26.63	73.37	0	0	100	100	100
LR	0.607	0.632	0.478	0.398	60.25	69.98	0	0	26.36	73.64	0	0	100	100	100
MC	0.656	0.667	0.514	0.491	97.67	99	0	0	39.31	60.69	0	0	100	100	100
ML	0.643	0.626	0.532	0.428	82.02	72.16	4.73	0	54.45	45.55	0	0	98.27	90.51	88.78
MT	0.519	0.509	0.443	0.373	13.14	15.46	9.66	0	56.44	31.06	12.5	0	87.5	81.96	81.96
OR	0.602	0.575	0.424	0.331	51.75	26.26	0	0	64.28	35.72	0	0	99.97	100	99.97
ORA	0.674	0.693	0.569	0.448	99.27	96.63	18.21	0.03	32.91	67.06	0.03	0	98.93	98.7	97.67
PUB	0.612	0.592	0.512	0.46	58.42	43.64	0.21	0	61.53	38.47	0	0	86.39	100	86.39
RI	0.623	0.604	0.462	0.445	66.83	57.21	0	0	66.03	33.97	0	0	100	100	100
RNO	0.655	0.671	0.569	0.45	99.9	100	29.63	0	38.15	61.85	0	0	95.74	100	95.74
SAF	0.568	0.603	0.486	0.456	42.79	41.69	0	0	23.06	75.91	0.8	0.23	86.5	96.5	84.04
SAN	0.648	0.645	0.479	0.421	79.05	79.85	3.26	0	45.62	54.38	0	0	100	100	100
SGO	0.653	0.656	0.472	0.435	99.87	64.9	0	0	39.03	60.97	0	0	100	99.93	99.93
SU	0.639	0.655	0.498	0.445	91.5	83.54	0.37	0	32.32	67.68	0	0	100	98.63	98.63
TEC	0.592	0.638	0.494	0.461	47.18	53.58	0	0	15.63	84.37	0	0	99.97	99.97	99.93
UG	0.629	0.655	0.545	0.451	74.86	78.79	17.88	0	28.11	69.33	0	2.56	95.07	97.4	95.04
UL	0.421	0.474	0.371	0.299	0.67	20.74	0	0	0.04	99.75	0.21	0	79.1	99.79	79.1
VIE	0.689	0.662	0.55	0.459	93.2	90.24	19.24	3.73	58	42	0	0	99.93	97.07	97
VIV	0.61	0.625	0.531	0.397	61.18	68.71	8.76	0	21.13	71.08	7.8	0	85.57	91.4	84.77

Tabla Anexo B.1-2: Resumen del análisis dinámico del exponente de Hurst para los componentes del CAC40, explorados con ventanas de 960 muestras.

Ticker	\bar{H}_d	\bar{L}_d	\bar{C}_d	\bar{O}_d	$H_d > 0.6$	$L_d > 0.6$	$C_d > 0.6$	$O_d > 0.6$	$H_d >$	$L_d >$	$C_d >$	$O_d >$	$H_d >$ $C_d \& O_d$	$L_d >$ $C_d \& O_d$	$H_d \& L_d >$ $C_d \& O_d$
AC	0.621	0.645	0.541	0.457	67.9	76.89	0	0	9.35	90.65	0	0	100	100	100
ACA	0.65	0.674	0.541	0.444	95.15	95.94	13.76	0	14.59	85.41	0	0	99.85	100	99.85
AI	0.623	0.381	0.418	0.245	84.14	42.47	0	0	73.79	26.21	0	0	100	42.9	42.9
AIR	0.663	0.566	0.508	0.453	93.23	32.58	0.76	0	79.17	20.83	0	0	100	93.51	93.51
ALO	0.586	0.641	0.513	0.433	44.87	44.87	0.09	0	9.62	90.38	0	0	99.73	100	99.73
ALU	0.615	0.591	0.512	0.459	72.81	33.25	0.08	0.04	66.94	33.06	0	0	100	91.6	91.6
BN	0.668	0.631	0.49	0.44	93.42	88.23	0	0	94.93	5.07	0	0	100	100	100
BNP	0.666	0.648	0.504	0.422	98.93	88.38	1.31	0	57.44	42.56	0	0	100	100	100
CA	0.621	0.631	0.506	0.444	85.45	93.66	0	0	25.21	74.79	0	0	100	100	100
CAP	0.669	0.664	0.546	0.501	97.54	99.8	11.1	3.09	70.67	29.33	0	0	100	99.6	99.6
CS	0.646	0.634	0.537	0.449	83.89	86.03	5.28	0	69.44	30.48	0	0.08	99.92	95.91	95.91
DG	0.65	0.706	0.462	0.442	95.08	99.6	0	0.95	3.33	96.67	0	0	99.92	100	99.92
EDF	0.665	0.703	0.598	0.458	99.9	99.71	30.5	0	27.51	72.39	0.1	0	98.65	97.78	96.53
EI	0.272	0.255	0.203	0.176	15.93	0.4	0	0	35.28	7.65	57.04	0.04	42.93	42.93	42.93
EN	0.602	0.649	0.472	0.437	64.76	83.08	0	0	3.62	96.38	0	0	92.69	100	92.69
FP	0.649	0.663	0.499	0.462	86.92	98.18	0	0	21.56	78.44	0	0	100	100	100
FR	0.555	0.684	0.541	0.438	24.8	99.64	32.65	0.48	0	98.91	1.09	0	60.71	98.91	60.71
GLE	0.578	0.646	0.583	0.431	36.24	96.59	41.28	0	7.81	85.41	6.78	0	30.45	89.77	27
GSZ	0.659	0.697	0.54	0.46	86.81	86.89	0.64	0	10.77	88.99	0.12	0.12	96.78	89.91	86.93
KER	0.694	0.675	0.557	0.503	100	100	2.5	0	76.62	23.38	0	0	100	100	100
LG	0.654	0.676	0.509	0.415	100	97.81	1.83	0	21.09	78.91	0	0	100	100	100
LR	0.61	0.633	0.479	0.399	55.59	100	0	0	15.97	84.03	0	0	100	100	100
MC	0.655	0.667	0.513	0.496	99.72	98.81	0	0	37.11	62.89	0	0	100	100	100
ML	0.646	0.642	0.541	0.423	81.97	82.32	0	0	40.9	59.1	0	0	100	95.52	95.52
MT	0.552	0.564	0.414	0.336	18.58	24.32	0	0	18.92	81.08	0	0	100	100	100
OR	0.597	0.582	0.423	0.318	43.47	14.64	0	0	61.32	38.68	0	0	100	100	100
ORA	0.676	0.695	0.567	0.441	99.36	97.14	17.03	0	20.84	79.12	0.04	0	98.81	98.85	97.7
PUB	0.61	0.597	0.517	0.462	65.67	41.82	0	0	69.12	30.88	0	0	86.16	100	86.16
RI	0.635	0.608	0.47	0.452	81.45	68.05	0	0	70.71	29.29	0	0	100	100	100
RNO	0.649	0.661	0.561	0.444	100	100	19.26	0	24.56	75.44	0	0	98.1	100	98.1
SAF	0.564	0.609	0.485	0.463	33.48	44.27	0	0	0	100	0	0	96.03	100	96.03
SAN	0.643	0.649	0.475	0.419	88.78	91.08	0	0	44.95	55.05	0	0	100	100	100
SGO	0.655	0.655	0.47	0.44	99.92	76.06	0	0	42.57	57.43	0	0	100	100	100
SU	0.639	0.664	0.498	0.453	92.82	90.6	0	0	19.2	80.8	0	0	100	100	100
TEC	0.576	0.629	0.492	0.45	31.14	52.96	0	0	6.98	93.02	0	0	100	100	100
UG	0.639	0.656	0.556	0.46	85.3	85.33	15.74	0	22.12	74.99	0	2.89	95.52	97.11	95.52
UL	0.445	0.498	0.386	0.319	0	5.23	0	0	0	100	0	0	87.24	100	87.24
VIE	0.706	0.65	0.535	0.453	96.86	89.33	2.47	0	80.7	19.3	0	0	100	100	100
VIV	0.613	0.629	0.538	0.407	71.2	76.28	9.88	0	10	80.4	9.6	0	88.38	89.85	87.82

Tabla Anexo B.1-3: Resumen del análisis dinámico del exponente de Hurst para los componentes del CAC40, explorados con ventanas de 1440 muestras.

Anexo B.2: Resumen de los resultados de estimación dinámica del exponente de Hurst para los valores del índice DAX

Ticker	\bar{H}_d	\bar{L}_d	\bar{C}_d	\bar{O}_d	$H_d > 0.6$	$L_d > 0.6$	$C_d > 0.6$	$O_d > 0.6$	$H_d >$	$L_d >$	$C_d >$	$O_d >$	$H_d >$ $C_d \& O_d$	$L_d >$ $C_d \& O_d$	$H_d \& L_d >$ $C_d \& O_d$
ADS	0.683	0.604	0.534	0.41	94.53	60.86	10.43	2.42	88.06	11.94	0	0	100	82.09	82.09
ALV	0.622	0.628	0.537	0.428	67.25	64.92	15.84	0	45.82	54.03	0.15	0	98.54	88.47	87.16
BAS	0.61	0.611	0.44	0.409	62.66	48.54	12.43	0	50.67	49.33	0	0	85.65	98.02	83.67
BAYN	0.66	0.661	0.439	0.454	81.96	91.29	4.4	7.97	53.75	46.22	0.03	0	94.48	99.47	93.98
BEI	0.546	0.524	0.489	0.425	21.89	40.29	4.25	4.05	44.83	46.06	5.09	4.02	70.92	67.89	47.92
BMW	0.645	0.648	0.555	0.457	81.41	72.84	23.19	3.64	54.11	41.43	3.82	0.64	90.36	89.54	84.35
CBK	0.672	0.68	0.566	0.464	89.42	95.86	33.87	0.44	48.24	51.18	0.58	0	85.84	99.42	85.84
DAI	0.624	0.612	0.511	0.463	68.7	45.61	16.06	0	61.67	36.96	1.37	0	79.48	97.44	78.29
DB1	0.588	0.604	0.523	0.462	46.96	53.8	16.97	1.39	26.33	69.47	1.04	3.15	86.28	89.28	79.75
DBK	0.616	0.643	0.525	0.453	70.2	67.95	22.16	1.28	44.01	55.96	0	0.03	80.05	96.94	77.02
DPW	0.609	0.635	0.49	0.426	57.88	73.31	22.37	0	35.85	63.75	0.4	0	78.29	99.6	78.29
DTE	0.648	0.623	0.519	0.454	59.95	65.84	5.8	0.32	62.2	32.91	4.9	0	76.92	92.39	74.21
EOAN	0.597	0.661	0.469	0.443	48.61	71.08	34.55	3.8	46.25	52.15	1.54	0.06	63.73	92.13	57.46
FME	0.595	0.554	0.446	0.388	38.27	24.33	0.23	0	67.11	22.99	9.9	0	89.26	84.28	83.44
FRE	0.607	0.546	0.509	0.414	35.39	32.85	7.53	7.26	78.59	17.5	3.85	0.06	96.09	68.41	68.41
HEI	0.626	0.623	0.5	0.473	57.03	67.51	13.51	11.09	48.53	51.47	0	0	96.07	98.28	94.35
HEN3	0.607	0.606	0.524	0.449	47.59	62.02	8.54	6.66	36.88	46.74	16.38	0	69.89	82.08	68.35
IFX	0.637	0.617	0.551	0.451	72.09	57.3	28.38	7.43	53.68	35.34	7.04	3.94	79.88	82.01	72.86
LHA	0.617	0.613	0.512	0.447	58.02	60.87	13.29	3.64	59.01	40.96	0.03	0	88.72	95.51	84.26
LIN	0.635	0.6	0.44	0.38	66.57	56.03	5.71	0	75.45	24.55	0	0	99.74	95.17	94.9
LXS	0.617	0.625	0.491	0.484	58.17	68.79	11.76	8.79	36.51	45.15	4.54	13.8	76.3	80.29	74.93
MRK	0.622	0.567	0.503	0.454	63.62	31.78	8.62	0	74.92	17.71	7.37	0	91.76	79.58	78.71
MUV2	0.647	0.64	0.495	0.426	73.7	72.34	16.07	0.23	42.95	57.05	0	0	97.76	95.78	93.54
RWE	0.694	0.67	0.545	0.475	96.05	82.34	37.94	8.58	63.56	33.99	2.46	0	95.46	93.94	91.85
SAP	0.599	0.565	0.507	0.447	51.62	33.37	17.92	1.49	70.3	24.05	5.65	0	90.99	73.77	70.42
SDF	0.562	0.575	0.515	0.441	32.96	44.46	33.11	12.8	47.28	41.9	10.79	0.03	66.57	71.43	48.82
SIE	0.631	0.605	0.484	0.45	77.28	54.8	3.44	0.38	65.3	34.62	0.09	0	99.91	94.69	94.69
TKA	0.608	0.63	0.474	0.465	59.09	56.52	19.28	3.9	44.44	47.76	4.51	3.29	75.07	89.43	72.31
VOW3	0.64	0.637	0.567	0.482	74.94	66.17	22.99	0.91	50.87	47.73	0.08	1.32	96.03	73.04	70.47

Tabla Anexo B.2-1: Resumen del análisis dinámico del exponente de Hurst para los componentes del DAX explorados con ventanas de 480 muestras.

Ticker	\bar{H}_d	\bar{L}_d	\bar{C}_d	\bar{O}_d	$H_d > 0.6$	$L_d > 0.6$	$C_d > 0.6$	$O_d > 0.6$	$H_d >$	$L_d >$	$C_d >$	$O_d >$	$H_d >$ $C_d \& O_d$	$L_d >$ $C_d \& O_d$	$H_d \& L_d >$ $C_d \& O_d$
ADS	0.677	0.602	0.531	0.399	99.93	58.29	0	0	95.6	4.4	0	0	100	92.45	92.45
ALV	0.623	0.64	0.541	0.418	81.59	81.76	5.52	0	23.11	76.89	0	0	100	95.47	95.47
BAS	0.608	0.621	0.441	0.4	60.15	55.45	1.25	0	50.2	49.8	0	0	93.81	100	93.81
BAYN	0.665	0.667	0.432	0.443	90.98	99.79	0	0.03	56.71	43.29	0	0	100	100	100
BEI	0.545	0.469	0.485	0.403	8.29	24.67	0	0	53.4	44.16	2.44	0	80.03	62.03	44.5
BMW	0.654	0.657	0.559	0.447	98.81	79.71	8.16	0	57.55	42.45	0	0	100	99.09	99.09
CBK	0.676	0.695	0.581	0.458	95.66	98.48	38.6	0	38.22	61.47	0.3	0	87.46	99.7	87.46
DAI	0.628	0.608	0.505	0.45	73.57	44.32	24.36	0	66.05	33.95	0	0	100	100	100
DB1	0.578	0.601	0.516	0.454	30.17	52.25	1.45	0	18.43	80.94	0.59	0.04	93.94	97.14	91.71
DBK	0.613	0.656	0.532	0.434	68.74	93.35	8.82	0	19.53	80.47	0	0	85.79	100	85.79
DPW	0.613	0.65	0.506	0.429	69.88	75.61	21.83	0	31.36	68.64	0	0	86.45	100	86.45
DTE	0.665	0.636	0.52	0.454	72.59	73.13	0.41	0	68.38	31.62	0	0	90.38	99.05	89.43
EOAN	0.587	0.691	0.495	0.442	37.08	77.06	50.74	0	28.58	71.42	0	0	47.13	99.93	47.06
FME	0.587	0.547	0.436	0.382	25.81	21.58	0	0	78.28	21.72	0	0	100	76.25	76.25
FRE	0.62	0.558	0.526	0.42	49.15	38.64	8.45	8.45	87.14	11.5	1.36	0	98.64	64.28	64.28
HEI	0.607	0.607	0.48	0.447	51.51	49.98	1.76	6.6	51.2	48.8	0	0	99.97	100	99.97
HEN3	0.599	0.603	0.541	0.441	47.65	48.77	0	0	47.25	48.59	4.16	0	93.34	87.89	85.38
IFX	0.641	0.623	0.549	0.438	90.51	69.2	19.04	0	55.74	36.22	8.04	0	91.07	85.65	84.75
LHA	0.628	0.621	0.519	0.438	75.93	71.86	2.47	0	61.32	38.68	0	0	98.24	100	98.24
LIN	0.654	0.608	0.439	0.368	82.5	63.37	0	0	91.57	8.43	0	0	100	100	100
LXS	0.619	0.636	0.497	0.475	71.44	67.51	7.61	0	51.2	48.8	0	0	99.49	94.28	93.77
MRK	0.617	0.567	0.509	0.453	64.61	34.1	0.71	0	87.64	4	8.36	0	90.55	91.57	90.48
MUV2	0.644	0.646	0.485	0.413	82.43	79.18	0.81	0	35.55	64.45	0	0	100	100	100
RWE	0.702	0.694	0.569	0.479	99.96	97.11	48.17	0	44.12	55.88	0	0	100	100	100
SAP	0.594	0.577	0.511	0.436	40.73	42.83	13.52	0	58.12	39.31	2.58	0	94.95	88.38	85.9
SDF	0.551	0.558	0.49	0.4	18.5	30.71	20.12	0	52.11	37.84	10.04	0	78.93	84.68	73.66
SIE	0.634	0.61	0.484	0.448	85.86	58.97	0.1	0	76.03	23.97	0	0	100	100	100
TKA	0.61	0.648	0.464	0.453	57.14	67.03	24.58	0	35.17	64.83	0	0	80.16	100	80.16
VOW3	0.645	0.653	0.568	0.476	89.03	89.85	0.27	0	15.78	84.22	0	0	100	100	100

Tabla Anexo B.2-2: Resumen del análisis dinámico del exponente de Hurst para los componentes del DAX explorados con ventanas de 960 muestras.

Ticker	\bar{H}_d	\bar{L}_d	\bar{C}_d	\bar{O}_d	$H_d > 0.6$	$L_d > 0.6$	$C_d > 0.6$	$O_d > 0.6$	$H_d >$	$L_d >$	$C_d >$	$O_d >$	$H_d >$ $C_d \& O_d$	$L_d >$ $C_d \& O_d$	$H_d \& L_d >$ $C_d \& O_d$
ADS	0.672	0.601	0.534	0.398	99.96	60.23	0	0	100	0	0	0	100	100	100
ALV	0.622	0.637	0.538	0.41	83.27	86.42	0.04	0	16.61	83.39	0	0	100	96.97	96.97
BAS	0.606	0.619	0.45	0.397	54.2	64.01	0	0	45.36	54.64	0	0	100	100	100
BAYN	0.672	0.669	0.438	0.436	92.99	99.92	0	0	63.52	36.48	0	0	100	100	100
BEI	0.542	0.398	0.477	0.383	0	10.14	0	0	73.94	26.06	0	0	99.76	41.74	41.49
BMW	0.659	0.662	0.562	0.447	99.92	84.43	3.24	0	53.92	46.08	0	0	100	100	100
CBK	0.678	0.697	0.579	0.456	99.64	98.7	27.03	0	33.83	65.8	0.36	0	89.96	99.64	89.96
DAI	0.635	0.597	0.503	0.446	84.99	48.12	5.38	0	86.36	13.64	0	0	100	100	100
DB1	0.559	0.585	0.496	0.448	15.88	22.52	0	0	6.29	93.67	0	0.05	98.1	99.95	98.1
DBK	0.61	0.653	0.541	0.414	68.12	99.92	6.64	0	6.08	93.92	0	0	94.86	100	94.86
DPW	0.616	0.668	0.522	0.431	81.85	83.58	14.3	0	19.88	80.12	0	0	91.99	100	91.99
DTE	0.687	0.646	0.518	0.458	89.96	87.17	0.04	0	78.43	21.57	0	0	100	100	100
EOAN	0.579	0.711	0.533	0.446	24.32	78.34	57.61	0	18.56	81.44	0	0	41.43	100	41.43
FME	0.581	0.548	0.431	0.382	18.86	18.34	0	0	85.22	14.78	0	0	100	93.98	93.98
FRE	0.633	0.572	0.543	0.433	63.17	33.79	10.09	10.09	92.91	7.01	0.08	0	99.92	65.64	65.64
HEI	0.581	0.583	0.454	0.422	29.45	39.52	0	1.05	48.73	51.27	0	0	100	100	100
HEN3	0.599	0.607	0.546	0.446	37.73	64.14	0	0	44.11	55.89	0	0	97.32	99.26	96.59
IFX	0.638	0.621	0.546	0.439	98.88	71.6	19.1	0	76.35	14.88	8.76	0	90.53	87.97	87.27
LHA	0.634	0.624	0.525	0.43	81.82	83.4	0	0	60.73	39.27	0	0	100	100	100
LIN	0.663	0.61	0.449	0.365	89.13	66.94	0	0	92.97	7.03	0	0	100	100	100
LXS	0.616	0.637	0.501	0.477	72.4	49.13	0	0	47.6	52.4	0	0	100	100	100
MRK	0.61	0.57	0.515	0.45	66.56	26.12	0	0	88.52	2.06	9.42	0	88.76	90.54	88.72
MUV2	0.635	0.643	0.475	0.404	86.3	80.52	0	0	39.85	60.15	0	0	100	100	100
RWE	0.714	0.71	0.596	0.5	99.96	99.96	64.01	0	47.03	52.97	0	0	100	100	100
SAP	0.593	0.584	0.513	0.434	34.72	53.26	9.27	0	41.24	56.9	1.86	0	98.14	91.26	91.26
SDF	0.539	0.53	0.452	0.367	7.63	13.93	6.3	0	70.93	28.99	0.08	0	92.94	99.64	92.65
SIE	0.635	0.608	0.482	0.461	91.58	67.56	0	0	91.54	8.46	0	0	100	100	100
TKA	0.601	0.653	0.475	0.451	47.09	77.28	10.23	0	21.22	78.78	0	0	92	100	92
VOW3	0.634	0.615	0.561	0.469	100	83.94	0	0	100	0	0	0	100	100	100

Tabla Anexo B.2-3: Resumen del análisis dinámico del exponente de Hurst para los componentes del DAX explorados con ventanas de 1440 muestras.

Anexo B.3: Resumen de los resultados de estimación dinámica del exponente de Hurst para los valores del DJI (Dow Jones Industrial Average)

Ticker	\bar{H}_d	\bar{L}_d	\bar{C}_d	\bar{O}_d	$H_d > 0.6$	$L_d > 0.6$	$C_d > 0.6$	$O_d > 0.6$	$H_d >$	$L_d >$	$C_d >$	$O_d >$	$H_d >$ $C_d \& O_d$	$L_d >$ $C_d \& O_d$	$H_d \& L_d >$ $C_d \& O_d$
AXP	0.63	0.629	0.496	0.484	64.05	65.17	13.37	11.11	46.65	44.22	2.47	6.66	86.36	87.94	83.44
BA	0.655	0.626	0.538	0.591	73.52	70.52	27.35	49.92	51.81	35.16	0.73	12.3	83.26	64.77	61.06
CAT	0.646	0.643	0.562	0.604	76.02	76.99	34.13	51.43	44.98	34.93	1.42	18.67	68.73	63.2	52.01
CSCO	0.625	0.643	0.514	0.479	57.14	73.14	12.18	11.13	44.41	53.41	1.5	0.67	86.85	97.31	86.34
CVX	0.663	0.63	0.523	0.496	83.65	76.61	14.81	17.39	47.73	43.52	5.26	3.48	90.98	80.28	80
DD	0.618	0.635	0.512	0.546	56.17	68.92	22.28	33.82	39.05	57.69	1.99	1.27	82.22	88.05	73.53
DIS	0.656	0.654	0.542	0.601	79.79	75.55	24.22	52.34	39.94	43.36	0.01	16.68	69.08	68.75	54.52
GE	0.612	0.604	0.502	0.444	58.96	61.23	8.45	0.3	49.44	44.29	1.97	4.31	93.4	88.19	87.86
GS	0.588	0.638	0.452	0.424	39.02	72.89	0.92	0.36	20.2	79.8	0	0	96.81	95.06	91.87
HD	0.647	0.617	0.532	0.513	76.44	58.19	13.29	9.96	58.52	35.45	1.86	4.17	90.59	76.48	73.1
IBM	0.629	0.627	0.479	0.432	65.19	67.71	3.05	3.47	48.49	49.04	0.01	2.46	96.51	92.26	91.24
INTC	0.643	0.608	0.521	0.479	69.69	54.13	24.76	13.39	66.39	28.29	0.66	4.66	89.24	79.62	74.19
JNJ	0.654	0.642	0.554	0.487	72.99	66.28	22.17	14.29	49.73	34.69	7.25	8.32	79.05	72.63	67.26
JPM	0.658	0.651	0.525	0.486	76.47	71.77	20.6	4.73	53.67	45.91	0.41	0	93.93	92.42	86.77
KO	0.622	0.626	0.501	0.517	66.38	65.87	9.1	12.06	38.17	53.2	1.41	7.22	81.39	88.02	78.03
MCD	0.638	0.618	0.532	0.475	76.23	60.9	17.84	8.56	58.92	28.92	6.36	5.81	81.7	80.23	74.09
MMM	0.602	0.629	0.495	0.489	54.62	65.59	9.49	10.76	35.15	58.58	0.45	5.82	84.87	85.03	76.18
MRK	0.664	0.631	0.539	0.507	78.64	59.61	18.63	18.24	62.95	27.57	3.02	6.45	88.09	74.02	71.58
MSFT	0.624	0.618	0.484	0.469	56.69	67.42	10.59	7.01	56.05	41.97	1.87	0.1	77.93	94.35	74.26
NKE	0.651	0.61	0.546	0.555	73.91	59.81	26.76	27.38	70.41	23.02	0.15	6.43	88.83	68.75	64.15
PFE	0.642	0.597	0.539	0.476	72.05	48.31	23.02	6.21	52.24	34.15	7.52	6.09	85.44	70.45	69.51
PG	0.622	0.597	0.494	0.449	63.12	65.09	8.5	4.9	49.93	45.04	1.64	3.4	87.69	76.52	69.24
T	0.65	0.648	0.527	0.5	79.41	68.17	21.4	16.24	57.44	40.41	1.18	0.96	85.75	91.74	79.63
TRV	0.629	0.614	0.494	0.478	63.65	57.74	19.93	12.07	58.07	40.67	1.26	0	94.38	87.02	82.66
UNH	0.663	0.588	0.532	0.522	78.65	45.76	32.93	20.59	67.44	28.83	3.73	0	95.03	60.82	59.58
UTX	0.614	0.62	0.548	0.519	65.08	66.51	30.42	12.85	42.7	41.21	14.41	1.69	65.83	66.86	48.79
V	0.522	0.626	0.442	0.459	5.33	79.56	0	0	8.53	91.38	0	0.09	60.8	99.64	60.53
VZ	0.647	0.647	0.511	0.499	74.56	71.39	19.55	9.85	51.72	47.96	0.32	0	88.6	92.64	81.56
WMT	0.61	0.629	0.528	0.472	54.04	66.3	30.62	11.62	34.44	56.17	8.56	0.82	76.86	79.73	65.98
XOM	0.623	0.623	0.478	0.466	67.16	67.42	9.11	0.81	50.99	46.4	1.24	1.37	88.03	92.98	83.61

Tabla Anexo B.3-1: Resumen del análisis dinámico del exponente de Hurst para los componentes del Dow Jones Industrial Average explorados con ventanas de 480 muestras.

Ticker	\bar{H}_d	\bar{L}_d	\bar{C}_d	\bar{O}_d	Hd>0.6	Ld>0.6	Cd>0.6	Od>0.6	Hd>	Ld>	Cd>	Od>	Hd>	Ld>	Hd&Ld>
													Cd&Od	Cd&Od	Cd&Od
AXP	0.633	0.631	0.498	0.472	70.6	76.74	3.71	2.98	50.25	46.52	0.59	2.64	96.32	93.17	92.72
BA	0.656	0.628	0.544	0.598	74.82	76.98	26.69	54.55	51.4	35.52	0	13.07	85.34	56.43	54.84
CAT	0.643	0.643	0.56	0.606	83.75	82.03	22.86	51.78	46.17	35.78	0.85	17.19	68.26	72.55	58.86
CSCO	0.634	0.642	0.499	0.469	56.76	83.18	7.53	8.32	36.96	63.02	0.02	0	96.25	99.96	96.23
CVX	0.657	0.621	0.516	0.485	95.41	85.32	13.07	11.05	47.17	49.38	3.45	0	96.55	75.68	75.68
DD	0.622	0.643	0.518	0.558	70.62	77.38	17.68	35.02	28.72	71.28	0	0	81.21	98.54	79.75
DIS	0.661	0.652	0.54	0.605	82.52	75.68	22.73	48.61	48.88	44.22	0	6.9	81.38	73.52	61.8
GE	0.627	0.61	0.506	0.442	74.83	65.98	3.49	0	59.93	39	0	1.07	98.93	95.83	95.83
GS	0.59	0.639	0.451	0.413	36.22	82.55	0	0	21.86	78.14	0	0	100	96.35	96.35
HD	0.656	0.627	0.539	0.524	81.74	68.62	8.58	15.49	63.38	32.75	1.34	2.54	94.39	81.14	79.41
IBM	0.626	0.622	0.476	0.421	65.72	68.67	0.03	0	50.93	49.07	0	0	100	96.59	96.59
INTC	0.651	0.621	0.524	0.478	74.62	60.32	21.7	7.43	67.59	25.22	0.01	7.17	88.7	87.87	83.76
JNJ	0.661	0.648	0.555	0.483	78.28	70.96	25.1	8.53	51.67	38.34	6.35	3.63	84.88	85.6	80.46
JPM	0.665	0.657	0.522	0.485	79.61	86.79	13.85	0.61	59.77	40.23	0	0	98.86	99.94	98.8
KO	0.63	0.638	0.508	0.527	78.23	72.62	7.7	11.03	41.02	55.5	0	3.48	91.22	95.58	90.28
MCD	0.641	0.614	0.538	0.47	76.47	58.99	11.66	4.46	68.34	22.13	7.01	2.52	87.73	84.76	82.02
MMM	0.599	0.631	0.492	0.483	49.72	66.25	1.29	3.45	38.2	61.77	0	0.03	98.27	89.39	87.69
MRK	0.676	0.64	0.541	0.509	84.56	60.06	12.6	8.6	68.96	23.49	0.26	7.29	91.28	83.78	82.61
MSFT	0.644	0.624	0.482	0.47	59.63	79.53	0.69	2.84	58.42	41.42	0.13	0.03	96.1	98.82	95.08
NKE	0.655	0.615	0.548	0.556	82.59	64.07	17.13	25.6	83.42	14.01	0.01	2.56	95.76	80.95	79.29
PFE	0.651	0.606	0.545	0.475	78.43	55.19	24.33	0.39	61.84	30.35	5.16	2.65	92.18	79.82	79.82
PG	0.628	0.584	0.494	0.44	69.76	66.5	9.8	0	49.96	48.6	1.44	0	96.19	81.47	79.1
T	0.649	0.651	0.518	0.5	81.71	70.26	10.18	4.78	46.17	53.83	0	0	95.28	98.7	93.98
TRV	0.631	0.603	0.487	0.464	62.65	50.61	13.08	4.61	74.14	25.86	0	0	99.62	82.62	82.25
UNH	0.663	0.583	0.529	0.525	78.6	35.82	17.23	19.45	72.31	27.69	0	0	100	72.96	72.96
UTX	0.613	0.616	0.542	0.51	62.16	62.31	36.57	3.49	49.91	40.74	9.35	0	63.87	77.42	50.64
V	0.526	0.63	0.435	0.462	0	74.26	0	0	13.33	86.67	0	0	78.29	100	78.29
VZ	0.657	0.655	0.507	0.505	83.41	79.82	19.23	3.44	54.26	45.74	0	0	96.76	99.51	96.27
WMT	0.625	0.644	0.534	0.483	61.19	72.58	26.18	9.96	34.65	64	1.35	0	84.36	94.71	80.42
XOM	0.619	0.632	0.477	0.466	63.27	76.75	1.78	0	48.58	50.41	0.97	0.04	96.9	97.04	94.94

Tabla Anexo B.3-2: Resumen del análisis dinámico del exponente de Hurst para los componentes del Dow Jones Industrial Average explorados con ventanas de 960 muestras.

Ticker	\bar{H}_d	\bar{L}_d	\bar{C}_d	\bar{O}_d	Hd>0.6	Ld>0.6	Cd>0.6	Od>0.6	Hd>	Ld>	Cd>	Od>	Hd>	Ld>	Hd&Ld>
													Cd&Od	Cd&Od	Cd&Od
AXP	0.639	0.637	0.498	0.464	78.94	84.06	0.23	0.29	49.24	50.76	0	0	100	97.91	97.91
BA	0.653	0.629	0.543	0.6	80.75	84.14	24.19	53.27	48.2	38.98	0	12.82	86.96	58.94	58.72
CAT	0.64	0.644	0.561	0.61	82.76	81.91	29.59	56.36	45.58	37.73	0.01	16.68	64.22	77.98	58.9
CSCO	0.637	0.633	0.477	0.452	63.32	85.06	0.21	0.49	33.42	66.56	0.02	0	99.74	99.96	99.72
CVX	0.651	0.613	0.506	0.472	97.91	79.87	7.29	5.71	49.34	50.16	0.49	0	99.51	75.99	75.99
DD	0.627	0.652	0.526	0.572	78.19	87.89	13.1	36.09	18.05	81.95	0	0	83.86	100	83.86
DIS	0.666	0.649	0.541	0.609	88.7	72.45	25.18	44.44	55.01	40.36	0	4.63	84.64	70.69	59.95
GE	0.636	0.614	0.505	0.44	81.73	64.55	2.87	0	73.65	26.35	0	0	100	99.42	99.42
GS	0.597	0.646	0.452	0.4	36.09	89.32	0	0	19.11	80.89	0	0	100	100	100
HD	0.666	0.641	0.547	0.534	87.66	77.68	8.1	22.57	68.67	29.86	1.47	0	98.53	85.55	85.55
IBM	0.624	0.621	0.477	0.415	65.82	61.29	0.03	0	51.23	48.77	0	0	100	97.39	97.39
INTC	0.656	0.627	0.524	0.47	82.58	66.09	18.3	7.14	69.3	26.48	0.01	4.2	94.69	93.24	92.14
JNJ	0.671	0.658	0.562	0.48	87.62	83.62	26.5	2.32	55.88	38.4	5.35	0.37	93.08	90.12	88.92
JPM	0.674	0.66	0.522	0.484	90.67	89.4	12.93	0	67.45	32.55	0	0	100	99.98	99.98
KO	0.635	0.645	0.512	0.533	86.3	83.96	5.33	17.02	38.67	59.9	0	1.43	97.65	98.38	97.46
MCD	0.644	0.614	0.545	0.464	78.47	60.32	10.67	0	80.62	12.86	6.52	0	90.55	87.11	84.18
MMM	0.595	0.635	0.493	0.475	48.37	64.57	0	0	33.87	66.13	0	0	99.99	87.31	87.3
MRK	0.688	0.655	0.545	0.508	95.37	67.96	6.52	2.7	79.61	19.59	0.08	0.71	98.27	93.99	93.05
MSFT	0.663	0.631	0.481	0.476	67.3	91.52	0.68	0.02	63.29	36.71	0	0	100	99.76	99.76
NKE	0.655	0.618	0.549	0.556	80.91	68.12	17.85	23.79	89.1	10.89	0.01	0	98.68	88.7	87.39
PFE	0.659	0.617	0.553	0.477	89.7	53.97	20.5	0.4	76.48	22.82	0.7	0	99.3	76.7	76.7
PG	0.636	0.59	0.494	0.438	72.68	70.26	5.34	0	53.47	46.53	0	0	100	80.37	80.37
T	0.652	0.649	0.511	0.499	78.04	72.69	7.83	0	48.66	51.34	0	0	100	100	100
TRV	0.632	0.593	0.481	0.45	64.25	41.67	10.48	1.33	81.85	17.9	0.25	0	99.75	77.19	77.19
UNH	0.66	0.572	0.523	0.52	80.29	22.71	7.17	14.01	89.57	10.43	0	0	100	71.07	71.07
UTX	0.609	0.615	0.535	0.505	63.45	65.68	33.35	0.01	51.96	39.48	8.55	0	57.85	84.68	51.08
V	0.501	0.625	0.434	0.448	0	98.79	0	0	0	100	0	0	100	100	100
VZ	0.664	0.654	0.504	0.511	89.63	78.92	12.49	2.7	64.41	35.59	0	0	99.98	99.97	99.95
WMT	0.638	0.653	0.536	0.493	76.7	70.43	19.84	8.58	37.75	61.93	0.32	0	89.15	99.41	88.88
XOM	0.617	0.642	0.479	0.466	59.86	84.97	0.45	0	39.24	59.83	0.93	0	97.8	98.12	96.86

Tabla Anexo B.3-3: Resumen del análisis dinámico del exponente de Hurst para los componentes del Dow Jones Industrial Average, explorados con ventanas de 1440 muestras.

Anexo B.4: Resumen de los resultados de estimación dinámica del exponente de Hurst para todos los valores del índice IBEX

Ticker	\bar{H}_d	\bar{L}_d	\bar{C}_d	\bar{O}_d	$H_d > 0.6$	$L_d > 0.6$	$C_d > 0.6$	$O_d > 0.6$	$H_d >$	$L_d >$	$C_d >$	$O_d >$	$H_d >$ $C_d \& O_d$	$L_d >$ $C_d \& O_d$	$H_d \& L_d >$ $C_d \& O_d$
ABE	0.58	0.633	0.482	0.456	34.61	51.97	9.96	2.64	11.5	83.74	4.76	0	85.71	94.57	85.05
ACS	0.622	0.633	0.55	0.474	62.62	65.49	23.68	1.2	34.88	64.47	0.65	0	87.73	87.8	76.19
ACX	0.615	0.596	0.48	0.403	57.85	44.56	11.11	2.76	45.55	42.18	11.92	0.35	85.87	86.07	84.22
BBVA	0.664	0.697	0.578	0.481	89.27	97.77	39.14	7.63	41.49	58.51	0	0	74.76	99.97	74.73
BKT	0.614	0.596	0.544	0.421	69.39	58.02	26.86	0.03	48.19	33.33	18.45	0.03	79.11	73.75	71.34
CABK	0.537	0.58	0.512	0.425	28.39	43.55	4.19	0	39.03	36.24	19.35	5.39	67.89	73.34	65.96
ELE	0.58	0.639	0.552	0.45	42.73	61.16	20.96	6.53	24.06	53.76	17.1	5.08	49.64	71.84	43.66
ENG	0.633	0.607	0.52	0.417	60.44	54.99	11.22	0	57.7	33.76	8.54	0	79.92	84.25	72.71
FCC	0.643	0.63	0.496	0.415	69.01	59.34	13.64	2.09	50.93	49.04	0.03	0	95.85	95.41	91.29
FER	0.664	0.651	0.548	0.471	93.7	76	24.36	0.04	60.51	39.49	0	0	99.29	99.69	98.98
GAM	0.522	0.608	0.505	0.475	37.42	55.87	13.68	0.9	26.99	64.1	8.85	0.07	61.06	89.53	59.5
GAS	0.55	0.566	0.491	0.464	42.52	34.68	16.12	6.3	22.34	42.03	1.45	0.06	58.44	63.93	58
GRF	0.625	0.551	0.44	0.441	60.38	32.17	9.01	2.84	70.19	25.9	3.91	0	95.55	74.8	74.26
IBE	0.639	0.638	0.545	0.423	69.25	54.84	26.9	6.75	53.04	46.46	0.49	0	88	85.77	74.26
IDR	0.648	0.589	0.488	0.407	75.71	37.58	15	10.77	75.64	24.26	0.09	0	99.91	86.01	86.01
ITX	0.577	0.617	0.485	0.429	39.27	57.96	0.64	0.06	25.22	73.66	1.13	0	98.01	84.82	83.95
MAP	0.609	0.614	0.519	0.475	60.94	58.54	12.49	1.91	43.34	40.71	14.01	0.13	78.84	75.51	70.3
MTS	0.622	0.671	0.518	0.462	63.42	84.74	1.71	0.44	11.63	88.37	0	0	93.94	97.96	91.9
OHL	0.654	0.599	0.578	0.433	75.48	44.46	35.23	3.54	72.66	25.86	1.48	0	80.41	65.41	47.3
POP	0.64	0.608	0.539	0.464	72.06	60.71	26.52	0.15	61.01	22.11	16.88	0	81.65	72.03	70.56
REE	0.62	0.616	0.497	0.411	64.41	59.51	16.02	2.09	61.28	38.35	0.32	0.06	97.88	91.41	89.67
REP	0.662	0.661	0.573	0.455	83.84	76.99	39.18	0.03	49.62	45.59	4.79	0	90.71	83.78	79.28
SAB	0.624	0.609	0.552	0.482	67.79	58.02	32	9.71	47.77	36.73	15.5	0	78.74	73.96	68.2
SAN	0.655	0.67	0.512	0.436	83.81	85.67	18.51	5.08	42.56	57.44	0	0	87.26	100	87.26
SCYR	0.659	0.658	0.526	0.428	81.73	84.64	21.26	1.07	46.09	53.44	0.46	0	94.28	96.51	91.26
TEF	0.656	0.672	0.537	0.454	75.41	78	21.31	8.33	39.01	54.83	0	6.15	91.44	93.79	91.38
TL5	0.67	0.61	0.544	0.481	83.28	56.76	28.19	4.48	69.68	30.32	0	0	99.32	78.55	77.87
TRE	0.63	0.608	0.519	0.436	72.76	66.2	14.81	0	60.23	39.77	0	0	87.52	81.06	68.58

Tabla Anexo B.4-1: Resumen del análisis dinámico del exponente de Hurst para los componentes del IBEX explorados con ventanas de 480 muestras.

<i>Ticker</i>	\bar{H}_d	\bar{L}_d	\bar{C}_d	\bar{O}_d	$H_d > 0.6$	$L_d > 0.6$	$C_d > 0.6$	$O_d > 0.6$	$H_d >$	$L_d >$	$C_d >$	$O_d >$	$H_d >$ $C_d \& O_d$	$L_d >$ $C_d \& O_d$	$H_d \& L_d >$ $C_d \& O_d$
ABE	0.573	0.617	0.476	0.454	24.9	52.9	5.7	0	6.98	92.95	0.07	0	80.3	99.93	80.3
ACS	0.622	0.638	0.56	0.472	58.93	81.2	8.26	0	23.62	76.38	0	0	100	89.46	89.46
ACX	0.61	0.593	0.463	0.39	54.43	33.1	5.39	0	60.33	37.45	2.22	0	95.96	95.38	93.56
BBVA	0.667	0.705	0.584	0.478	97.14	99.93	32.93	0	31.04	68.96	0	0	81.13	100	81.13
BKT	0.613	0.603	0.537	0.417	56.69	59.05	17.22	0	45.03	44.19	10.79	0	86.52	79.71	77.01
CABK	0.488	0.587	0.527	0.431	18.26	37.11	0	0	14.16	84.77	1.07	0	18.26	98.93	18.26
ELE	0.578	0.645	0.569	0.459	38.55	77.4	18.11	0.37	19.33	78.99	1.69	0	53.9	95.08	50.66
ENG	0.616	0.616	0.524	0.407	52.28	61	0.8	0	49.53	50.42	0.04	0	88.32	99.96	88.32
FCC	0.64	0.64	0.483	0.403	66.01	72.25	8.97	0	49.83	50.17	0	0	99.6	100	99.6
FER	0.657	0.653	0.544	0.455	100	82.69	11.84	0	47.52	52.48	0	0	100	100	100
GAM	0.45	0.593	0.515	0.481	27.22	45.86	9.86	0.25	16.11	74.57	9.32	0	43.16	90.68	43.16
GAS	0.537	0.562	0.488	0.46	30.95	32.7	8.23	0	16.74	57.98	1.75	0.07	72.26	74.32	71.85
GRF	0.621	0.543	0.431	0.433	71.84	13.79	0	0	80.58	19.42	0	0	100	94.66	94.66
IBE	0.653	0.664	0.553	0.43	80.4	72.42	29.73	3.94	34.98	64.58	0.44	0	85.89	96.57	82.9
IDR	0.644	0.582	0.477	0.395	90.18	34.28	13.71	0	81.4	18.6	0	0	100	99.96	99.96
ITX	0.565	0.618	0.477	0.428	25.45	66.53	0	0	12.89	87.11	0	0	99.96	100	99.96
MAP	0.623	0.636	0.515	0.466	69.11	73.73	0.35	0	39.51	48.2	12.29	0	85.36	78.43	76.08
MTS	0.63	0.684	0.519	0.452	78.13	100	0.07	0	0.6	99.4	0	0	100	100	100
OHL	0.647	0.597	0.58	0.423	72.52	45.41	23.4	0	63.01	36.99	0	0	79.13	64.97	44.1
POP	0.622	0.598	0.55	0.477	58.13	47.17	32.05	0	57.81	9.3	32.89	0	65.5	60.2	58.58
REE	0.622	0.641	0.502	0.416	63.51	77.61	1.92	0	51.8	48.2	0	0	99.97	99.26	99.22
REP	0.662	0.674	0.579	0.455	90.8	93.16	42.14	0	37.9	56.41	5.7	0	94.03	90.09	89.82
SAB	0.618	0.601	0.542	0.477	73.27	53.94	22.84	5.88	53.7	37.63	8.67	0	80.63	86.38	75.68
SAN	0.658	0.684	0.516	0.43	93.53	96.7	20.29	0	37.24	62.76	0	0	93.43	100	93.43
SCYR	0.651	0.653	0.513	0.415	95.21	90.79	10.7	0.37	39.05	60.95	0	0	99.87	99.97	99.83
TEF	0.666	0.692	0.546	0.453	97.47	97.71	11.91	0	29.38	70.62	0	0	99.6	100	99.6
TL5	0.655	0.612	0.528	0.469	100	68.31	8.15	0.64	74.05	25.95	0	0	99.95	92.98	92.92
TRE	0.646	0.633	0.536	0.441	74.47	77.18	0	0	67.57	32.43	0	0	100	98.61	98.61

Tabla Anexo B.4-2: Resumen del análisis dinámico del exponente de Hurst para los componentes del IBEX explorados con ventanas de 960 muestras.

<i>Ticker</i>	\bar{H}_d	\bar{L}_d	\bar{C}_d	\bar{O}_d	$H_d > 0.6$	$L_d > 0.6$	$C_d > 0.6$	$O_d > 0.6$	$H_d >$	$L_d >$	$C_d >$	$O_d >$	$H_d >$ $C_d \& O_d$	$L_d >$ $C_d \& O_d$	$H_d \& L_d >$ $C_d \& O_d$
ABE	0.561	0.6	0.457	0.442	10.51	60.51	0	0	4.23	95.73	0.04	0	86.23	99.96	86.23
ACS	0.604	0.638	0.552	0.454	58.87	98.47	0.05	0	8.08	91.92	0	0	100	100	100
ACX	0.602	0.582	0.447	0.381	41.9	19.66	4.22	0	76.88	22.68	0.44	0	97.79	98.31	96.54
BBVA	0.666	0.702	0.585	0.474	100	99.96	45.24	0	24.69	75.31	0	0	94.57	100	94.57
BKT	0.61	0.617	0.528	0.413	54.44	69.52	3.62	0	21.35	71.33	7.32	0	89.75	81.91	78.97
CABK	0.506	0.59	0.518	0.429	0	45.59	0	0	0	100	0	0	24.45	100	24.45
ELE	0.564	0.643	0.576	0.464	24.47	74.93	19.15	0	14.37	85.63	0	0	33.8	100	33.8
ENG	0.604	0.628	0.525	0.407	57.27	74.15	0	0	19.16	80.84	0	0	100	100	100
FCC	0.636	0.648	0.477	0.396	88.62	85.88	1.77	0	30.09	69.91	0	0	100	100	100
FER	0.658	0.655	0.547	0.462	100	100	0.15	0	57.96	42.04	0	0	100	100	100
GAM	0.345	0.566	0.523	0.478	4.19	21.1	9.1	0	3.31	87.33	9.36	0	6.36	90.64	6.36
GAS	0.528	0.551	0.479	0.451	18.41	23.76	0	0	20.14	69.07	2.09	0.08	88.84	88.72	88.36
GRF	0.61	0.547	0.429	0.423	65.3	6.63	0	0	77.02	22.98	0	0	100	100	100
IBE	0.665	0.674	0.549	0.434	86.31	86.35	16.51	1.61	24.82	75.14	0.04	0	93.73	97.19	90.96
IDR	0.643	0.573	0.466	0.392	98.96	28.35	0.65	0	95.09	4.91	0	0	100	99.96	99.96
ITX	0.554	0.618	0.469	0.429	10.42	64.59	0	0	7.31	92.69	0	0	100	100	100
MAP	0.643	0.656	0.51	0.461	83.61	86.84	0	0	29.6	63.55	6.85	0	90.84	93.15	90.84
MTS	0.632	0.685	0.514	0.454	76.49	100	0	0	0	100	0	0	100	100	100
OHL	0.64	0.588	0.571	0.417	81.26	38.37	13.84	0	70.8	29.2	0	0	99.92	75.7	75.62
POP	0.584	0.572	0.549	0.485	39.21	16.38	19.97	0	35.2	6.37	58.42	0	39.34	41.49	39.26
REE	0.618	0.663	0.494	0.412	70.62	86.08	0	0	27.12	72.88	0	0	99.96	100	99.96
REP	0.656	0.673	0.567	0.451	94.85	98.47	15.12	0	27.47	72.53	0	0	100	100	100
SAB	0.609	0.597	0.527	0.475	73.09	56.16	12.77	2.55	47.96	41.86	10.18	0	89.82	85.87	85.87
SAN	0.657	0.691	0.511	0.42	97.19	98.63	4.42	0	22.64	77.36	0	0	100	100	100
SCYR	0.647	0.639	0.491	0.4	97.14	93.52	0.56	0	38.46	61.54	0	0	99.96	100	99.96
TEF	0.672	0.696	0.546	0.457	99.96	99.96	2.25	0	22.86	77.14	0	0	99.96	100	99.96
TL5	0.65	0.612	0.518	0.462	100	86.21	0	0	89.17	10.83	0	0	100	100	100
TRE	0.633	0.632	0.528	0.435	60.59	93.2	0	0	57.19	42.81	0	0	100	100	100

Tabla Anexo B.4-3: Resumen del análisis dinámico del exponente de Hurst para los componentes del IBEX explorados con ventanas de 1440 muestras.

Anexo C: Tablas de exploración dinámica para la autocorrelación ρ_1

Anexo C.1: Resumen de los resultados de estimación dinámica de la autocorrelación para los valores del índice CAC 40

Ticker	\bar{H}_d	\bar{L}_d	\bar{C}_d	\bar{O}_d	$H_d > 0.1$	$L_d > 0.1$	$C_d > 0.1$	$O_d > 0.1$	$H_d >$	$L_d >$	$C_d >$	$O_d >$	$H_d >$ $C_d \& O_d$	$L_d >$ $C_d \& O_d$	$H_d \& L_d >$ $C_d \& O_d$
AC	0.088	0.114	-0.014	-0.03	42.89	60.44	7.06	0.06	17.63	82.37	0	0	98.19	100	98.19
ACA	0.104	0.111	-0.008	-0.038	51.63	56.76	7.23	0	51.97	48.03	0	0	100	100	100
AI	0.06	0.064	-0.114	-0.116	12.21	27.8	0	0	50.78	49.22	0	0	100	100	100
AIR	0.134	0.117	-0.007	-0.044	78.68	67.74	1.11	0	62.3	37.7	0	0	100	99.77	99.77
ALO	0.111	0.144	-0.017	-0.043	71.38	77.85	0	0	33.16	66.84	0	0	96.77	100	96.77
ALU	0.125	0.11	0.021	-0.011	80.1	61.73	0	0	70.03	29.97	0	0	100	98.54	98.54
BN	0.062	0.063	-0.064	-0.115	9.3	2.64	0	0	50.85	48.52	0.63	0	98.11	99.34	98.08
BNP	0.096	0.107	-0.007	-0.051	50.99	60.3	7.38	0	42.69	57.25	0.06	0	92.47	99.94	92.47
CA	0.091	0.101	-0.027	-0.032	39.1	46.63	0	0	39.62	60.32	0.06	0	97.85	99.86	97.76
CAP	0.14	0.134	0.016	0.016	88.4	75.6	1.49	2.1	51.22	48.66	0	0.11	99.08	99.11	98.31
CS	0.115	0.114	0.011	-0.023	58.42	49.57	11.15	0	63.79	36.21	0	0	97.56	100	97.56
DG	0.094	0.122	-0.048	-0.059	52.53	60.49	0	0	23.45	76.55	0	0	100	100	100
EDF	0.161	0.16	0.048	-0.007	99.2	91.28	7.92	0	54.31	45.69	0	0	100	100	100
EI	0.034	0.049	-0.126	-0.143	21.82	20.56	0	0	41.14	58.86	0	0	100	100	100
EN	0.128	0.136	-0.02	-0.014	66.58	73.48	3.13	0	39.32	60.68	0	0	98.68	100	98.68
FP	0.082	0.098	-0.044	-0.056	38.27	44.07	0	0	36.2	63.8	0	0	99.57	100	99.57
FR	0.114	0.155	0.053	-0.025	68.4	87.2	20.44	5.08	6.65	93.35	0	0	99.85	100	99.85
GLE	0.107	0.115	0.035	-0.018	57.44	57.55	14.39	0	33.95	61.29	4.77	0	85.07	85.09	74.93
GSZ	0.117	0.114	-0.031	-0.058	74.14	62.53	0	0	57.09	42.91	0	0	100	100	100
KER	0.159	0.141	0.031	0.007	91.35	83.47	0.06	1.18	73.33	26.67	0	0	99.83	99.74	99.57
LG	0.11	0.118	-0.024	-0.036	56.55	62.74	0	0	40.51	59.49	0	0	100	100	100
LR	0.077	0.093	-0.047	-0.101	44.71	50.29	0	0	38.34	61.66	0	0	100	100	100
MC	0.101	0.099	-0.022	-0.03	51.03	49.25	0	0	50.69	49.31	0	0	100	100	100
ML	0.12	0.098	-0.009	-0.035	71.89	53.89	0	0	58.86	40.65	0.49	0	99.22	94.23	93.94
MT	0.147	0.113	0.012	-0.015	89.01	48.57	16.32	0	80.25	19.75	0	0	100	100	100
OR	0.061	0.05	-0.106	-0.125	12.01	3.33	0	0	58.72	41.28	0	0	100	100	100
ORA	0.118	0.122	0.007	-0.047	62.14	64.82	0	0	44.7	55.3	0	0	100	100	100
PUB	0.108	0.094	-0.011	-0.034	57.74	48.76	0	0	62.58	37.42	0	0	97.91	95.77	93.68
RI	0.069	0.072	-0.101	-0.097	32.24	26.39	0	0	53.98	46.02	0	0	100	100	100
RNO	0.127	0.143	0.044	-0.023	68.34	83.12	18.4	0	35.48	64.52	0	0	100	98.88	98.88
SAF	0.089	0.106	-0.026	-0.043	46.22	50.9	0	2.76	37.49	62.51	0	0	99.2	99.08	98.28
SAN	0.085	0.074	-0.062	-0.101	26.5	38.53	0	0	43.93	56.07	0	0	100	100	100
SGO	0.099	0.109	-0.04	-0.059	53.86	63.42	0	0	34.8	65.2	0	0	100	100	100
SU	0.086	0.097	-0.048	-0.071	31.66	43.67	0	0	40.07	59.93	0	0	99.08	100	99.08
TEC	0.094	0.095	-0.034	-0.04	49.12	53.95	0	0	41.86	58.14	0	0	100	100	100
UG	0.139	0.139	0.025	-0.033	78.55	83.55	6.57	4.11	47.37	52.63	0	0	100	100	100
UL	0.059	0.079	-0.038	-0.1	30.78	50.28	1.43	0	32.1	67.9	0	0	99.03	99.48	98.5
VIE	0.159	0.129	0.031	-0.029	80.32	73.84	8.93	0	66.26	33.74	0	0	99.97	99.97	99.94
VIV	0.075	0.088	-0.035	-0.076	39.1	44.84	0	0	32.46	67.54	0	0	99.25	100	99.25

Tabla Anexo C.1-1: Resumen del análisis dinámico de autocorrelación para los componentes del CAC40 explorados con ventanas de 480 muestras.

Ticker	\bar{H}_d	\bar{L}_d	\bar{C}_d	\bar{O}_d	$H_d > 0.1$	$L_d > 0.1$	$C_d > 0.1$	$O_d > 0.1$	$H_d >$	$L_d >$	$C_d >$	$O_d >$	$H_d >$ $C_d \& O_d$	$L_d >$ $C_d \& O_d$	$H_d \& L_d >$ $C_d \& O_d$
AC	0.096	0.125	-0.009	-0.028	39.99	63.34	0	0	13.09	86.91	0	0	100	100	100
ACA	0.11	0.118	0.001	-0.036	67.68	51.07	0	0	48.81	51.19	0	0	100	100	100
AI	0.061	0.066	-0.113	-0.119	0	6.63	0	0	41.37	58.63	0	0	100	100	100
AIR	0.131	0.12	-0.014	-0.047	100	80.25	0	0	58.1	41.9	0	0	100	100	100
ALO	0.124	0.154	-0.009	-0.042	93.53	100	0	0	37	63	0	0	100	100	100
ALU	0.127	0.109	0.021	-0.015	96.84	48.88	0	0	64.8	35.2	0	0	100	100	100
BN	0.065	0.064	-0.059	-0.113	2.5	0	0	0	52.71	47.29	0	0	100	100	100
BNP	0.098	0.111	0.001	-0.049	52.48	72.28	0	0	20.39	79.61	0	0	100	100	100
CA	0.093	0.102	-0.022	-0.034	49.65	46.12	0	0	32.33	67.67	0	0	100	100	100
CAP	0.144	0.131	0.018	0.012	100	88.74	0	0.17	67.47	32.53	0	0	100	100	100
CS	0.115	0.118	0.017	-0.019	60.67	66.47	0	0	46.6	53.4	0	0	100	100	100
DG	0.104	0.131	-0.042	-0.051	65.6	86.37	0	0	17	83	0	0	100	100	100
EDF	0.165	0.156	0.055	-0.008	100	100	0	0	62.01	37.99	0	0	100	100	100
EI	0.037	0.056	-0.126	-0.151	17.08	25.97	0	0	21.51	78.49	0	0	100	100	100
EN	0.134	0.138	-0.028	-0.013	75.68	80.45	0	0	45.61	54.39	0	0	100	100	100
FP	0.082	0.104	-0.037	-0.049	24.01	56.58	0	0	20.21	79.79	0	0	100	100	100
FR	0.116	0.156	0.058	-0.027	63.64	99.25	29.71	0.23	0	100	0	0	100	100	100

GLE	0.111	0.113	0.044	-0.02	72.85	54.86	13.32	0	59.76	39.34	0.9	0	99.07	86.94	86.91
GSZ	0.127	0.123	-0.026	-0.059	86.52	74.54	0	0	58.26	41.74	0	0	100	100	100
KER	0.156	0.14	0.035	0.009	96.63	88.2	0	0	77.63	22.37	0	0	100	100	100
LG	0.117	0.125	-0.014	-0.032	64.12	75.88	0	0	54.23	45.77	0	0	100	100	100
LR	0.083	0.097	-0.046	-0.096	46.72	55.04	0	0	36.58	63.42	0	0	100	100	100
MC	0.101	0.102	-0.02	-0.028	55.66	58.09	0	0	45.44	54.56	0	0	100	100	100
ML	0.129	0.108	-0.005	-0.033	83.12	69.73	0	0	68	32	0	0	100	100	100
MT	0.143	0.105	0.009	-0.012	99.23	50.26	0	0	100	0	0	0	100	100	100
OR	0.063	0.053	-0.102	-0.123	4.4	0.13	0	0	62.28	37.72	0	0	100	100	100
ORA	0.117	0.12	0.005	-0.053	63.05	67.06	0	0	37.35	62.65	0	0	100	100	100
PUB	0.112	0.096	-0.009	-0.032	66.41	54.77	0	0	57	43	0	0	100	100	100
RI	0.074	0.077	-0.094	-0.097	33.53	32.9	0	0	52.08	47.92	0	0	100	100	100
RNO	0.127	0.145	0.043	-0.023	75.9	95.21	9.32	0	27.36	72.64	0	0	100	100	100
SAF	0.084	0.109	-0.036	-0.051	34.56	53.98	0	0	17.73	82.27	0	0	100	100	100
SAN	0.085	0.08	-0.056	-0.101	27.67	28.17	0	0	50.68	49.32	0	0	100	100	100
SGO	0.105	0.117	-0.038	-0.053	61.17	59.54	0	0	41.49	58.51	0	0	100	100	100
SU	0.086	0.099	-0.047	-0.067	27.29	55.41	0	0	20.73	79.27	0	0	100	100	100
TEC	0.091	0.096	-0.032	-0.047	50.88	46.42	0	0	42.25	57.75	0	0	100	100	100
UG	0.146	0.143	0.03	-0.037	92.04	88.91	0.07	0	61.01	38.99	0	0	100	100	100
UL	0.058	0.086	-0.033	-0.087	30.18	52.47	0	0	14.13	85.87	0	0	100	100	100
VIE	0.172	0.136	0.034	-0.025	97.94	89.4	1.95	0	73.82	26.18	0	0	100	100	100
VIV	0.075	0.085	-0.034	-0.078	27.09	47.25	0	0	25.69	74.31	0	0	100	100	100

Tabla Anexo C.1-2: Resumen del análisis dinámico de autocorrelación para los componentes del CAC40 explorados con ventanas de 960 muestras.

Ticker	\bar{H}_d	\bar{L}_d	\bar{C}_d	\bar{O}_d	$H_d > 0.1$	$L_d > 0.1$	$C_d > 0.1$	$O_d > 0.1$	$H_d >$	$L_d >$	$C_d >$	$O_d >$	$H_d >$ $C_d \& O_d$	$L_d >$ $C_d \& O_d$	$H_d \& L_d >$ $C_d \& O_d$
AC	0.1	0.13	0	-0.025	60.6	73.33	0	0	6.58	93.42	0	0	100	100	100
ACA	0.116	0.113	0.005	-0.031	77.72	61.21	0	0	53.38	46.62	0	0	100	100	100
AI	0.063	0.068	-0.111	-0.121	0	1.23	0	0	44.69	55.31	0	0	100	100	100
AIR	0.129	0.123	-0.017	-0.048	97.77	92.66	0	0	55.87	44.13	0	0	100	100	100
ALO	0.123	0.147	-0.007	-0.044	86.87	100	0	0	18.53	81.47	0	0	100	100	100
ALU	0.129	0.105	0.02	-0.015	100	42.57	0	0	75.78	24.22	0	0	100	100	100
BN	0.065	0.064	-0.056	-0.112	0	0	0	0	54.46	45.54	0	0	100	100	100
BNP	0.098	0.11	0	-0.049	55.18	73.82	0	0	12.3	87.7	0	0	100	100	100
CA	0.095	0.101	-0.017	-0.034	48.51	46.21	0	0	41.97	58.03	0	0	100	100	100
CAP	0.146	0.127	0.019	0.008	100	92.51	0	0	82.44	17.56	0	0	100	100	100
CS	0.109	0.113	0.015	-0.017	55.75	68.06	0	0	39.25	60.75	0	0	100	100	100
DG	0.111	0.134	-0.042	-0.044	71.67	96.51	0	0	0.48	99.52	0	0	100	100	100
EDF	0.165	0.152	0.058	-0.012	100	100	0	0	75.19	24.81	0	0	100	100	100
EI	0.042	0.063	-0.121	-0.153	16.21	13.24	0	0	22.2	77.8	0	0	100	100	100
EN	0.135	0.138	-0.038	-0.012	100	90.43	0	0	41.99	58.01	0	0	100	100	100
FP	0.081	0.104	-0.034	-0.042	15.18	59.41	0	0	4.16	95.84	0	0	100	100	100
FR	0.113	0.153	0.058	-0.026	78.21	100	3.98	0	0	100	0	0	100	100	100
GLE	0.112	0.104	0.051	-0.018	90.52	59.52	5.27	0	68.12	31.88	0	0	100	99.52	99.52
GSZ	0.13	0.125	-0.025	-0.06	89.71	78.27	0	0	57.41	42.59	0	0	100	100	100
KER	0.154	0.14	0.036	0.012	100	94.48	0	0	79.44	20.56	0	0	100	100	100
LG	0.127	0.129	-0.008	-0.025	95.86	79.98	0	0	51.25	48.75	0	0	100	100	100
LR	0.085	0.098	-0.045	-0.095	41.43	36.53	0	0	26.09	73.91	0	0	100	100	100
MC	0.099	0.099	-0.023	-0.027	45.44	52.26	0	0	48.14	51.86	0	0	100	100	100
ML	0.134	0.117	0.001	-0.029	96.47	72.69	0	0	74.79	25.21	0	0	100	100	100
MT	0.146	0.12	0.013	-0.022	100	100	0	0	100	0	0	0	100	100	100
OR	0.065	0.052	-0.101	-0.121	0	0	0	0	76.44	23.56	0	0	100	100	100
ORA	0.112	0.116	0.002	-0.06	48.31	77.21	0	0	43.19	56.81	0	0	100	100	100
PUB	0.112	0.098	-0.007	-0.029	75.68	51.32	0	0	64.91	35.09	0	0	100	100	100
RI	0.079	0.079	-0.088	-0.092	39.99	26.95	0	0	53.11	46.89	0	0	100	100	100
RNO	0.121	0.146	0.042	-0.022	80.82	100	1.7	0	7.45	92.55	0	0	100	100	100
SAF	0.079	0.111	-0.047	-0.059	21.02	57.24	0	0	5.99	94.01	0	0	100	100	100
SAN	0.082	0.084	-0.055	-0.102	26.2	25.68	0	0	55.29	44.71	0	0	100	100	100
SGO	0.106	0.117	-0.04	-0.047	65.32	58.5	0	0	43.08	56.92	0	0	100	100	100
SU	0.085	0.1	-0.049	-0.062	14.32	52.72	0	0	8.33	91.67	0	0	100	100	100
TEC	0.084	0.092	-0.031	-0.048	32.41	38.24	0	0	29	71	0	0	100	100	100
UG	0.149	0.144	0.033	-0.037	93.98	93.34	0.2	0	72.26	27.74	0	0	100	100	100
UL	0.055	0.094	-0.025	-0.07	25.37	50.68	0	0	9.94	90.06	0	0	100	100	100
VIE	0.179	0.135	0.036	-0.024	100	93.14	0	0	84.6	15.4	0	0	100	100	100
VIV	0.073	0.081	-0.035	-0.08	20.47	34.75	0	0	28.52	71.48	0	0	100	100	100

Tabla Anexo C.1-3: Resumen del análisis dinámico de autocorrelación para los componentes del CAC40, explorados con ventanas de 1440 muestras.

Anexo C.2: Resumen de los resultados de estimación dinámica de la autocorrelación para los valores del índice DAX

<i>Ticker</i>	\bar{H}_d	\bar{L}_d	\bar{C}_d	\bar{O}_d	$H_d > 0.1$	$L_d > 0.1$	$C_d > 0.1$	$O_d > 0.1$	$H_d >$	$L_d >$	$C_d >$	$O_d >$	$H_d >$ $C_d \& O_d$	$L_d >$ $C_d \& O_d$	$H_d \& L_d >$ $C_d \& O_d$
ADS	0.132	0.107	0.01	-0.049	81.42	63.22	4.75	0	74.99	25.01	0	0	100	99.97	99.97
ALV	0.11	0.1	0.02	-0.035	54.88	39.24	0.44	0	57.85	42.15	0	0	94.47	99.24	93.71
BAS	0.096	0.096	-0.043	-0.055	47.82	46.48	0	0	54.1	45.9	0	0	93.07	100	93.07
BAYN	0.117	0.104	-0.046	-0.058	59.3	48.61	0	0	50.06	49.94	0	0	100	100	100
BEI	0.026	0.043	-0.064	-0.109	8.44	16.45	0	0	31.56	68.44	0	0	97.44	100	97.44
BMW	0.11	0.095	0.014	-0.03	55.04	43.65	0	3.26	66.17	31.35	0.29	2.19	97.47	92.89	92.83
CBK	0.148	0.125	0.044	-0.012	99.04	74.76	7.17	1.25	74.73	25.27	0	0	97.29	99.97	97.26
DAI	0.113	0.093	0.019	-0.024	64.56	37.54	13.23	0.73	69.95	26.7	3.35	0	91.17	94.64	89.16
DB1	0.081	0.1	0.004	-0.018	22.61	56.61	0.41	0	33.59	66.41	0	0	100	97.89	97.89
DBK	0.097	0.086	0.015	-0.039	44.3	50.34	2.22	0	59	37.82	3.18	0	86.03	90.9	80.11
DPW	0.114	0.107	-0.014	-0.042	59.8	45.14	2.8	0	62.53	37.47	0	0	96.77	100	96.77
DTE	0.119	0.102	-0.023	-0.054	65.58	58.53	0	0	66.92	32.26	0.82	0	98.25	98.48	97.55
EOAN	0.112	0.119	-0.025	-0.053	57.67	68.79	3.6	0	46.4	53.6	0	0	99.83	100	99.83
FME	0.083	0.057	-0.071	-0.12	26.69	12.34	0	0	75.99	24.01	0	0	100	100	100
FRE	0.076	0.051	-0.037	-0.094	27.42	13.68	0	5.6	76.34	23.66	0	0	100	94.22	94.22
HEI	0.09	0.081	-0.018	-0.03	56.07	44.98	0	0	56.04	43.96	0	0	97.18	100	97.18
HEN3	0.087	0.099	-0.007	-0.049	32.94	43.61	0	0	35.44	64.56	0	0	94.07	99.85	93.93
IFX	0.124	0.102	0.03	-0.012	60.05	49.57	0	0.03	62.65	37.35	0	0	91.62	96.36	87.98
LHA	0.112	0.105	0.011	-0.019	63.41	51.81	4.2	0	59.56	40.44	0	0	98.78	99.04	97.81
LIN	0.085	0.09	-0.057	-0.094	36.81	48.49	0	0	54.48	45.52	0	0	100	100	100
LXS	0.116	0.098	-0.001	-0.009	63.55	48.73	0	0	60.67	37.03	2.3	0	95.08	86.75	84.13
MRK	0.077	0.06	-0.049	-0.066	32.8	22.87	0	0	63.15	36.85	0	0	100	97.12	97.12
MUV2	0.105	0.114	0.001	-0.047	51.25	61.74	3.49	0	55.88	44.12	0	0	98.86	96.21	95.08
RWE	0.156	0.136	0.016	-0.022	98.91	81.62	2.64	0	63.84	36.16	0	0	100	100	100
SAP	0.089	0.063	0.002	-0.056	48.85	19.59	3.5	0	77.76	22.01	0.23	0	98.81	95.51	94.55
SDF	0.092	0.086	-0.002	-0.013	43.73	27.2	15.3	0	56.88	43.12	0	0	93.92	99.48	93.4
SIE	0.109	0.098	-0.006	-0.028	56.69	55.56	1.43	0	55.73	44.27	0	0	100	99.94	99.94
TKA	0.121	0.113	0.012	-0.012	69.25	61.5	0.32	0.06	55.04	44.73	0	0.23	95.52	95.31	91.06
VOW3	0.152	0.128	0.06	0.022	95.29	76.18	14.72	1.41	81.14	18.86	0	0	100	88.75	88.75

Tabla Anexo C.2-1: Resumen del análisis dinámico de autocorrelación para los componentes del DAX explorados con ventanas de 480 muestras.

<i>Ticker</i>	\bar{H}_d	\bar{L}_d	\bar{C}_d	\bar{O}_d	$H_d > 0.1$	$L_d > 0.1$	$C_d > 0.1$	$O_d > 0.1$	$H_d >$	$L_d >$	$C_d >$	$O_d >$	$H_d >$ $C_d \& O_d$	$L_d >$ $C_d \& O_d$	$H_d \& L_d >$ $C_d \& O_d$
ADS	0.129	0.106	0.006	-0.051	88.42	62.29	0	0	86.73	13.27	0	0	100	100	100
ALV	0.11	0.104	0.022	-0.031	49.41	46.29	0	0	62.13	37.87	0	0	100	100	100
BAS	0.095	0.095	-0.042	-0.058	47.23	54.33	0	0	46.04	53.96	0	0	100	100	100
BAYN	0.116	0.103	-0.047	-0.059	59.12	58.71	0	0	54.4	45.6	0	0	100	100	100
BEI	0.026	0.043	-0.066	-0.112	1.22	13.47	0	0	24.09	75.91	0	0	100	100	100
BMW	0.115	0.102	0.016	-0.033	58.94	56.1	0	0	67.82	32.18	0	0	100	100	100
CBK	0.153	0.126	0.044	-0.016	100	88.41	1.25	0	85.36	14.64	0	0	100	100	100
DAI	0.114	0.097	0.023	-0.023	67.81	44.9	0	0	72.62	27.38	0	0	100	100	100
DB1	0.081	0.112	0.001	-0.014	12	71.39	0	0	7.47	92.53	0	0	100	100	100
DBK	0.093	0.086	0.019	-0.043	36.49	34.76	0	0	52.73	47.27	0	0	98.2	100	98.2
DPW	0.126	0.118	0.001	-0.031	75.03	64.7	0.62	0	63.42	36.58	0	0	100	100	100
DTE	0.121	0.104	-0.021	-0.055	76.35	67.1	0	0	73.23	26.77	0	0	100	100	100
EOAN	0.11	0.125	-0.017	-0.053	63.66	67.88	0	0	36.17	63.83	0	0	100	100	100
FME	0.079	0.054	-0.075	-0.128	21.99	0	0	0	84.03	15.97	0	0	100	100	100
FRE	0.08	0.051	-0.035	-0.101	31.41	0.71	0	0	83.48	16.52	0	0	100	100	100
HEI	0.084	0.076	-0.022	-0.039	49.81	49.24	0	0	60.1	39.9	0	0	100	100	100
HEN3	0.082	0.099	0.002	-0.048	15.87	35.05	0	0	28.12	71.88	0	0	100	100	100
IFX	0.134	0.106	0.032	-0.012	72.27	66.16	0	0	84.34	15.66	0	0	100	99.34	99.34
LHA	0.118	0.108	0.013	-0.021	76.51	66.54	0	0	66.14	33.86	0	0	100	100	100
LIN	0.089	0.093	-0.058	-0.099	40.25	42.82	0	0	54.81	45.19	0	0	100	100	100
LXS	0.118	0.104	-0.002	-0.007	73.87	54.18	0	0	62	38	0	0	100	100	100
MRK	0.082	0.064	-0.043	-0.067	31.09	19.64	0	0	64.58	35.42	0	0	100	100	100
MUV2	0.104	0.12	0.002	-0.045	57.62	78.54	0	0	41.2	58.8	0	0	100	100	100
RWE	0.16	0.146	0.028	-0.018	100	92	0	0	75.37	24.63	0	0	100	100	100
SAP	0.086	0.063	0.006	-0.062	41.55	11.72	1.8	0	90.58	9.42	0	0	100	98.64	98.64
SDF	0.095	0.095	0.003	-0.009	48.9	36.08	13.09	0	51.98	48.02	0	0	100	100	100
SIE	0.108	0.101	-0.006	-0.031	69.24	54.53	0	0	57.71	42.29	0	0	100	100	100
TKA	0.126	0.121	0.011	-0.009	89.84	69.97	0	0	50.37	49.63	0	0	100	100	100
VOW3	0.153	0.133	0.049	0.013	100	100	0	0	100	0	0	0	100	100	100

Tabla Anexo C.2-2: Resumen del análisis dinámico de autocorrelación para los componentes del DAX explorados con ventanas de 960 muestras.

<i>Ticker</i>	\bar{H}_d	\bar{L}_d	\bar{C}_d	\bar{O}_d	$H_d > 0.1$	$L_d > 0.1$	$C_d > 0.1$	$O_d > 0.1$	$H_d >$	$L_d >$	$C_d >$	$O_d >$	$H_d >$ $C_d \& O_d$	$L_d >$ $C_d \& O_d$	$H_d \& L_d >$ $C_d \& O_d$
ADS	0.128	0.108	0.008	-0.042	99.47	65.12	0	0	90.18	9.82	0	0	100	100	100
ALV	0.109	0.102	0.02	-0.033	64.69	52.73	0	0	59.07	40.93	0	0	100	100	100
BAS	0.095	0.096	-0.041	-0.056	41.24	43.9	0	0	47.17	52.83	0	0	100	100	100
BAYN	0.114	0.102	-0.044	-0.06	61.75	50.54	0	0	60.63	39.37	0	0	100	100	100
BEI	0.023	0.04	-0.067	-0.114	0	2.91	0	0	19.35	80.65	0	0	100	100	100
BMW	0.117	0.106	0.017	-0.032	63.51	59.47	0	0	78.11	21.89	0	0	100	100	100
CBK	0.154	0.12	0.038	-0.015	100	98.18	0	0	95.87	4.13	0	0	100	100	100
DAI	0.114	0.096	0.02	-0.02	72.4	44.8	0	0	98.62	1.38	0	0	100	100	100
DB1	0.079	0.115	-0.008	-0.009	0	80.42	0	0	5.16	94.84	0	0	100	100	100
DBK	0.089	0.081	0.022	-0.046	30.58	11.5	0	0	64.84	35.16	0	0	100	100	100
DPW	0.137	0.124	0.011	-0.021	87.12	74.32	0	0	64.23	35.77	0	0	100	100	100
DTE	0.127	0.105	-0.019	-0.056	99.51	67.87	0	0	83.69	16.31	0	0	100	100	100
EOAN	0.111	0.129	-0.007	-0.048	74.11	74.44	0	0	23.39	76.61	0	0	100	100	100
FME	0.075	0.055	-0.081	-0.132	18.58	0	0	0	88.53	11.47	0	0	100	100	100
FRE	0.085	0.056	-0.033	-0.1	15.15	0	0	0	95.34	4.66	0	0	100	100	100
HEI	0.072	0.064	-0.031	-0.049	32.77	18.95	0	0	83.19	16.81	0	0	100	100	100
HEN3	0.085	0.098	0.004	-0.045	11.27	35.8	0	0	33.92	66.08	0	0	100	100	100
IFX	0.135	0.105	0.03	-0.011	77.06	64.99	0	0	94.54	5.46	0	0	100	100	100
LHA	0.122	0.108	0.012	-0.023	84.94	63.6	0	0	65.06	34.94	0	0	100	100	100
LIN	0.089	0.093	-0.057	-0.099	25.79	34.84	0	0	45.76	54.24	0	0	100	100	100
LXS	0.115	0.104	0.002	-0.003	75.27	50.14	0	0	51.92	48.08	0	0	100	100	100
MRK	0.081	0.065	-0.04	-0.07	29.48	14.15	0	0	90.09	9.91	0	0	100	100	100
MUV2	0.103	0.119	-0.001	-0.045	54.85	85.57	0	0	40.66	59.34	0	0	100	100	100
RWE	0.162	0.15	0.035	-0.013	100	99.29	0	0	89.89	10.11	0	0	100	100	100
SAP	0.083	0.062	0.005	-0.065	28.13	5.06	0	0	93.44	6.56	0	0	100	100	100
SDF	0.093	0.098	0.001	-0.004	52.64	48.2	0.32	0	47.56	52.44	0	0	100	100	100
SIE	0.108	0.102	-0.01	-0.029	66.87	57.35	0	0	62.94	37.06	0	0	100	100	100
TKA	0.123	0.123	0.007	-0.007	96.4	74.94	0	0	47.21	52.79	0	0	100	100	100
VOW3	0.152	0.127	0.06	0.021	100	100	0	0	100	0	0	0	100	100	100

Tabla Anexo C.2-3: Resumen del análisis dinámico de autocorrelación para los componentes del DAX, explorados con ventanas de 1440 muestras.

Anexo C.3: Resumen de los resultados de estimación dinámica de la autocorrelación para los valores del DJI (Dow Jones Industrial Average)

<i>Ticker</i>	\bar{H}_d	\bar{L}_d	\bar{C}_d	\bar{O}_d	$H_d > 0.1$	$L_d > 0.1$	$C_d > 0.1$	$O_d > 0.1$	$H_d >$	$L_d >$	$C_d >$	$O_d >$	$H_d >$ $C_d \& O_d$	$L_d >$ $C_d \& O_d$	$H_d \& L_d >$ $C_d \& O_d$
AXP	0.099	0.095	-0.038	-0.03	48.6	47.09	0	7.82	50.03	44.8	0	5.17	91.74	94.78	91.69
BA	0.119	0.11	0.022	0.069	68	59.61	11.97	37.97	48.92	37.32	0	13.76	78.94	67.56	60.26
CAT	0.141	0.141	0.062	0.102	84.57	82.41	28.21	46.59	36.01	42.87	0.02	21.09	71.05	69.55	61.72
CSCO	0.1	0.11	-0.018	-0.037	52.74	66.1	0.19	2.49	42.7	56.12	1.18	0	93.16	98.37	92.72
CVX	0.114	0.104	-0.004	-0.004	60.78	50.34	4.74	9.26	55.48	39.51	1.24	3.77	94.92	88.34	88.27
DD	0.09	0.101	-0.006	0.027	43.43	57.48	5.75	19.14	34.18	62.01	0	3.81	83.73	90.66	78.2
DIS	0.107	0.118	0.012	0.062	60.59	67.2	13.69	36.88	31.2	48.81	0	19.99	61.04	70.29	51.32
GE	0.075	0.077	-0.028	-0.051	34.81	39.07	0.7	0	46.25	46.18	0	7.57	91.51	91.61	90.68
GS	0.09	0.128	-0.041	-0.055	37.09	72.15	0	0	9.32	90.68	0	0	100	100	100
HD	0.097	0.097	0.009	-0.013	62.39	60.37	5.05	1.23	39.86	55.5	1.52	3.11	90.4	85.21	80.24
IBM	0.126	0.112	-0.022	-0.041	74.1	63.3	0	3.55	61.85	35.8	0	2.35	96.93	97.57	96.86
INTC	0.118	0.106	-0.002	-0.017	71.55	67.54	5.07	0.23	63.8	31.84	0.17	3.76	94.3	89.38	88.04
JNJ	0.095	0.09	-0.004	-0.055	40.96	40.15	2.74	4.74	45.85	46.32	0	7.82	90.48	92.09	90.39
JPM	0.119	0.117	0.004	-0.015	59.73	70.62	13.18	0	42.67	57.07	0.26	0	99.02	93.38	92.66
KO	0.085	0.087	-0.027	-0.001	47.14	45.62	0	6.1	45.06	50.5	0.33	4.11	87.71	94.44	86.6
MCD	0.095	0.078	-0.005	-0.033	49.9	37.31	3.11	7.61	64.51	29.92	0.16	5.41	92.12	89.24	86.92
MMM	0.081	0.094	-0.022	-0.035	33.32	43.96	0.02	7.58	41.63	55.17	0	3.2	94.08	96.66	93.95
MRK	0.112	0.103	0.01	-0.008	63.68	59.92	2.09	3.21	54.23	37.94	0.01	7.81	88.04	87.28	83.14
MSFT	0.097	0.092	-0.04	-0.046	50.93	57.86	0	0.39	55.39	42.6	0.94	1.06	97.2	96.29	95.49
NKE	0.085	0.081	0.008	0.014	40.66	36.96	9.75	14.35	48.51	43.29	0	8.2	87.11	81.1	76.41
PFE	0.095	0.08	-0.015	-0.041	44.67	42.12	2.11	1.3	57.25	34.73	1.08	6.94	91.69	90.98	90.68
PG	0.093	0.084	-0.023	-0.042	44.47	39.36	3.29	0.86	57.56	38.8	0	3.64	95.21	92.86	91.7
T	0.12	0.119	0.001	-0.013	69.73	65.94	8.29	4.84	57.26	42.74	0	0	99.3	100	99.3
TRV	0.113	0.109	-0.019	-0.035	58.74	51.99	6.7	2.2	56.09	43.91	0	0	100	99.56	99.56
UNH	0.129	0.092	0.02	-0.01	78.67	40.17	7.69	6.01	75.77	23.91	0.32	0	99.66	90.16	90.14
UTX	0.09	0.092	0.005	-0.002	45.61	42.16	11.28	7	49.71	44.77	2.33	3.19	83.82	90.36	79.69
V	0.051	0.071	-0.092	-0.057	14.4	10.49	0	0	43.47	56.53	0	0	100	100	100
VZ	0.126	0.111	-0.02	-0.017	65.47	59.17	0.01	0	56.34	42.7	0	0.96	97.67	97.91	96.54
WMT	0.077	0.085	-0.016	-0.035	38.77	35.59	6.64	1.43	45.74	51.95	0.76	1.54	89.42	92.42	84.15
XOM	0.069	0.063	-0.069	-0.066	24.25	27.97	0	0	57.69	41.55	0	0.76	98.96	97.5	97.22

Tabla Anexo C.3-1: Resumen del análisis dinámico de autocorrelación para los componentes del Dow Jones Industrial Average, explorados con ventanas de 480 muestras.

Ticker	\bar{H}_d	\bar{L}_d	\bar{C}_d	\bar{O}_d	$H_d > 0.1$	$L_d > 0.1$	$C_d > 0.1$	$O_d > 0.1$	$H_d >$	$L_d >$	$C_d >$	$O_d >$	$H_d >$ $C_d \& O_d$	$L_d >$ $C_d \& O_d$	$H_d \& L_d >$ $C_d \& O_d$
AXP	0.101	0.096	-0.038	-0.036	51.36	47.07	0	2.63	54.95	43.01	0	2.04	97.26	97.96	97.26
BA	0.121	0.115	0.026	0.074	72.24	70.57	9.27	46.69	39.57	48.91	0	11.53	80.98	64.77	57.28
CAT	0.142	0.142	0.06	0.103	92.57	88.09	24.5	48.11	34.33	44.76	0	20.92	74.07	72.27	67.26
CSCO	0.109	0.117	-0.02	-0.04	49.59	77.52	0	0.23	30.67	68.13	1.2	0	98.38	98.8	98.38
CVX	0.111	0.104	-0.005	-0.006	65.95	58.32	1.71	6.53	60.9	39.1	0	0	100	93.91	93.91
DD	0.088	0.101	-0.004	0.033	38.27	62	4.16	13.55	29.92	68.97	0	1.11	86.39	96.52	84.02
DIS	0.11	0.118	0.011	0.061	70.23	73.63	6.07	32.92	37.34	48.49	0	14.17	64.84	75.4	54.4
GE	0.082	0.086	-0.023	-0.047	32.78	43.41	0	0	49.47	47.89	0	2.64	97.36	96.63	96.63
GS	0.101	0.136	-0.038	-0.053	51.44	84.15	0	0	0.14	99.86	0	0	100	100	100
HD	0.101	0.102	0.01	-0.014	66.71	58.49	0	0	41.11	57.81	1.08	0	96.23	92.24	89.55
IBM	0.127	0.111	-0.023	-0.045	77.24	69.91	0	0	78.26	21.74	0	0	100	100	100
INTC	0.124	0.113	-0.003	-0.016	76.73	65.62	0.38	0	64.95	35.05	0	0	98.35	100	98.35
JNJ	0.096	0.093	-0.002	-0.06	40.34	46.29	0.05	0.77	51.4	45.31	0	3.28	96.63	96.7	96.61
JPM	0.121	0.121	0.004	-0.015	61.39	75.71	2.62	0	34.96	65.04	0	0	100	100	100
KO	0.091	0.093	-0.023	0.006	45.99	43.65	0	5.4	48.02	50.27	0	1.71	92.79	98.29	92.79
MCD	0.096	0.078	-0.005	-0.035	49.83	31.49	0.54	4.46	79.64	20.2	0	0.17	99.83	94.45	94.45
MMM	0.082	0.094	-0.024	-0.037	36.62	39.66	0	2.94	41.33	58.67	0	0	99.87	100	99.87
MRK	0.12	0.107	0.015	-0.006	69.35	61.27	0	0	60.45	36.09	0	3.46	91.11	96.54	91.11
MSFT	0.106	0.1	-0.039	-0.043	57.87	63.1	0	0	57.44	42.56	0	0	100	99.73	99.73
NKE	0.089	0.083	0.011	0.013	31.7	31.88	4.25	5.97	49.79	45.94	0	4.28	92.64	87.35	84.27
PFE	0.104	0.088	-0.012	-0.039	47.96	48.75	0	0	67.84	28.14	0	4.02	95.98	95.75	95.75
PG	0.096	0.087	-0.023	-0.045	50.41	43.46	0.12	0	66.87	33.13	0	0	100	99.99	99.99
T	0.118	0.114	-0.007	-0.017	80.57	58.86	1.36	0.54	62.25	37.75	0	0	100	100	100
TRV	0.115	0.108	-0.018	-0.037	53.57	57.28	4.69	0	63.54	36.46	0	0	100	100	100
UNH	0.13	0.091	0.021	-0.009	91.06	28.58	0	0	84.13	15.87	0	0	100	99.92	99.92
UTX	0.09	0.09	0.001	-0.007	38.21	35.23	0.5	2.67	53.43	46.57	0	0	88.02	100	88.02
V	0.05	0.071	-0.096	-0.061	0	3.72	0	0	25.43	74.57	0	0	100	100	100
VZ	0.129	0.112	-0.026	-0.019	75.35	57.99	0	0	66.34	33.66	0	0	100	100	100
WMT	0.088	0.092	-0.01	-0.029	34.21	41.32	1.76	0	50.89	49.11	0	0	92.63	99.33	91.96
XOM	0.07	0.063	-0.071	-0.068	23.58	14.52	0	0	69.84	30.16	0	0	100	100	100

Tabla Anexo C.3-2: Resumen del análisis dinámico de autocorrelación para los componentes del Dow Jones Industrial Average, explorados con ventanas de 960 muestras.

Ticker	\bar{H}_d	\bar{L}_d	\bar{C}_d	\bar{O}_d	$H_d > 0.1$	$L_d > 0.1$	$C_d > 0.1$	$O_d > 0.1$	$H_d >$	$L_d >$	$C_d >$	$O_d >$	$H_d >$ $C_d \& O_d$	$L_d >$ $C_d \& O_d$	$H_d \& L_d >$ $C_d \& O_d$
AXP	0.102	0.097	-0.038	-0.04	58.33	46.31	0	0	65.26	34.74	0	0	100	100	100
BA	0.119	0.116	0.025	0.076	71.87	81.44	2.62	53.06	37.26	47.21	0	15.53	76.69	65.62	57.84
CAT	0.143	0.142	0.059	0.105	98.5	92.67	31.22	47.8	33.72	42.82	0	23.46	69.48	68.29	61.23
CSCO	0.11	0.118	-0.027	-0.05	52.55	84.53	0	0	27.27	72.73	0	0	100	100	100
CVX	0.109	0.104	-0.008	-0.008	71.14	50.44	0.04	2.03	59.12	40.88	0	0	100	98.08	98.08
DD	0.086	0.1	-0.004	0.037	31.04	61.16	0	10.38	28.67	71.33	0	0	82.92	100	82.92
DIS	0.112	0.117	0.01	0.062	78.14	74.7	5.45	30.3	34.06	49.6	0	16.34	63.07	78.58	57.99
GE	0.085	0.09	-0.021	-0.046	36.57	52.24	0	0	44.65	55.35	0	0	100	100	100
GS	0.114	0.147	-0.033	-0.054	69.55	100	0	0	0	100	0	0	100	100	100
HD	0.108	0.108	0.011	-0.013	75.27	68.49	0	0	44.71	53.99	1.3	0	98.7	96	96
IBM	0.127	0.109	-0.023	-0.048	78.85	67.23	0	0	80.97	19.03	0	0	100	100	100
INTC	0.125	0.115	-0.005	-0.017	80.33	72.2	0	0	71.77	28.23	0	0	100	100	100
JNJ	0.099	0.096	-0.001	-0.064	45.76	51.44	0	0	52.64	47.36	0	0	100	100	100
JPM	0.119	0.12	0.006	-0.015	51.92	79.61	1.12	0	33.08	66.92	0	0	100	100	100
KO	0.096	0.098	-0.021	0.012	47.5	49.38	0	0	46.02	53.98	0	0	97.31	100	97.31
MCD	0.097	0.081	-0.004	-0.038	49.14	31.8	0	0	77.83	22.17	0	0	100	100	100
MMM	0.08	0.093	-0.025	-0.04	29.38	40.75	0	0	35.45	64.55	0	0	100	100	100
MRK	0.126	0.112	0.018	-0.008	76.44	70.88	0	0	68.31	31.69	0	0	94.66	100	94.66
MSFT	0.115	0.105	-0.038	-0.042	56.05	67.8	0	0	61.72	38.28	0	0	100	100	100
NKE	0.093	0.087	0.014	0.014	37.31	27.94	0.2	0.06	54.4	42.85	0	2.75	97.25	93.86	93.86
PFE	0.109	0.095	-0.008	-0.04	65.53	53.83	0	0	75.05	24.95	0	0	100	99.81	99.81
PG	0.097	0.089	-0.024	-0.048	58.57	50.91	0	0	61.12	38.88	0	0	100	100	100
T	0.118	0.11	-0.013	-0.019	86.63	58	0	0	67.49	32.51	0	0	100	100	100
TRV	0.114	0.106	-0.019	-0.039	60.85	58.06	0.2	0	73.8	26.2	0	0	100	100	100
UNH	0.13	0.087	0.02	-0.012	96.49	31.16	0	0	92.85	7.15	0	0	100	99.4	99.4
UTX	0.089	0.09	-0.001	-0.011	34.77	37.22	0.32	0	53.67	46.33	0	0	90.1	100	90.1
V	0.037	0.065	-0.103	-0.069	0	0	0	0	0	100	0	0	100	100	100
VZ	0.13	0.112	-0.031	-0.019	89.46	54.71	0	0	73.68	26.32	0	0	100	100	100
WMT	0.092	0.092	-0.013	-0.028	31.95	44.63	0	0	49.73	50.27	0	0	97.84	100	97.84
XOM	0.071	0.063	-0.074	-0.071	18.62	3.43	0	0	73.16	26.84	0	0	100	100	100

Tabla Anexo C.3-3: Resumen del análisis dinámico de autocorrelación para los componentes del Dow Jones Industrial Average, explorados con ventanas de 1440 muestras.

Anexo C.4: Resumen de los resultados de estimación dinámica de la autocorrelación para todos los valores del índice IBEX

<i>Ticker</i>	\bar{H}_d	\bar{L}_d	\bar{C}_d	\bar{O}_d	$H_d > 0.1$	$L_d > 0.1$	$C_d > 0.1$	$O_d > 0.1$	$H_d >$	$L_d >$	$C_d >$	$O_d >$	$H_d >$ $C_d \& O_d$	$L_d >$ $C_d \& O_d$	$H_d \& L_d >$ $C_d \& O_d$
ABE	0.089	0.122	-0.039	-0.064	42.39	52.35	5.2	0	26.66	73.34	0	0	100	100	100
ACS	0.134	0.111	0.03	-0.013	72.63	49.37	9.67	0.27	75.09	24.91	0	0	100	95.05	95.05
ACX	0.087	0.087	-0.017	-0.063	34.23	49.49	5.43	0.15	50.86	47	2.15	0	96	91.56	89.7
BBVA	0.134	0.141	0.043	-0.015	78.18	81.46	15.2	1.89	52.34	47.66	0	0	92.92	100	92.92
BKT	0.108	0.094	0.041	-0.042	64.9	55.56	31.42	0	52.51	29.62	17.87	0	81.23	80.71	79.81
CABK	0.123	0.115	0.01	-0.05	60.04	63.76	0	0	61.9	38.1	0	0	100	100	100
ELE	0.095	0.119	0	-0.057	45.28	73.29	0.09	0	33.88	66.12	0	0	99.71	98.2	97.91
ENG	0.092	0.066	-0.035	-0.091	48.98	24.02	0	0	70.39	29.61	0	0	96.87	99.26	96.13
FCC	0.106	0.104	-0.025	-0.07	59.9	50.23	0.03	0	54.32	45.68	0	0	100	100	100
FER	0.123	0.085	-0.01	-0.042	77.15	36.25	1.95	0	78.57	21.43	0	0	100	100	100
GAM	0.09	0.092	0.009	0.006	60.16	53.25	4.73	0	53.94	31.86	5.08	9.12	75.57	82.52	72.29
GAS	0.037	0.037	-0.029	-0.046	37.67	41.39	2.32	0.15	35.52	29.89	0.52	0	65.12	64.65	64.36
GRF	0.14	0.084	0.01	-0.021	75.44	53.35	26.81	0.11	80.8	19.2	0	0	100	88.74	88.74
IBE	0.116	0.09	0.019	-0.076	58.43	46.14	12.41	0	64.81	26.58	8.61	0	85.42	86.81	80.84
IDR	0.113	0.079	-0.033	-0.088	56.78	42.94	0	0.46	67.7	32.3	0	0	100	100	100
ITX	0.073	0.085	-0.055	-0.092	22.93	28.56	0	0	45.03	54.97	0	0	100	99.71	99.71
MAP	0.063	0.067	-0.028	-0.05	30.29	34.44	0.82	0	29.24	58.93	10.05	0	87.61	81.51	80.95
MTS	0.136	0.136	0.02	-0.003	80.77	84.19	0	0	49.37	50.63	0	0	98.51	99.67	98.18
OHL	0.151	0.101	0.071	-0.031	95.71	45.91	26.18	3.19	82.62	17.12	0.26	0	94.92	71.36	66.54
POP	0.124	0.087	0.013	-0.036	62.36	34.91	13.85	0	70.65	27.28	2.07	0	97.36	81.68	81.11
REE	0.102	0.107	-0.023	-0.093	49.06	54.11	0	0	44.91	55.09	0	0	100	100	100
REP	0.111	0.118	0.024	-0.047	57.49	63.67	0.67	0	43.18	56.82	0	0	98.11	100	98.11
SAB	0.179	0.155	0.073	0.02	91.56	77.44	39.39	13.49	69.38	24.53	6.08	0	89.25	93.33	88.66
SAN	0.112	0.099	-0.008	-0.055	59.79	52.39	0.12	0	62.58	37.42	0	0	94.34	100	94.34
SCYR	0.141	0.126	0.017	-0.043	80.92	68.28	15.45	0.55	60.44	39.56	0	0	99.01	100	99.01
TEF	0.111	0.112	0.009	-0.048	51.29	50.94	0	0	53.67	46.33	0	0	94.05	99.85	93.9
TL5	0.158	0.123	0.029	0.001	82.6	70.87	6.27	0	78.98	21.02	0	0	100	100	100
TRE	0.122	0.062	-0.006	-0.057	70.92	27.78	0	0	91.48	8.52	0	0	100	97.61	97.61

Tabla Anexo C.4-1: Resumen del análisis dinámico de autocorrelación para los componentes del IBEX explorados con ventanas de 480 muestras.

Ticker	\bar{H}_d	\bar{L}_d	\bar{C}_d	\bar{O}_d	$H_d > 0.1$	$L_d > 0.1$	$C_d > 0.1$	$O_d > 0.1$	$H_d >$	$L_d >$	$C_d >$	$O_d >$	$H_d > C_d \& O_d$	$L_d > C_d \& O_d$	$H_d \& L_d > C_d \& O_d$
ABE	0.089	0.12	-0.042	-0.062	35.12	57.76	0	0	16.87	83.13	0	0	100	100	100
ACS	0.137	0.106	0.031	-0.01	83.45	54.97	3.06	0	92.28	7.72	0	0	100	100	100
ACX	0.089	0.085	-0.019	-0.062	34.07	50.19	0	0	60.36	39.64	0	0	100	100	100
BBVA	0.136	0.146	0.049	-0.011	91.37	86.62	10.21	0	50.42	49.58	0	0	99.43	100	99.43
BKT	0.105	0.089	0.042	-0.042	55.98	51.2	15.81	0	47.72	31.72	20.56	0	79.44	74.28	74.28
CABK	0.126	0.119	0.023	-0.048	75	65.92	0	0	62.21	37.79	0	0	100	100	100
ELE	0.095	0.119	0.006	-0.053	35.85	83.84	0	0	8.23	91.77	0	0	100	100	100
ENG	0.089	0.067	-0.03	-0.097	25.3	2.07	0	0	67.39	32.61	0	0	100	100	100
FCC	0.107	0.108	-0.025	-0.07	69.29	57.96	0	0	52.46	47.54	0	0	100	100	100
FER	0.125	0.095	-0.005	-0.044	90.19	48.25	0	0	78.8	21.2	0	0	100	100	100
GAM	0.065	0.082	0.019	0.019	50.46	45.69	0	0	50.7	47.8	0.95	0.54	58.16	98.51	58.16
GAS	0.044	0.037	-0.021	-0.04	53.12	37.7	0	0	46.24	29.5	0.78	0.1	75.57	75.26	75.09
GRF	0.148	0.091	0.024	-0.011	80.87	52.49	23.54	0	93.21	6.79	0	0	100	95.88	95.88
IBE	0.124	0.088	0.023	-0.069	65.35	30.94	1.08	0	73.23	26.3	0.47	0	96.4	98.11	94.98
IDR	0.108	0.071	-0.035	-0.095	60.11	26.58	0	0	76.44	23.56	0	0	100	100	100
ITX	0.075	0.082	-0.051	-0.087	11.72	21.87	0	0	46.06	53.94	0	0	100	100	100
MAP	0.068	0.076	-0.03	-0.051	26.59	37.55	0	0	32.62	64.25	3.13	0	96.79	83.95	83.87
MTS	0.15	0.144	0.027	0.005	100	99.55	0	0	73.78	26.22	0	0	100	100	100
OHL	0.154	0.103	0.073	-0.032	100	47.98	10.22	0	82.3	17.7	0	0	100	86.18	86.18
POP	0.115	0.084	0.021	-0.031	65.5	32.68	0.6	0	84.7	15.3	0	0	100	74.31	74.31
REE	0.105	0.11	-0.019	-0.09	52.04	61.96	0	0	37.81	62.19	0	0	100	100	100
REP	0.106	0.12	0.029	-0.046	63.92	76.94	0	0	34.39	65.61	0	0	100	100	100
SAB	0.183	0.156	0.081	0.029	100	92.09	39.08	4.88	80.15	19.85	0	0	93.53	100	93.53
SAN	0.115	0.104	-0.002	-0.05	74.82	55.44	0	0	63.16	36.84	0	0	100	100	100
SCYR	0.138	0.131	0.018	-0.044	84.98	78.74	4.59	0	62.64	37.36	0	0	100	100	100
TEF	0.106	0.109	0.008	-0.051	57.3	53.9	0	0	52.88	47.12	0	0	100	100	100
TL5	0.163	0.13	0.032	0.001	100	94.8	0	0	100	0	0	0	100	100	100
TRE	0.137	0.076	0.001	-0.051	76.16	19.66	0	0	100	0	0	0	100	100	100

Tabla Anexo C.4-2: Resumen del análisis dinámico de autocorrelación para los componentes del IBEX explorados con ventanas de 960 muestras.

Ticker	\bar{H}_d	\bar{L}_d	\bar{C}_d	\bar{O}_d	$H_d > 0.1$	$L_d > 0.1$	$C_d > 0.1$	$O_d > 0.1$	$H_d >$	$L_d >$	$C_d >$	$O_d >$	$H_d > C_d \& O_d$	$L_d > C_d \& O_d$	$H_d \& L_d > C_d \& O_d$
ABE	0.085	0.111	-0.051	-0.059	18.52	51.97	0	0	0.36	99.64	0	0	100	100	100
ACS	0.129	0.091	0.017	-0.019	100	41.84	0	0	100	0	0	0	100	100	100
ACX	0.088	0.075	-0.02	-0.059	15.28	23.16	0	0	72.34	27.66	0	0	100	100	100
BBVA	0.135	0.143	0.052	-0.008	100	98.19	2.09	0	51.15	48.85	0	0	100	100	100
BKT	0.098	0.079	0.042	-0.039	38.88	37.03	0	0	79.61	10.09	10.29	0	89.71	67.23	67.23
CABK	0.128	0.123	0.015	-0.048	80.51	78.86	0	0	75.18	24.82	0	0	100	100	100
ELE	0.094	0.117	0.013	-0.047	38.67	97.02	0	0	2.98	97.02	0	0	100	100	100
ENG	0.087	0.065	-0.027	-0.101	21.02	0	0	0	82.06	17.94	0	0	100	100	100
FCC	0.112	0.109	-0.023	-0.064	69.83	60.06	0	0	61.75	38.25	0	0	100	100	100
FER	0.127	0.099	0.002	-0.037	100	44.98	0	0	100	0	0	0	100	100	100
GAM	0.03	0.066	0.023	0.026	18.87	17.99	0	0	15.62	84.38	0	0	34.85	100	34.85
GAS	0.06	0.041	-0.013	-0.034	57.19	41.44	0	0	68.99	21.39	0.89	0.16	90.17	88.2	88
GRF	0.148	0.097	0.024	-0.009	84.09	43.54	0	0	100	0	0	0	100	100	100
IBE	0.132	0.08	0.029	-0.06	75.1	14.7	0	0	85.62	14.38	0	0	100	100	100
IDR	0.102	0.06	-0.039	-0.096	46.52	14.35	0	0	87.91	12.09	0	0	100	100	100
ITX	0.074	0.08	-0.053	-0.079	0	20.1	0	0	43.88	56.12	0	0	100	100	100
MAP	0.069	0.079	-0.037	-0.049	22.52	37.9	0	0	29.32	70.68	0	0	100	100	100
MTS	0.156	0.145	0.029	0.01	100	100	0	0	99.42	0.58	0	0	100	100	100
OHL	0.159	0.104	0.077	-0.025	100	49.4	2.17	0	100	0	0	0	100	91.35	91.35
POP	0.104	0.073	0.028	-0.025	47.66	21.53	0	0	99.58	0.42	0	0	100	86.03	86.03
REE	0.101	0.109	-0.02	-0.092	48.17	70.66	0	0	21.77	78.23	0	0	100	100	100
REP	0.104	0.117	0.027	-0.045	55.59	79.36	0	0	19.67	80.33	0	0	100	100	100
SAB	0.183	0.148	0.077	0.03	100	96.83	39.23	1.15	90.61	9.39	0	0	100	100	100
SAN	0.113	0.099	-0.002	-0.048	89.79	45.8	0	0	58.02	41.98	0	0	100	100	100
SCYR	0.135	0.13	0.017	-0.044	87.56	89.13	0	0	49.01	50.99	0	0	100	100	100
TEF	0.105	0.102	0.007	-0.051	47.73	59.28	0	0	48.45	51.55	0	0	100	100	100
TL5	0.168	0.131	0.034	0.005	100	100	0	0	100	0	0	0	100	100	100
TRE	0.134	0.073	-0.003	-0.054	100	0	0	0	100	0	0	0	100	100	100

Tabla Anexo C.4-3: Resumen del análisis dinámico de autocorrelación para los componentes del IBEX explorados con ventanas de 1440 muestras.

Anexo D: Tablas de exploración dinámica para la predictibilidad *ip*

Anexo D.1: Resumen de los resultados de estimación dinámica de la predictibilidad para los valores del índice CAC 40

Ticker	\bar{H}_d	\bar{L}_d	\bar{C}_d	\bar{O}_d	$H_d > 0.6$	$L_d > 0.6$	$C_d > 0.6$	$O_d > 0.6$	$H_d >$	$L_d >$	$C_d >$	$O_d >$	$H_d >$ $C_d \& O_d$	$L_d >$ $C_d \& O_d$	$H_d \& L_d >$ $C_d \& O_d$
AC	0.525	0.575	0.488	0.505	1.41	15.1	0	0	0	100	0	0	64.81	100	64.81
ACA	0.533	0.563	0.482	0.485	0	7.99	0	0	4.43	95.57	0	0	98.73	100	98.73
AI	0.526	0.565	0.466	0.497	0	11.51	0	0	1.67	98.33	0	0	91.65	100	91.65
AIR	0.551	0.58	0.525	0.511	17.02	15.65	1.72	0	17.44	82.33	0	0	86.69	99.9	86.59
ALO	0.54	0.587	0.49	0.497	0	40.18	0	0	2.75	97.25	0	0	85	100	85
ALU	0.514	0.536	0.503	0.475	0	0	0	0	10.65	84.99	3.21	0.95	68.83	94.95	67.97
BN	0.529	0.553	0.477	0.472	0	0.46	0	0	12.49	87.28	0	0	96.15	100	96.15
BNP	0.544	0.554	0.489	0.5	5.11	7.38	0	0	25.62	73.43	0.26	0.2	73.72	99.37	73.69
CA	0.516	0.54	0.472	0.481	0	6.8	0	0	20.38	79.56	0	0	79.56	100	79.56
CAP	0.539	0.573	0.498	0.51	11.05	24.63	0	0	20.67	74.94	0	4.39	73.05	95.61	73.05
CS	0.555	0.56	0.499	0.519	0.63	5.72	0	0	40.42	58.29	0	1.01	86.38	96.93	84.31
DG	0.535	0.591	0.488	0.513	0	28.47	0	0.09	5.43	93.88	0	0.69	71.24	99.31	71.24
EDF	0.537	0.578	0.505	0.494	0	24.14	0	0	0.4	99.6	0	0	79.72	100	79.72
EI	0.518	0.578	0.473	0.474	4.71	22.99	0	0	8.07	91.48	0	0	84.5	100	84.5
EN	0.542	0.56	0.486	0.5	2.44	7.33	0	0	41.37	57.91	0.72	0	86.89	98.82	86.43
FP	0.548	0.555	0.502	0.501	0.06	9.41	0	0	47.5	51.89	0.11	0.23	88.09	95.32	83.75
FR	0.514	0.581	0.519	0.495	0	25.1	3.32	0.19	0	99.81	0.19	0	45.99	99.81	45.99
GLE	0.546	0.561	0.514	0.498	1.72	23.43	0	0	25.58	64.2	8.56	1.32	75.62	77.92	63.57
GSZ	0.536	0.569	0.473	0.477	0	10.21	0	0	13.17	86.72	0	0	98.3	100	98.3
KER	0.543	0.579	0.49	0.494	0.95	25.14	0	0	2.96	96.9	0.11	0	93.99	99.89	93.99
LG	0.529	0.571	0.496	0.497	0	16.47	0	0	6.68	87.85	5.18	0.23	59.76	93.75	58.95
LR	0.534	0.57	0.487	0.486	11.95	23.58	0	0	19.68	79.89	0	0	74.26	100	74.26
MC	0.548	0.562	0.486	0.496	0.06	11.6	0	0	27.28	72.7	0	0	99.57	100	99.57
ML	0.552	0.563	0.498	0.499	4.79	12.83	0	0	45.55	54.39	0	0	96.27	100	96.27
MT	0.584	0.616	0.549	0.563	15.75	82.02	0	13.52	3.5	96.42	0	0	65.71	100	65.71
OR	0.524	0.541	0.457	0.464	0	0.14	0	0	26.08	73.66	0	0.23	98.1	99.14	97.47
ORA	0.533	0.55	0.474	0.48	0	4.02	0	0	23.59	75.34	0.03	0.11	96.38	98.88	95.46
PUB	0.532	0.569	0.497	0.497	0.27	21.85	0	0	4.9	95.1	0	0	78.33	98.79	77.12
RI	0.53	0.572	0.462	0.482	9.27	9.3	0	0	24.11	75.49	0	0	91.13	100	91.13
RNO	0.55	0.566	0.511	0.503	4.85	8.24	0	0	27.6	71.76	0.55	0.03	91.28	95.41	87.26
SAF	0.515	0.582	0.489	0.502	13.24	35.55	0	0	2.67	97.33	0	0	58.9	100	58.9
SAN	0.544	0.555	0.479	0.48	0	6.69	0	0	39.55	60.13	0.26	0	96.15	99.23	95.67
SGO	0.532	0.565	0.477	0.498	0	7.61	0	0	5.02	94.98	0	0	87.4	100	87.4
SU	0.537	0.568	0.483	0.488	0	3.7	0	0	11.29	88.23	0	0	95.75	100	95.75
TEC	0.538	0.59	0.501	0.512	0	40.47	0	0	5.57	94.31	0	0	77.6	100	77.6
UG	0.551	0.568	0.515	0.502	4.62	18.2	0	0.8	30.28	68.11	0.75	0.8	92.39	96.04	89.98
UL	0.522	0.586	0.498	0.49	2.92	33.8	0	0	16.53	83.43	0	0	57.92	100	57.92
VIE	0.553	0.574	0.511	0.499	11.67	15.34	0	0	23.91	76.06	0	0	94.36	100	94.36
VIV	0.524	0.538	0.48	0.461	2.13	1.61	0	0	33.49	66.23	0	0	90.41	100	90.41

Tabla Anexo D.1-1: Resumen del análisis dinámico de la predictibilidad con los parámetros de la Tabla 4-1 para los componentes del CAC40 explorados con ventanas de 480 muestras.

Ticker	\bar{H}_d	\bar{L}_d	\bar{C}_d	\bar{O}_d	$H_d > 0.6$	$L_d > 0.6$	$C_d > 0.6$	$O_d > 0.6$	$H_d >$	$L_d >$	$C_d >$	$O_d >$	$H_d >$ $C_d \& O_d$	$L_d >$ $C_d \& O_d$	$H_d \& L_d >$ $C_d \& O_d$
AC	0.529	0.578	0.487	0.502	0	5.16	0	0	0	100	0	0	96.04	100	96.04
ACA	0.53	0.562	0.479	0.482	0	3.05	0	0	0.04	99.96	0	0	100	100	100
AI	0.527	0.566	0.466	0.497	0	0	0	0	0	100	0	0	100	100	100
AIR	0.549	0.581	0.523	0.508	0	13.46	0	0	0	100	0	0	100	100	100
ALO	0.543	0.587	0.493	0.496	0	30.89	0	0	0.06	99.94	0	0	98.62	100	98.62
ALU	0.515	0.537	0.505	0.475	0	0	0	0	2.46	97.54	0	0	74.47	100	74.47
BN	0.53	0.555	0.481	0.475	0	0	0	0	2.26	97.74	0	0	100	100	100
BNP	0.542	0.553	0.488	0.501	0	0	0	0	27.81	72.19	0	0	93.87	100	93.87
CA	0.516	0.539	0.474	0.48	0	0	0	0	17.21	82.66	0	0	99.93	100	99.93
CAP	0.544	0.575	0.501	0.507	0	8.16	0	0	15.15	84.85	0	0	85.75	100	85.75
CS	0.556	0.56	0.502	0.519	0	0	0	0	39.15	60.85	0	0	99.57	100	99.57
DG	0.54	0.594	0.491	0.52	0	30.42	0	0	0.43	99.57	0	0	72.71	100	72.71
EDF	0.537	0.574	0.506	0.489	0	0	0	0	0	100	0	0	100	100	100
EI	0.521	0.581	0.472	0.475	0	16.31	0	0	0.4	99.6	0	0	92.48	100	92.48
EN	0.548	0.56	0.484	0.503	0	0	0	0	33.96	66.04	0	0	100	100	100
FP	0.549	0.556	0.505	0.507	0	0	0	0	35.25	64.71	0	0	99.77	98.83	98.6
FR	0.513	0.581	0.515	0.492	0	13.24	0	0	0	100	0	0	38.17	100	38.17

GLE	0.544	0.559	0.513	0.501	0	7.13	0	0	24.18	66.93	8.89	0	89.08	75.82	73.79
GSZ	0.543	0.572	0.479	0.482	0	2.57	0	0	10.97	89.03	0	0	100	100	100
KER	0.544	0.578	0.497	0.501	0	15.6	0	0	0	100	0	0	100	100	100
LG	0.529	0.571	0.497	0.498	0	0.27	0	0	0	100	0	0	74.78	100	74.78
LR	0.543	0.573	0.488	0.492	0	11.13	0	0	8.24	91.76	0	0	92.61	100	92.61
MC	0.551	0.565	0.489	0.501	0	4.7	0	0	14.32	85.58	0	0	100	100	100
ML	0.559	0.569	0.502	0.503	0.37	8.69	0	0	32.59	67.41	0	0	100	100	100
MT	0.584	0.617	0.55	0.57	0	98.71	0	0	0	100	0	0	90.35	100	90.35
OR	0.528	0.542	0.46	0.467	0	0	0	0	28.55	71.45	0	0	100	100	100
ORA	0.534	0.553	0.472	0.476	0	0	0	0	0.33	99.67	0	0	100	100	100
PUB	0.534	0.566	0.495	0.499	0	22.3	0	0	0.04	99.96	0	0	100	100	100
RI	0.534	0.57	0.463	0.481	5.39	0	0	0	27.7	72.3	0	0	97.54	100	97.54
RNO	0.551	0.567	0.51	0.503	0	1.26	0	0	14.24	85.76	0	0	100	100	100
SAF	0.512	0.582	0.487	0.498	0.6	23.68	0	0	0	100	0	0	81.78	100	81.78
SAN	0.545	0.552	0.482	0.484	0	0	0	0	36.45	63.48	0	0	100	100	100
SGO	0.532	0.566	0.478	0.499	0	1.17	0	0	0	100	0	0	98.2	100	98.2
SU	0.542	0.57	0.482	0.491	0	0	0	0	0	100	0	0	100	100	100
TEC	0.543	0.594	0.507	0.515	0	40.17	0	0	0	100	0	0	91.74	100	91.74
UG	0.554	0.57	0.516	0.502	0	1.73	0	0	16.34	83.66	0	0	99	100	99
UL	0.525	0.591	0.503	0.496	0	32.55	0	0	9.95	90.05	0	0	87.76	100	87.76
VIE	0.557	0.575	0.514	0.499	0	0.14	0	0	14.81	85.19	0	0	100	100	100
VIV	0.527	0.538	0.482	0.457	0	0	0	0	29.55	70.35	0	0	100	100	100

Tabla Anexo D.1-2: Resumen del análisis dinámico de la predictibilidad con los parámetros de la Tabla 4-1 para los componentes del CAC40 explorados con ventanas de 960 muestras.

Ticker	\bar{H}_d	\bar{L}_d	\bar{C}_d	\bar{O}_d	$H_d > 0.6$	$L_d > 0.6$	$C_d > 0.6$	$O_d > 0.6$	$H_d >$	$L_d >$	$C_d >$	$O_d >$	$H_d > C_d \& O_d$	$L_d > C_d \& O_d$	$H_d \& L_d > C_d \& O_d$
AC	0.528	0.579	0.487	0.5	0	0	0	0	0	100	0	0	100	100	100
ACA	0.527	0.558	0.476	0.481	0	0	0	0	0	100	0	0	100	100	100
AI	0.529	0.568	0.465	0.496	0	0	0	0	0	100	0	0	100	100	100
AIR	0.549	0.582	0.523	0.506	0	8.94	0	0	0	100	0	0	100	100	100
ALO	0.544	0.586	0.495	0.497	0	0	0	0	0	100	0	0	100	100	100
ALU	0.515	0.535	0.503	0.475	0	0	0	0	0	100	0	0	93.03	100	93.03
BN	0.53	0.556	0.484	0.476	0	0	0	0	0	100	0	0	100	100	100
BNP	0.541	0.555	0.487	0.503	0	0	0	0	33.62	66.38	0	0	100	100	100
CA	0.516	0.541	0.479	0.483	0	0	0	0	5.07	94.93	0	0	100	100	100
CAP	0.549	0.574	0.504	0.505	0	0.71	0	0	8.28	91.72	0	0	100	100	100
CS	0.554	0.558	0.5	0.519	0	0	0	0	26.46	73.54	0	0	100	100	100
DG	0.545	0.596	0.491	0.523	0	50.5	0	0	0	100	0	0	89.49	100	89.49
EDF	0.537	0.575	0.507	0.489	0	0	0	0	0	100	0	0	100	100	100
EI	0.521	0.58	0.472	0.474	0	7.29	0	0	0	100	0	0	98.77	100	98.77
EN	0.549	0.561	0.484	0.505	0	0	0	0	14.54	85.46	0	0	100	100	100
FP	0.548	0.557	0.508	0.511	0	0	0	0	28.72	71.2	0	0	100	100	100
FR	0.509	0.578	0.509	0.488	0	1.87	0	0	0	100	0	0	38.18	100	38.18
GLE	0.543	0.556	0.514	0.506	0	0	0	0	18.79	77.92	3.29	0	96.27	91.72	91.28
GSZ	0.547	0.572	0.481	0.485	0	0	0	0	0.83	99.17	0	0	100	100	100
KER	0.543	0.578	0.499	0.504	0	14.25	0	0	0	100	0	0	100	100	100
LG	0.53	0.571	0.5	0.5	0	0.8	0	0	0	100	0	0	99.56	100	99.56
LR	0.544	0.573	0.488	0.492	0	0.11	0	0	0	100	0	0	100	100	100
MC	0.551	0.563	0.488	0.502	0	0	0	0	6.7	93.3	0	0	100	100	100
ML	0.561	0.572	0.504	0.506	0	0	0	0	15.17	84.83	0	0	100	100	100
MT	0.584	0.615	0.547	0.558	0	100	0	0	0	100	0	0	100	100	100
OR	0.531	0.544	0.462	0.47	0	0	0	0	23.28	76.72	0	0	100	100	100
ORA	0.534	0.555	0.473	0.471	0	0	0	0	0	100	0	0	100	100	100
PUB	0.535	0.565	0.495	0.501	0	15.54	0	0	0	100	0	0	100	100	100
RI	0.536	0.569	0.461	0.48	0	0	0	0	26.78	73.22	0	0	100	100	100
RNO	0.55	0.568	0.507	0.502	0	0	0	0	0	100	0	0	100	100	100
SAF	0.508	0.581	0.486	0.494	0	17.01	0	0	0	100	0	0	82.87	100	82.87
SAN	0.544	0.55	0.482	0.485	0	0	0	0	31.7	68.3	0	0	100	100	100
SGO	0.531	0.565	0.476	0.498	0	0	0	0	0	100	0	0	100	100	100
SU	0.541	0.57	0.482	0.492	0	0	0	0	0	100	0	0	100	100	100
TEC	0.546	0.593	0.511	0.518	0	26.21	0	0	0	100	0	0	100	100	100
UG	0.556	0.574	0.517	0.501	0	0	0	0	0.04	99.96	0	0	100	100	100
UL	0.525	0.594	0.505	0.5	0	31.57	0	0	0	100	0	0	95.35	100	95.35
VIE	0.561	0.576	0.517	0.5	0	0	0	0	9.54	90.46	0	0	100	100	100
VIV	0.528	0.535	0.483	0.455	0	0	0	0	28.59	71.33	0	0	100	100	100

Tabla Anexo D.1-3: Resumen del análisis dinámico de la predictibilidad con los parámetros de la Tabla 4-1 para los componentes del CAC40 explorados con ventanas de 1440 muestras.

Anexo D.2: Resumen de los resultados de estimación dinámica de la predictibilidad para los valores del índice DAX

<i>Ticker</i>	\bar{H}_d	\bar{L}_d	\bar{C}_d	\bar{O}_d	$H_d > 0.6$	$L_d > 0.6$	$C_d > 0.6$	$O_d > 0.6$	$H_d >$	$L_d >$	$C_d >$	$O_d >$	$H_d >$ $C_d \& O_d$	$L_d >$ $C_d \& O_d$	$H_d \& L_d >$ $C_d \& O_d$
ADS	0.547	0.585	0.5	0.513	6.43	35.02	0	0	13.13	86.87	0	0	85.47	100	85.47
ALV	0.547	0.555	0.514	0.509	1.75	11.7	0	0	34.58	60.88	0.99	3.38	87.51	86.7	78.67
BAS	0.557	0.572	0.5	0.526	3.7	19.64	0	0	27.81	65.35	0	6.72	73.64	88.42	68.78
BAYN	0.551	0.567	0.487	0.493	0	16.95	0	0	26.19	73.66	0	0	99.7	95.54	95.25
BEI	0.503	0.547	0.479	0.467	2.15	6.26	0	0	11.93	88.01	0	0	72.29	100	72.29
BMW	0.56	0.569	0.504	0.506	17.07	25.58	0	0	34.9	63.21	0	1.31	97.87	92.48	92.02
CBK	0.523	0.554	0.497	0.479	0	0.17	0	0	6.41	92.77	0.82	0	81.18	99.18	81.18
DAI	0.544	0.542	0.513	0.503	2.86	0	0	0	46.47	46.79	3.53	3.12	74.65	85.05	66.38
DB1	0.519	0.579	0.511	0.519	0.09	20.68	0	0	0	96.69	2.62	0.69	42.34	96.69	42.34
DBK	0.534	0.553	0.505	0.501	2.77	3	0	0	20.09	67.78	10.99	0.79	62.04	81.4	55.22
DPW	0.547	0.57	0.503	0.506	7.61	8.6	0	0	29.1	70.87	0	0	80.59	96.68	77.27
DTE	0.547	0.554	0.481	0.489	9.76	22.14	0	0	45.48	53.99	0	0	95.63	100	95.63
EOAN	0.538	0.562	0.485	0.483	1.74	0.78	0	0	13.9	86.07	0	0	87.2	100	87.2
FME	0.533	0.556	0.473	0.458	0	0.03	0	0	13.99	85.83	0	0	100	99.19	99.19
FRE	0.536	0.577	0.484	0.49	0.29	17.82	0	0	7.06	92.91	0	0	80.11	100	80.11
HEI	0.507	0.556	0.479	0.503	0	9.2	0	0	5.33	94.47	0	0.15	48.22	99.74	48.11
HEN3	0.532	0.573	0.494	0.499	0	32.3	0	0	9.6	89.04	1.36	0	74.14	98.64	74.14
IFX	0.537	0.568	0.504	0.505	17.22	17.96	0	0	14.59	85.15	0.06	0	67.57	99.76	67.57
LHA	0.542	0.565	0.492	0.503	12.53	11.86	0	0	37.95	61.67	0	0	65.11	100	65.11
LIN	0.536	0.575	0.497	0.497	0	6.64	0	0	7.69	90.86	1.46	0	69.37	95.72	66.55
LXS	0.55	0.57	0.487	0.524	3.58	21.74	0	0	28.7	68.02	0	3.14	68.22	89.09	60.56
MRK	0.528	0.558	0.48	0.488	6.29	3.79	0	0	20.62	76.38	3	0	70.41	94.87	68.29
MUV2	0.549	0.565	0.503	0.495	0	10.33	0	0	26.38	73.39	0	0	91.44	99.68	91.12
RWE	0.554	0.561	0.507	0.503	7.43	6.84	0	0	42.56	54.9	2.21	0	83.74	97.45	83.4
SAP	0.545	0.54	0.506	0.474	6.24	1.31	1.63	0	53.29	42.77	3.55	0	95.1	77.36	76.02
SDF	0.534	0.582	0.506	0.517	0	33.42	0	0	0.84	98.17	0	0.99	61.46	99.01	61.46
SIE	0.553	0.547	0.488	0.495	0.06	0.09	0	0	50.23	48.43	0.76	0	94.14	93.59	88.51
TKA	0.559	0.574	0.504	0.515	12.69	14.59	0	0	33.36	66.64	0	0	93.25	100	93.25
VOW3	0.585	0.599	0.542	0.543	4.3	59.26	0	0	14.88	80.08	5.04	0	94.96	89.67	89.67

Tabla Anexo D.2-1: Resumen del análisis dinámico de la predictibilidad con los parámetros de la Tabla 4-1 para los componentes del DAX explorados con ventanas de 480 muestras.

<i>Ticker</i>	\bar{H}_d	\bar{L}_d	\bar{C}_d	\bar{O}_d	$H_d > 0.6$	$L_d > 0.6$	$C_d > 0.6$	$O_d > 0.6$	$H_d >$	$L_d >$	$C_d >$	$O_d >$	$H_d >$ $C_d & O_d$	$L_d >$ $C_d & O_d$	$H_d & L_d >$ $C_d & O_d$
ADS	0.547	0.582	0.497	0.513	0	15.4	0	0	6.23	93.77	0	0	100	100	100
ALV	0.547	0.557	0.516	0.51	0	0.34	0	0	33.56	66.44	0	0	100	100	100
BAS	0.558	0.572	0.499	0.522	1.12	6.46	0	0	13.63	86.34	0	0	96.62	100	96.62
BAYN	0.552	0.568	0.491	0.497	0	0	0	0	18.78	81.22	0	0	100	100	100
BEI	0.509	0.549	0.48	0.47	0.07	0	0	0	6.36	93.57	0	0	88.4	100	88.4
BMW	0.561	0.572	0.505	0.507	18.56	26.72	0	0	23.74	76.26	0	0	100	100	100
CBK	0.528	0.557	0.497	0.481	0	0	0	0	0	100	0	0	99.12	100	99.12
DAI	0.542	0.543	0.515	0.498	0	0	0	0	58.5	40.79	0	0	86.11	100	86.11
DB1	0.525	0.583	0.51	0.52	0	21.95	0	0	0	100	0	0	51.86	100	51.86
DBK	0.538	0.553	0.51	0.502	0	0	0	0	27.53	65.46	6.88	0	68.92	85.02	60.81
DPW	0.552	0.569	0.506	0.506	0	0	0	0	29.64	70.36	0	0	96.79	100	96.79
DTE	0.55	0.554	0.482	0.488	0	5.35	0	0	55.93	44.07	0	0	100	100	100
EOAN	0.538	0.565	0.489	0.489	0	0	0	0	4.38	95.62	0	0	92.68	100	92.68
FME	0.533	0.556	0.476	0.458	0	0	0	0	6.09	93.91	0	0	100	100	100
FRE	0.539	0.58	0.486	0.485	0	16.41	0	0	0	100	0	0	100	100	100
HEI	0.507	0.556	0.477	0.503	0	0.2	0	0	1.39	98.61	0	0	52.03	100	52.03
HEN3	0.529	0.567	0.497	0.497	0	6.17	0	0	0	100	0	0	91.73	100	91.73
IFX	0.546	0.573	0.506	0.51	10.31	25.62	0	0	4.28	95.72	0	0	95.59	100	95.59
LHA	0.553	0.566	0.495	0.504	0.07	1.42	0	0	43.44	56.56	0	0	82.55	100	82.55
LIN	0.538	0.578	0.499	0.497	0	0	0	0	0	100	0	0	96.45	100	96.45
LXS	0.553	0.574	0.489	0.531	0.44	7.98	0	0	23.41	76.59	0	0	77.44	100	77.44
MRK	0.531	0.56	0.483	0.488	0	0.07	0	0	16.89	83.11	0	0	79.65	100	79.65
MUV2	0.553	0.568	0.507	0.501	0	0.07	0	0	25.55	74.45	0	0	100	100	100
RWE	0.561	0.566	0.512	0.51	0	4.42	0	0	29.41	70.55	0	0	100	100	100
SAP	0.55	0.542	0.51	0.474	0.44	0	0	0	72.8	27	0	0	100	92.14	92.14
SDF	0.539	0.588	0.513	0.521	0	25.25	0	0	0	100	0	0	75.49	100	75.49
SIE	0.556	0.548	0.488	0.496	0	0	0	0	49.22	50.78	0	0	100	100	100
TKA	0.564	0.576	0.506	0.519	2	0.2	0	0	28.8	71.2	0	0	100	100	100
VOW3	0.586	0.601	0.538	0.537	2.33	53.97	0	0	2.47	97.53	0	0	100	100	100

Tabla Anexo D.2-2: Resumen del análisis dinámico de la predictibilidad con los parámetros de la Tabla 4-1 para los componentes del DAX explorados con ventanas de 960 muestras.

<i>Ticker</i>	\bar{H}_d	\bar{L}_d	\bar{C}_d	\bar{O}_d	$H_d > 0.6$	$L_d > 0.6$	$C_d > 0.6$	$O_d > 0.6$	$H_d >$	$L_d >$	$C_d >$	$O_d >$	$H_d >$ $C_d & O_d$	$L_d >$ $C_d & O_d$	$H_d & L_d >$ $C_d & O_d$
ADS	0.546	0.58	0.496	0.514	0	5.9	0	0	0	100	0	0	100	100	100
ALV	0.547	0.558	0.519	0.512	0	0	0	0	19.51	80.49	0	0	100	100	100
BAS	0.56	0.573	0.499	0.522	0	0.28	0	0	8.92	91.08	0	0	97.58	100	97.58
BAYN	0.551	0.568	0.494	0.497	0	0	0	0	1.65	98.23	0	0	100	100	100
BEI	0.511	0.549	0.48	0.472	0	0	0	0	0	100	0	0	90.91	100	90.91
BMW	0.56	0.573	0.503	0.508	3.96	21.11	0	0	14.03	85.97	0	0	100	100	100
CBK	0.531	0.559	0.497	0.484	0	0	0	0	0	100	0	0	100	100	100
DAI	0.54	0.543	0.515	0.496	0	0	0	0	36.17	63.83	0	0	96.16	100	96.16
DB1	0.526	0.585	0.508	0.52	0	7.19	0	0	0	100	0	0	55.02	100	55.02
DBK	0.537	0.551	0.513	0.503	0	0	0	0	22.11	75.51	2.39	0	79.23	97.61	79.23
DPW	0.554	0.567	0.506	0.508	0	0	0	0	23.63	76.37	0	0	100	100	100
DTE	0.552	0.554	0.484	0.487	0	2.1	0	0	56.59	43.41	0	0	100	100	100
EOAN	0.541	0.568	0.492	0.492	0	0	0	0	0	100	0	0	100	100	100
FME	0.531	0.556	0.473	0.457	0	0	0	0	0	100	0	0	100	100	100
FRE	0.538	0.582	0.488	0.482	0	0.32	0	0	0	100	0	0	100	100	100
HEI	0.505	0.553	0.475	0.502	0	0	0	0	0	100	0	0	50.44	100	50.44
HEN3	0.529	0.565	0.498	0.496	0	0	0	0	0	100	0	0	96.42	100	96.42
IFX	0.548	0.576	0.506	0.511	0	20.41	0	0	0	100	0	0	99.83	100	99.83
LHA	0.56	0.565	0.497	0.502	0	0	0	0	50.18	49.82	0	0	100	100	100
LIN	0.538	0.579	0.5	0.498	0	0	0	0	0	100	0	0	100	100	100
LXS	0.55	0.577	0.489	0.533	0	0	0	0	4.04	95.96	0	0	84.05	100	84.05
MRK	0.529	0.558	0.484	0.483	0	0	0	0	3.72	96.28	0	0	99.96	100	99.96
MUV2	0.554	0.571	0.508	0.507	0	0	0	0	20.48	79.47	0	0	100	100	100
RWE	0.561	0.568	0.514	0.514	0	0	0	0	19.94	80.06	0	0	100	100	100
SAP	0.548	0.538	0.51	0.472	0	0	0	0	87.18	12.82	0	0	100	99.88	99.88
SDF	0.54	0.59	0.516	0.525	0	8.23	0	0	0	100	0	0	91.85	100	91.85
SIE	0.558	0.55	0.489	0.499	0	0	0	0	61.42	38.58	0	0	100	100	100
TKA	0.565	0.577	0.508	0.522	0	0	0	0	22.67	77.33	0	0	100	100	100
VOW3	0.584	0.593	0.542	0.54	0	30.8	0	0	0	100	0	0	100	100	100

Tabla Anexo D.2-3: Resumen del análisis dinámico de la predictibilidad con los parámetros de la Tabla 4-1 para los componentes del DAX explorados con ventanas de 1440 muestras.

Anexo D.3: Resumen de los resultados de estimación dinámica de la predictibilidad para los valores del DJI (Dow Jones Industrial Average)

Ticker	\bar{H}_d	\bar{L}_d	\bar{C}_d	\bar{O}_d	$H_d > 0.6$	$L_d > 0.6$	$C_d > 0.6$	$O_d > 0.6$	$H_d >$	$L_d >$	$C_d >$	$O_d >$	$H_d >$ $C_d \& O_d$	$L_d >$ $C_d \& O_d$	$H_d \& L_d >$ $C_d \& O_d$
AXP	0.527	0.562	0.464	0.493	0.13	10.58	0	0	11.06	88.79	0	0	84.12	100	84.12
BA	0.52	0.565	0.489	0.534	0	9.07	0	0.29	4.08	75.09	0	20.73	35.68	76.92	33.41
CAT	0.54	0.579	0.509	0.548	2.63	28.6	0	3.97	11.57	81.56	0.01	6.76	41.78	91.81	40.4
CSCO	0.546	0.574	0.494	0.51	13.18	27.87	0	1.78	11.15	77.08	2.42	8.99	78.42	87.4	77.42
CVX	0.553	0.577	0.49	0.524	7.07	27.45	0	0	18.59	71.7	0	9.67	74.65	87.77	72.13
DD	0.53	0.552	0.474	0.516	6.62	6.6	0	2.16	26.62	64.38	0	8.68	61.94	82.52	53.23
DIS	0.533	0.572	0.488	0.531	3.03	15.21	0	14.41	6.93	72.29	0	20.68	45.62	79.11	45.47
GE	0.523	0.547	0.45	0.495	1.13	5.77	0	0	26.42	68.55	0	4.79	72.72	93.01	70.55
GS	0.53	0.576	0.484	0.49	2.14	22.66	0	0	5.21	94.73	0	0	79.39	100	79.39
HD	0.524	0.557	0.454	0.493	6.71	21.81	0	0	16.59	83.2	0	0.05	75.77	98.32	74.15
IBM	0.546	0.562	0.489	0.494	3.63	19.35	0	0.79	29.22	70.26	0	0.4	91.93	98.88	91.22
INTC	0.54	0.557	0.459	0.498	9.03	20.69	0	0	26.97	72.3	0	0.42	90.63	95.19	86.27
JNJ	0.532	0.562	0.475	0.497	0	15.71	0	0	12.88	81.61	0.02	5.22	80.49	93.33	79.05
JPM	0.531	0.564	0.484	0.5	0.75	17.85	0	0	11.27	86.25	0	2.35	83.92	94.97	81.26
KO	0.529	0.562	0.448	0.517	6.54	18.42	0	3.24	15.23	78.11	0.07	6.54	60.08	90.9	57.65
MCD	0.542	0.555	0.482	0.503	2.33	10.02	0	0	29.63	63.38	1.81	5.11	80.61	86.42	73.94
MMM	0.525	0.565	0.483	0.501	2.39	7.99	0	0	7.52	92.32	0	0	69.55	99.93	69.47
MRK	0.54	0.567	0.487	0.512	1.88	16.39	0	0.56	21.07	73.35	0	5.46	75.6	94.11	75.16
MSFT	0.542	0.554	0.443	0.495	5.03	13.82	0	0	27.86	68.59	0	3.37	82.89	96.09	82.35
NKE	0.497	0.549	0.454	0.511	0	11.02	0	0	8.46	83.89	0	7.58	32.63	90.57	30.85
PFE	0.527	0.556	0.438	0.49	1.78	16.42	0	0	13.28	79.09	0	7.51	83.38	92.14	83.03
PG	0.538	0.567	0.471	0.5	3.95	10.67	0	0	19.42	78.28	0	2.17	84.33	96.98	83.54
T	0.544	0.572	0.488	0.505	5.71	19.46	0	0	19.27	80.68	0	0	89.92	98.38	88.3
TRV	0.525	0.552	0.48	0.49	0	2.44	0	0	25.43	74.49	0	0	75.9	94.38	70.32
UNH	0.551	0.586	0.513	0.516	8.34	31.83	0	0	12.33	87.67	0	0	78.26	100	78.26
UTX	0.528	0.565	0.483	0.514	1.77	12.75	0.11	0	10.87	86.2	1.43	1.35	63.29	96.66	62.75
V	0.558	0.593	0.496	0.528	2.31	57.19	0	0	0	100	0	0	94.58	100	94.58
VZ	0.539	0.574	0.478	0.507	4.99	13.55	0	0	16.82	83.14	0	0.04	86.92	99.96	86.92
WMT	0.524	0.56	0.455	0.493	3.65	19.2	0	0	22.95	72.13	1.55	3.19	71.17	94.94	71.02
XOM	0.535	0.556	0.461	0.506	5.7	9.13	0	0	24.48	69.33	0	5.96	72.86	90.49	69.5

Tabla Anexo D.3-1: Resumen del análisis dinámico de la predictibilidad con los parámetros de la Tabla 4-1 para los componentes del Dow Jones Industrial Average, explorados con ventanas de 480 muestras

Ticker	\bar{H}_d	\bar{L}_d	\bar{C}_d	\bar{O}_d	$H_d > 0.6$	$L_d > 0.6$	$C_d > 0.6$	$O_d > 0.6$	$H_d >$	$L_d >$	$C_d >$	$O_d >$	$H_d >$ $C_d \& O_d$	$L_d >$ $C_d \& O_d$	$H_d \& L_d >$ $C_d \& O_d$
AXP	0.527	0.561	0.464	0.491	0	1.91	0	0	5.35	94.65	0	0	98.27	100	98.27
BA	0.52	0.567	0.491	0.534	0	1.08	0	0	1.34	83.98	0	14.5	30.29	83.98	28.95
CAT	0.541	0.581	0.51	0.55	0	22.65	0	0	8.18	87.19	0	4.64	32.4	95.36	32.4
CSCO	0.55	0.576	0.5	0.508	13.52	25.16	0	0.15	1.95	93.74	0	4.19	89.9	95.77	89.9
CVX	0.553	0.578	0.49	0.523	3.68	15.36	0	0	13.12	83.55	0	3.32	86.21	96.68	86.21
DD	0.53	0.553	0.475	0.516	0.03	3.25	0	0	20.73	67.39	0	11.47	68.68	83.63	63.86
DIS	0.534	0.573	0.489	0.528	1.21	7.46	0	6.48	7.46	82.61	0	9.93	49.31	90.07	49.31
GE	0.523	0.55	0.456	0.495	0	4.21	0	0	14.66	82.91	0	2.43	89.61	97.09	89.13
GS	0.533	0.579	0.483	0.49	0	29.88	0	0	0.66	99.34	0	0	100	100	100
HD	0.527	0.561	0.458	0.495	0.6	13.66	0	0	1.05	98.95	0	0	81.6	100	81.6
IBM	0.548	0.561	0.489	0.492	0	9.35	0	0	23.87	76.13	0	0	94.91	100	94.91
INTC	0.544	0.564	0.463	0.501	3.02	11.09	0	0	17.04	82.94	0	0	96.05	100	96.05
JNJ	0.532	0.563	0.478	0.495	0	9.08	0	0	2.63	94.94	0	2.42	87.59	97.57	87.59
JPM	0.532	0.566	0.483	0.498	0	13.24	0	0	0.49	99.51	0	0	94.21	100	94.21
KO	0.533	0.564	0.458	0.519	0	3.95	0	0	10.06	88.92	0	0.95	69.61	99.05	69.61
MCD	0.542	0.556	0.483	0.503	0	4.01	0	0	20.09	77.06	0.08	2.68	95.07	94.86	92.69
MMM	0.524	0.565	0.483	0.499	0	3.7	0	0	2.61	97.39	0	0	80.54	100	80.54
MRK	0.542	0.569	0.49	0.513	0	5.74	0	0	11.94	87.06	0	1	83.37	99	83.37
MSFT	0.546	0.557	0.453	0.496	0	8.11	0	0	24.23	75.75	0	0	93.32	100	93.32
NKE	0.498	0.552	0.459	0.513	0	1.35	0	0	1.17	94.15	0	4.59	16.13	95.31	16.13
PFE	0.53	0.56	0.442	0.49	0	9.76	0	0	4.21	91	0	4.78	88.77	95.22	88.77
PG	0.539	0.568	0.474	0.499	0	1.61	0	0	12.84	86.95	0	0.17	97.91	99.6	97.69
T	0.54	0.57	0.485	0.503	0	7.04	0	0	5.22	94.78	0	0	99.05	100	99.05
TRV	0.526	0.553	0.48	0.49	0	0	0	0	16.48	83.52	0	0	87.43	99.93	87.37
UNH	0.552	0.585	0.514	0.516	0.52	17.88	0	0	7.92	92.06	0	0	90.81	100	90.81
UTX	0.527	0.564	0.483	0.511	0	6.41	0	0	1.38	98.62	0	0	70.25	100	70.25
V	0.561	0.596	0.495	0.532	0	51.08	0	0	0	100	0	0	100	100	100
VZ	0.539	0.574	0.476	0.505	0	0	0	0	10.15	89.84	0	0	95.43	100	95.43
WMT	0.527	0.561	0.463	0.492	0	8.99	0	0	18.98	81.02	0	0	87.15	100	87.15
XOM	0.538	0.557	0.465	0.506	1.46	5.69	0	0	17.06	76.16	0	6.71	77.64	92.83	77.21

Tabla Anexo D.3-2: Resumen del análisis dinámico de la predictibilidad con los parámetros de la Tabla 4-1 para los componentes del Dow Jones Industrial Average, explorados con ventanas de 960 muestras.

Ticker	\bar{H}_d	\bar{L}_d	\bar{C}_d	\bar{O}_d	$H_d > 0.6$	$L_d > 0.6$	$C_d > 0.6$	$O_d > 0.6$	$H_d >$	$L_d >$	$C_d >$	$O_d >$	$H_d >$ $C_d \& O_d$	$L_d >$ $C_d \& O_d$	$H_d \& L_d >$ $C_d \& O_d$
AXP	0.525	0.56	0.462	0.49	0	0	0	0	0	100	0	0	100	100	100
BA	0.518	0.567	0.49	0.533	0	0	0	0	0.26	94.29	0	5.44	25.72	94.55	25.71
CAT	0.542	0.582	0.511	0.552	0	12.67	0	0	5.34	92.86	0	1.8	32.02	98.2	32.02
CSCO	0.549	0.576	0.5	0.505	7.66	24.49	0	0	0	100	0	0	96.32	100	96.32
CVX	0.553	0.578	0.49	0.522	1.06	10.24	0	0	15.36	84.64	0	0	89.65	100	89.65
DD	0.528	0.553	0.476	0.515	0	0	0	0	11.71	80.38	0	7.88	67.17	90.69	65.77
DIS	0.535	0.573	0.49	0.527	0	4.47	0	1.1	1.94	97.95	0	0.11	46.01	99.89	46.01
GE	0.524	0.552	0.459	0.494	0	0	0	0	11.2	88.79	0	0.01	97.71	99.99	97.71
GS	0.539	0.585	0.485	0.492	0	20.6	0	0	0	100	0	0	100	100	100
HD	0.53	0.564	0.464	0.497	0	1.72	0	0	0	100	0	0	87.31	100	87.31
IBM	0.547	0.56	0.488	0.49	0	2.79	0	0	30.3	69.7	0	0	100	100	100
INTC	0.546	0.566	0.466	0.503	0.19	8.24	0	0	13.23	86.77	0	0	99.72	100	99.72
JNJ	0.533	0.565	0.481	0.494	0	0.66	0	0	0	100	0	0	94.19	100	94.19
JPM	0.533	0.568	0.484	0.498	0	8.85	0	0	0	100	0	0	99.28	100	99.28
KO	0.536	0.565	0.463	0.52	0	0	0	0	11.91	87.92	0	0	77.2	100	77.2
MCD	0.541	0.557	0.484	0.502	0	0.15	0	0	18.86	81.14	0	0	99.93	100	99.93
MMM	0.522	0.566	0.483	0.498	0	0	0	0	0	100	0	0	84.39	100	84.39
MRK	0.544	0.572	0.494	0.513	0	1.4	0	0	7.89	92.11	0	0	88.8	100	88.8
MSFT	0.549	0.558	0.459	0.494	0	3.06	0	0	27.31	72.69	0	0	98.58	100	98.58
NKE	0.501	0.556	0.464	0.517	0	0	0	0	0	97.73	0	2.25	16.22	97.73	16.22
PFE	0.533	0.564	0.447	0.49	0	4.54	0	0	1.41	94.77	0	3.82	92.07	96.18	92.07
PG	0.539	0.569	0.476	0.499	0	0	0	0	3.23	96.71	0	0	100	100	100
T	0.539	0.568	0.483	0.501	0	0.83	0	0	0	100	0	0	100	100	100
TRV	0.526	0.553	0.481	0.491	0	0	0	0	14.37	85.63	0	0	91.13	100	91.13
UNH	0.551	0.583	0.513	0.514	0	6.49	0	0	1.49	98.51	0	0	96.3	100	96.3
UTX	0.526	0.563	0.483	0.51	0	2.26	0	0	1.35	98.65	0	0	80.34	100	80.34
V	0.55	0.587	0.489	0.524	0	0	0	0	0	100	0	0	100	100	100
VZ	0.538	0.574	0.475	0.504	0	0	0	0	6.06	93.94	0	0	100	100	100
WMT	0.529	0.56	0.464	0.492	0	0.12	0	0	7.55	92.45	0	0	92.07	100	92.07
XOM	0.538	0.558	0.466	0.505	0	0	0	0	16.21	81.72	0	1.98	82.95	97.94	82.95

Tabla Anexo D.3-3: Resumen del análisis dinámico de la predictibilidad con los parámetros de la Tabla 4-1 para los componentes del Dow Jones Industrial Average, explorados con ventanas de 1440 muestras.

Anexo D.4: Resumen de los resultados de estimación dinámica de la predictibilidad para todos los valores del índice IBEX

<i>Ticker</i>	\bar{H}_d	\bar{L}_d	\bar{C}_d	\bar{O}_d	$H_d > 0.6$	$L_d > 0.6$	$C_d > 0.6$	$O_d > 0.6$	$H_d >$	$L_d >$	$C_d >$	$O_d >$	$H_d >$ $C_d \& O_d$	$L_d >$ $C_d \& O_d$	$H_d \& L_d >$ $C_d \& O_d$
ABE	0.541	0.591	0.484	0.509	6.68	45.02	0	0	2.7	97.18	0	0	85.57	100	85.57
ACS	0.575	0.588	0.54	0.523	24.62	45.22	8.67	7.38	34.12	65.3	0	0.31	86.51	85.35	72.17
ACX	0.518	0.575	0.489	0.492	0	31.29	0	0	5.68	94.32	0	0	75.38	100	75.38
BBVA	0.552	0.554	0.495	0.51	4.73	4.61	0	0	45.04	53.83	0	0.87	88.66	98.03	87.62
BKT	0.528	0.537	0.5	0.48	0	0.64	0	0	30.1	61.25	8.38	0.26	79.9	78.48	67.02
CABK	0.548	0.582	0.496	0.48	0	34.42	0	0	24.72	74.22	0	1.06	97.54	98.74	97.34
ELE	0.548	0.58	0.507	0.489	14.54	22.11	0	0	11.11	88.33	0.06	0	85.32	99.62	85.32
ENG	0.56	0.574	0.489	0.487	10.47	28.61	0	0	30.62	69.38	0	0	100	99.68	99.68
FCC	0.521	0.568	0.473	0.476	6.12	20.63	0	0	2.55	97.45	0	0	83.43	100	83.43
FER	0.543	0.571	0.479	0.514	0	8.96	0	0	9.27	90.69	0	0.04	88.12	99.11	87.27
GAM	0.523	0.57	0.497	0.507	10.05	39.1	0.14	0	4.59	78.34	7.6	9.29	71.4	82.11	70.57
GAS	0.428	0.443	0.396	0.402	5.95	15.85	0	0	18.23	45.73	1.02	0.15	58.25	64.23	58.13
GRF	0.54	0.602	0.506	0.513	2.47	55.14	0	2.09	8.15	91.85	0	0	67.26	100	67.26
IBE	0.556	0.559	0.509	0.479	10.78	19.12	0	0	43.7	56.27	0	0	100	84.12	84.12
IDR	0.529	0.556	0.474	0.468	0	10	0	0	34.28	65.72	0	0	99.23	99.91	99.14
ITX	0.537	0.579	0.487	0.486	7.81	24.18	0	0	18.78	81.22	0	0	86.05	100	86.05
MAP	0.499	0.532	0.459	0.473	0	0.07	0	0	8.47	78.62	10.77	0	64.51	83.36	60.66
MTS	0.547	0.553	0.509	0.522	1.38	0	0	0	53.3	40.14	0	6.39	71.64	77.09	55.29
OHL	0.541	0.583	0.525	0.505	3.54	47	3.6	0	5.34	92.08	2.55	0	69.05	95.85	67.45
POP	0.532	0.555	0.481	0.486	0.03	14.14	0	0	21.74	75.08	0.96	1.95	89.04	94.38	86.49
REE	0.538	0.591	0.499	0.463	0	38.97	0	0	0	100	0	0	93.44	100	93.44
REP	0.545	0.565	0.507	0.494	6.88	19.7	0	0	21.44	78.56	0	0	88.19	97.88	86.07
SAB	0.53	0.584	0.517	0.503	0.44	39.37	0	0	8.23	84.5	7.23	0	57	92.74	57
SAN	0.555	0.554	0.498	0.506	11.66	9.19	0	0.67	62.47	35.99	0	1.54	89.59	94.17	85.3
SCYR	0.528	0.586	0.503	0.482	0.15	38.27	0	0	0	100	0	0	68.06	100	68.06
TEF	0.539	0.556	0.49	0.487	6.76	6.53	0	0	32.21	67.41	0	0	92.37	99.91	92.28
TL5	0.544	0.567	0.498	0.505	1.79	13.26	0	0	15.94	84.06	0	0	94.93	100	94.93
TRE	0.557	0.586	0.519	0.505	0	20.23	0	0	8.57	91.43	0	0	97.13	100	97.13

Tabla Anexo D.4-1: Resumen del análisis dinámico de la predictibilidad con los parámetros de la Tabla 4-1 para los componentes del IBEX, explorados con ventanas de 480 muestras.

<i>Ticker</i>	\bar{H}_d	\bar{L}_d	\bar{C}_d	\bar{O}_d	<i>H_d>0.6</i>	<i>L_d>0.6</i>	<i>C_d>0.6</i>	<i>O_d>0.6</i>	<i>H_d></i>	<i>L_d></i>	<i>C_d></i>	<i>O_d></i>	<i>H_d></i> <i>C_d& O_d</i>	<i>L_d></i> <i>C_d& O_d</i>	<i>H_d&L_d></i> <i>C_d& O_d</i>
ABE	0.542	0.59	0.482	0.513	0	46.71	0	0	0	100	0	0	97.07	100	97.07
ACS	0.579	0.585	0.541	0.519	16.34	42.97	0	0	39.34	60.66	0	0	100	97.26	97.26
ACX	0.518	0.573	0.489	0.49	0	23.72	0	0	0	100	0	0	97.91	100	97.91
BBVA	0.554	0.554	0.495	0.509	0.2	0	0	0	53.27	46.29	0	0	100	100	100
BKT	0.528	0.535	0.497	0.477	0	0	0	0	41.78	58.22	0	0	94.61	79.95	74.56
CABK	0.547	0.579	0.501	0.477	0	37.66	0	0	22.15	77.85	0	0	100	100	100
ELE	0.548	0.578	0.507	0.491	0	7.42	0	0	0.27	99.73	0	0	99.16	100	99.16
ENG	0.56	0.569	0.49	0.487	0	11.63	0	0	48.12	51.88	0	0	100	100	100
FCC	0.524	0.567	0.477	0.475	0	0.27	0	0	0	100	0	0	100	100	100
FER	0.542	0.57	0.483	0.513	0	0	0	0	2.37	97.63	0	0	100	100	100
GAM	0.516	0.563	0.498	0.507	0	30.31	0	0	0	86.5	4.31	9.19	62.36	86.5	62.36
GAS	0.448	0.459	0.411	0.419	0	12.75	0	0	24.6	49.7	1.18	0.17	72.13	74.63	72
GRF	0.549	0.596	0.509	0.518	0	41.34	0	0	0	100	0	0	98.34	100	98.34
IBE	0.56	0.56	0.509	0.481	0	10.06	0	0	36.69	63.31	0	0	100	87.58	87.58
IDR	0.531	0.553	0.475	0.468	0	3.67	0	0	32.07	67.93	0	0	100	100	100
ITX	0.54	0.576	0.493	0.487	0	9.7	0	0	19.58	80.42	0	0	97.11	100	97.11
MAP	0.503	0.539	0.463	0.478	0	0	0	0	3.72	84.85	11.31	0	63.17	85.36	59.96
MTS	0.547	0.55	0.506	0.524	0	0	0	0	55.16	44.84	0	0	78.07	98.5	76.57
OHL	0.541	0.584	0.53	0.505	0	34.48	0	0	0	100	0	0	76.47	100	76.47
POP	0.53	0.555	0.481	0.487	0	5.33	0	0	9.23	90.77	0	0	99.79	100	99.79
REE	0.539	0.594	0.499	0.464	0	30.41	0	0	0	100	0	0	100	100	100
REP	0.543	0.568	0.51	0.495	0	0	0	0	12.4	87.56	0	0	93.46	100	93.46
SAB	0.536	0.585	0.525	0.51	0	31.5	0	0	0	100	0	0	67.33	100	67.33
SAN	0.558	0.554	0.497	0.509	4.75	0	0	0	64.76	35.24	0	0	100	100	100
SCYR	0.527	0.585	0.503	0.478	0	31.95	0	0	0	100	0	0	85.05	100	85.05
TEF	0.538	0.556	0.491	0.488	0	0	0	0	27.98	71.88	0	0	100	100	100
TL5	0.54	0.566	0.492	0.499	0	0	0	0	4.61	95.39	0	0	100	100	100
TRE	0.56	0.587	0.524	0.505	0	7.4	0	0	0	100	0	0	100	100	100

Tabla Anexo D.4-2: Resumen del análisis dinámico de la predictibilidad con los parámetros de la Tabla 4-1 para los componentes del IBEX, explorados con ventanas de 960 muestras.

<i>Ticker</i>	\bar{H}_d	\bar{L}_d	\bar{C}_d	\bar{O}_d	<i>H_d>0.6</i>	<i>L_d>0.6</i>	<i>C_d>0.6</i>	<i>O_d>0.6</i>	<i>H_d></i>	<i>L_d></i>	<i>C_d></i>	<i>O_d></i>	<i>H_d></i> <i>C_d& O_d</i>	<i>L_d></i> <i>C_d& O_d</i>	<i>H_d&L_d></i> <i>C_d& O_d</i>
ABE	0.541	0.587	0.48	0.513	0	36.7	0	0	0	100	0	0	100	100	100
ACS	0.578	0.577	0.539	0.514	0	22.41	0	0	55.18	44.82	0	0	100	100	100
ACX	0.518	0.572	0.491	0.491	0	14.07	0	0	0	100	0	0	100	100	100
BBVA	0.553	0.552	0.495	0.51	0	0	0	0	54.26	45.74	0	0	100	100	100
BKT	0.529	0.53	0.497	0.477	0	0	0	0	52.45	47.55	0	0	100	95.02	95.02
CABK	0.549	0.584	0.498	0.479	0	5.69	0	0	0	100	0	0	100	100	100
ELE	0.546	0.578	0.51	0.493	0	0	0	0	0	100	0	0	99.96	100	99.96
ENG	0.558	0.565	0.488	0.483	0	0	0	0	57.72	42.23	0	0	100	100	100
FCC	0.527	0.566	0.479	0.474	0	0	0	0	0	100	0	0	100	100	100
FER	0.544	0.573	0.489	0.518	0	0	0	0	0	100	0	0	100	100	100
GAM	0.509	0.556	0.499	0.508	0	1.91	0	0	0	100	0	0	35.66	100	35.66
GAS	0.469	0.476	0.426	0.434	0	7.97	0	0	25.2	63.53	1.41	0.2	86.03	89.05	85.87
GRF	0.549	0.597	0.509	0.519	0	40.18	0	0	0	100	0	0	100	100	100
IBE	0.561	0.558	0.51	0.485	0	0	0	0	62.14	37.86	0	0	100	99.96	99.96
IDR	0.529	0.549	0.475	0.466	0	0	0	0	22.9	77.1	0	0	100	100	100
ITX	0.54	0.575	0.493	0.488	0	5.63	0	0	0	100	0	0	100	100	100
MAP	0.501	0.542	0.459	0.479	0	0	0	0	0	100	0	0	86.02	100	86.02
MTS	0.548	0.551	0.507	0.524	0	0	0	0	48.13	51.87	0	0	92.52	100	92.52
OHL	0.544	0.586	0.533	0.508	0	30.52	0	0	0	100	0	0	83.63	100	83.63
POP	0.53	0.555	0.482	0.49	0	0	0	0	0	100	0	0	100	100	100
REE	0.54	0.595	0.499	0.464	0	36.16	0	0	0	100	0	0	100	100	100
REP	0.541	0.569	0.511	0.495	0	0	0	0	0	100	0	0	100	100	100
SAB	0.54	0.584	0.525	0.512	0	22.82	0	0	0	100	0	0	79.32	100	79.32
SAN	0.56	0.553	0.498	0.512	0	0	0	0	69.94	30.02	0	0	100	100	100
SCYR	0.525	0.585	0.503	0.477	0	27.38	0	0	0	100	0	0	100	100	100
TEF	0.54	0.555	0.494	0.49	0	0	0	0	20.68	78.68	0	0	100	100	100
TL5	0.543	0.568	0.493	0.501	0	0	0	0	0	100	0	0	100	100	100
TRE	0.56	0.587	0.525	0.506	0	0.11	0	0	0	100	0	0	100	100	100

Tabla Anexo D.4-3: Resumen del análisis dinámico de la predictibilidad con los parámetros de la Tabla 4-1 para los componentes del IBEX, explorados con ventanas de 1440 muestras..

Anexo E: Publicaciones y contribuciones a congresos

Anexo E.1: Web-based system for evaluating day trading strategies

Web-based system for evaluating day trading strategies

Juan Ricardo Rivera Peruyero

Dept. of Digital Information Technologies
University of Vic (UVic)
08500 Vic (Barcelona), Spain
juanricardo.rivera@uvic.cat

Pere Marti-Puig

Dept. of Digital Information Technologies
University of Vic (UVic)
08500 Vic (Barcelona), Spain
pere.marti@uvic.cat

Abstract—This work evaluates two simple speculation methods in terms of the mean losses and benefits they produce under different market conditions, after 200 days of activity. One of the methods is widely known while the other is proposed by the authors. An application was developed to mine the prices of financial assets from free web information providers. The results relate to stocks of the Spanish IBEX-35.

Keywords—component; automatic trading systems, data mining, speculation systems.

I. INTRODUCTION

Even nowadays the models widely used in financial asset management are based on certain hypotheses that have been proven wrong, therefore, the predictions of the future evolution of prices, risk or any other financial parameter are quite poor. This is mainly because all the models used assume Gaussian distributions. Benoit Mandelbrot was the first to warn that the statistical distributions used to model the variation in prices are not Gaussian [1][2]. He showed that the tails of the probability density functions for real price variation are bigger than the tails of the Gaussian distributions. He showed that the same happens for other kinds of variables, such as, the personal incomes, the market profit, the size of hedge funds, the returns on financial markets, the number of deaths in wars or the number of terrorist victims. Mandelbrot's observation is relevant, because extreme events happen more frequently than Gaussian statistics suggest. This is why Gaussian models have provided incorrect risk perceptions, however, the classical models used to calculate the prices of financial assets (loans, bonds, stocks, insurance policies, derivative products, etc.) are based on Gaussian distributions. This is the reason, Mandelbrot strongly criticizes the theoretical foundations of the Black-Scholes model, which is the model used by banks, even today. He presented numerous cases in which reality contradicts theoretical expectations. In addition, Mandelbrot notes that the models used are unable to prevent disasters like the recent economic crisis or help reach more modest goals, such as securing profits in stable periods or correctly predicting market risk. He said that, according to Gaussian models the 1987 stock market crash was something that could only happen once in several billion years. Mandelbrot raised two more important fundamental questions about price series. The first question whether the current models consider the random discontinuities or jump

what occurs in prices, benefits or other financial variables. The second question whether the prices follow a fractal pattern, that is, whatever the time scale of observation, the appearance of prices is always the same. Based on this, Mandelbrot warned of the great difficulties involved in predicting market movements. He stated 'Many economic theories have more pseudoscience than science, and anyone who claims to have a method to easily win in the stock market has the same reliability as an astrologer'. To show this, in this work we have developed a web-based system for evaluating two simple trading strategies which avoid models. One of these strategy is proposed by the authors while the other is a popular method that has been recommended by several authors [5][6]. These methods are based on simple and mostly non-linear operations on the price series to produce signals of buying or selling. In the day trading literature and on the Internet we can find many methods that fulfil those requirements and often their users/authors state that they perform well. The web-based application is programmed with Matlab. As we understand the limitations described by Mandelbrot and others involved in obtaining a system that easily wins in the stock markets, we need to verify if they really obtain (or not) recurrent benefits. This paper is organized as follows. In part II we present the two strategies under evaluation. In part III we briefly describe the web-based system. In part IV we present some simulations and their results. Finally section V compiles some conclusions.

II. DAY-TRADING STRATEGIES UNDER EVALUATION

We examined two simple day trading strategies. If the the asset price is expected to rise then the system adopts long positions stock values and if they are expected to fall then short positions are adopted. Platforms that operate with CFD (Contracts for Differences) provide this functionality. The first one is based on the directional movement indicator (ADX) developed by Wilder [4]. We selected this method because in [5][6] it is classified as one of the best trading methods. The second method is our own method. These methods work with just four representative financial asset prices that are determined each business day. That is, for the day indexed with n we only take the price at opening, $o(n)$, the highest price reached, $h(n)$, the lowest price reached, $l(n)$, and the price at closing, $c(n)$, see Fig. 1.

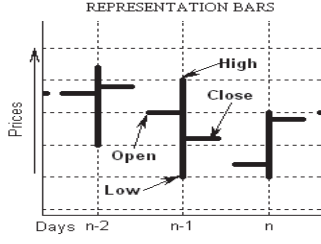


Figure 1 Representation of the four price values considered at days $n-2$, $n-1$ and n . These prices are at the opening (o), the lowest (l), the highest (h) and the closing (c)

A. Method 1 (based on ADX)

Before defining the ADX, we need to present some signals. In accordance with [4] and using a similar nomenclature, the directional movement of day n , $DM(n)$, is defined with the next two signals $DM^+(n)$ and $DM^-(n)$. Being:

$$Mh(n) = h(n) - h(n-1) \quad (1)$$

$$Ml(n) = l(n-1) - l(n) \quad (2)$$

Then,

$$DM^+(n) = \begin{cases} Mh(n) & \text{if } Mh(n) > 0 \wedge Mh(n) > Ml(n) \\ 0 & \text{if not} \end{cases} \quad (3)$$

and

$$DM^-(n) = \begin{cases} Ml(n) & \text{if } Ml(n) > 0 \wedge Mh(n) < Ml(n) \\ 0 & \text{if not} \end{cases} \quad (4)$$

where $h(n)$ and $l(n)$ are the highest and lower prices on day n respectively and symbol \wedge stands for the logical AND. To continue, the true range on day n , $TR(n)$, is defined as:

$$TR(n) = \max\{h(n) - l(n), |h(n) - c(n-1)|, |c(n-1) - l(n)|\} \quad (5)$$

The operator $||$ represents the absolute value. Wilder observes that $TR(n)$ expands and contracts with the volatility of prices, and states that it is a measure of the maximum fluctuation that the price of a given asset undergoes in a day. Using the true range he defines the directional indicator $DI^+(n)$ as:

$$DI^+(n) = DM^+(n)/TR(n) \quad (6)$$

and directional indicator $DI^-(n)$ as:

$$DI^-(n) = DM^-(n)/TR(n) \quad (7)$$

The average directional indicators are obtained by averaging the last two signals. Considering N is the number of days used to compute them, the signal $ADI_N^+(n)$ is:

$$ADI_N^+(n) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} DI^+(n-i)}{\sum_{i=0}^{N-1} TR(n-i)} \quad (8)$$

and the signal $ADI_N^-(n)$:

$$ADI_N^-(n) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} DI^-(n-i)}{\sum_{i=0}^{N-1} TR(n-i)} \quad (9)$$

Finally, Wilder defines the average directional movement index as:

$$ADX_N(n) = \frac{|ADI_N^+(n) - ADI_N^-(n)|}{ADI_N^+(n) + ADI_N^-(n)} \times 100 \quad (10)$$

The higher the value of this ratio, the stronger the directional movement is, and, Wilde interprets this as showing more pronounced trend for the price sequence. The $ADX_N(n)$ does not provide information on the trend direction; it only provides information on its strength. There are different ways of taking advantage of the $ADX_N(n)$. Our method establishes that when the following conditions are satisfied on day n , the system will move to long positions that will be taken next business day for the opening price. That is:

$$ADI_N^+(n) > ADI_N^-(n) \wedge ADX_N(n-1) < ADX_N(n) \quad (11)$$

Condition (11) means that the $ADX_N(n)$ crosses to the $ADI_N^+(n)$ signal while $ADX_N(n)$ has a positive slope as shown in Fig. 2. Otherwise, when:

$$ADI_N^-(n) < ADI_N^-(n) \wedge ADX_N(n-1) < ADX_N(n) \quad (12)$$

the system changes positions, cancelling long positions and opening short positions. Fig. 3 shows this second condition graphically.

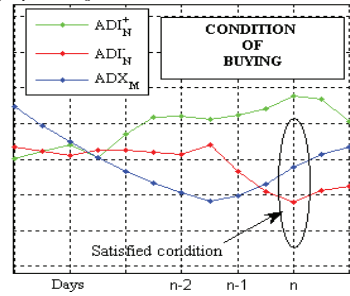


Figure 2 Combination of signals to take long positions

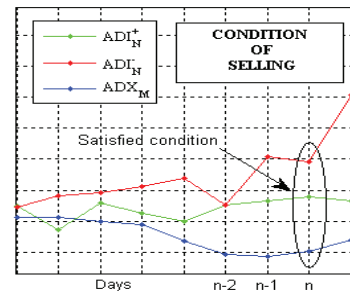


Figure 3 Combination of signals to take short positions

B. Method 2. The proposed method.

The proposed method is based on only three very simple signals. A moving average signal $M_M(n)$ that averages M points.

$$M_M(n) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} c(n-i) \quad (16)$$

And two signals we have called $PE_P^+(n)$ and $PE_P^-(n)$. The first one, $PE_P^+(n)$, takes the maximum value within a set of P consecutive lowest day prices. That is:

$$PE_P^+(n) = \max\{l(n), \dots, l(n-P+1)\} \quad (14)$$

The other signal, takes the minimum value within a set of P consecutive highest day prices.

$$PE_P^-(n) = \min\{h(n), \dots, h(n-P+1)\} \quad (15)$$

The buying and selling decisions are based on the crosses of these lines. The system cancels short positions (if there were any) and opens long positions if $PE_P^+(n)$ crosses $M_M(n)$ going up, while $PE_P^+(n)$ has a positive slope, as shown in Fig.4. This happens when:

$$PE_P^+(n) > PE_P^+(n-1) \wedge PE_P^+(n) > M_M(n) \quad (16)$$

However, when $PE_P^-(n)$ crosses $M_M(n)$ going down, $PE_P^-(n)$ has a negative slope:

$$PE_P^-(n) < PE_P^-(n-1) \wedge PE_P^-(n) < M_M(n) \quad (17)$$

then the system changes long positions to short positions see Fig.5. This system always remains in the market, taking short or long positions on the asset of interest. Fig.4. shows graphically the point at which a buy order is generated, and Fig. 5, shows a sell order.

For all the experiments to be easily reproducible and independent of the market access-time a daily operating procedure common to all experiments was established, whereby, after the close of the interest market, the system automatically updates the data and, changes long positions for short positions or vice versa if a signal is produced. This change is performed on the next active day, always at the opening price. The experiments only use known data; that is, data from the past. Once the system is in the market it remains inside, and only commutes in terms of short or long positions following the combination of signals as described in the both methods. To compare the system's behaviour with different stocks or assets we established a period of days in which the system would remain in the market. Once this period was reached we computed the profits (or losses) of this period. We used this parameter -the global benefits given a number of days in the market- to test and compare the systems.

C. Calculating the benefits

The benefits are measured as a percentage. Sometimes we distinguish between long and short benefits depending on whether they are produced from a long or short operation.

The benefit of the long operation indexed by index i is computed as:

$$B_L(i) = \frac{P_c(i) - P_o(i)}{P_o(i)} \times 100 \quad (18)$$

where $P_o(i)$ is the price at which the operation begins and $P_c(i)$, is the price at which the operation is finished. Similarly, the benefit of the short operation indexed by index j is computed as:

$$B_S(j) = -\frac{P_c(j) - P_o(j)}{P_o(j)} \times 100 \quad (19)$$

Therefore, the total benefits inside the period of activity will be:

$$B_T = \sum_i B_L(i) + \sum_j B_S(j) \quad (20)$$

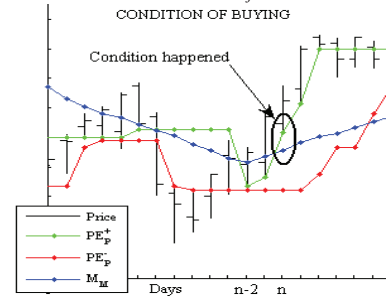


Figure 4 Combination of signals to take long positions

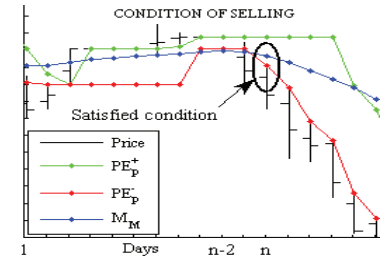


Figure 5 Combination of signals to take short positions

III. OVERVIEW OF THE WEB-BASED SYSTEM

This application was developed with Matlab because this software offers a lot of facilities for testing new algorithms quickly and visualizing the results. With Matlab it is also easy to implement functions for mining web information. In our case, we extracted the free information from the finance section of Yahoo and Google. As we stated above, the application starts once the markets of interest are closed, the series of day prices are automatically updated and, after the signals are computed, the new orders to be applied the next day are presented, always at the opening market price. With our application it is possible to visualize the generation of the signals and the orders day by day. Therefore, it is possible to see in which cases the system fails and provides and gain an idea of how to improve strategies. Initially the application was developed to work with the stock values of the IBEX35.

IV. SIMULATIONS AND EXPERIMENTS

In the following simulations we compare the performance of the two day-trading methods as follows: we always considered blocks of 200 consecutive days of activity in a given market. The choice of the number 200 is arbitrary; however, we chose this number of days because it is nearly a year. Then, we selected the price series of the financial asset we would use in the method under evaluation. After 200 days of activity we computed the total benefits/losses obtained from the long and short positions taken and we finished the experiment. We began with the first day of activity of the year 2000, as that was the first day of the first block to be completed until 200 consecutive prices were reached. The second block started on the second day of activity of 2000 and also included 200 consecutive days of market activity. We proceeded in the same way until we completed the last block of 200 consecutive prices that ended at the present. Beginning in the year 2000, for a given financial asset, we can process nearly 2000 blocks of 200 days. To present the results visually we plotted the histograms of the benefits obtained in those 200 days together with their mean. The histogram provides the maximum profits and losses. Thus, comparing histogram areas provides an approximation of the probabilities of a certain occurrence.

A. Simulation 1

Fig. 6 represents the histogram of the benefits/losses resulting from applying the first method based on ADX to Santander stock prices. In this case we worked with a configuration of $N=14$ for both the ADI and ADX signals defined in (8), (9) and (10). The value $N=14$ was recommended by Wilder [4]. Fig. 6 shows the histogram of the total benefits on the left, the histogram of benefits only due to the long operations in the centre, and the histogram of the benefits only due to the short operations on the right. The mean of these histograms is represented with a red line. The zero is represented with a black line with a circle on top. The means, which could be seen as an approximation of the profit expectations, take the values 10.39, 11.78 and -1.39 respectively. Fig. 7 shows the histograms obtained from the same Santander prices but now when the second method is applied. In this case we set the parameters $P=19$ and $M_c=M_s=6$. Now, the medians take values of 19.35, 16.92 and 2.42 for the total benefits, the long operation benefits and the short operation benefits respectively. It can be seen that our method improves the results of the first method. In Fig. 8 we represent the total profits obtained as a function of time, so that the longitudinal axis begins with the first 200 day block analyzed and finishes with the block of 200 days that ends in the present. Note the strong dependency of benefits on the moment of acting in the market and its discrete nature. The day the simulation begins on can strongly affect the resulting profits.

B. Simulation 2

For the same Santander data, next experiment determines the best combination of parameters for providing the best mean 200-day total benefits. This simulation was carried out for

both methods. The results are presented in the profit histograms in Fig. 9 for method 1 and in Fig. 10 for method 2. The combination of parameters in method 1 that maximizes the mean is $N=27$ for the ADX and $N=3$ for the ADI. The mean reaches a value of 19.35 and the standard deviation is 31.75. The combination of parameters in our method that maximizes the mean is $P=27$, $M_c=6$ and $M_s=3$. The mean of the 200 day benefits is 22.16 and we have a standard deviation of 30.73. The presented method also outperforms the one based on the ADX. In Tables I and II we summarize the results obtained for these methods when they are applied to different IBEX-35 stocks. In these tables B_{Tmin} , B_{Tmax} , B_S , B_L and B_T are the maximum losses, maximum benefits, and the means of the short, long and total benefits reached in the simulation. The rest of the parameters are those that maximize the benefit means for each method.

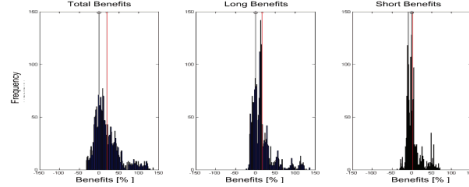


Figure 6 Histograms of the profits obtained with the ADX based method with $N=14$ On the left, total profits; centre, profits from long operations; right, profits from short operations

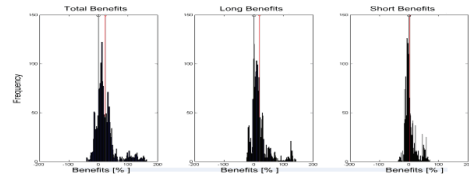


Figure 7 Histograms of the profits obtained using our own method with parameters $P=19$, $M_c=6$ and $M_s=6$ On the left, total profits; centre, profits from long operations; right, profits from short operations

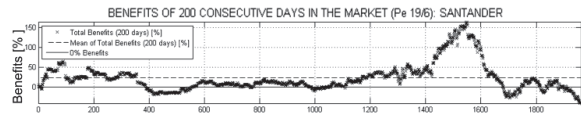


Figure 8 Evolution of 200-day profits over time The discontinuous line represents the mean

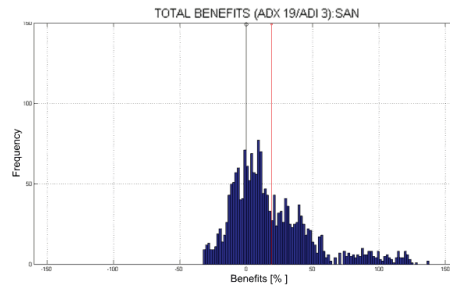


Figure 9 Histograms of the profits obtained using method 1 with parameters the ADX ($N=27$) and ADI($N=3$) parameters which that maximizes its performance

TABLE I

Indicator ADX. 200-day market. Indicator with better parameters for each value.							
Ticker	Parameters		Max and Min		Average of the balances		
	AD_{IN}	AD_{XM}	B_{Tmin}	B_{Tmax}	B_S	B_L	B_T
ABE	33	11	-2094.4	2134.08	-105.78	78.90	-26.89
ABG	6	9	-60.16	131.18	4.67	19.80	24.47
ACS	6	28	-35.20	51.66	-0.29	12.27	11.97
ACX	15	24	-25.50	412.33	3.71	36.94	40.65
AMS	26	25	16.13	37.13	10.00	15.09	25.09
ANA	27	12	-44.45	90.20	4.83	13.45	18.28
BBVA	9	17	-56.85	1724.41	1.16	102.73	103.89
BKT	13	19	-50.44	455.17	6.86	48.14	55.01
BME	7	28	-6.22	85.62	12.87	14.74	27.62
CRI	6	6	-11.02	80.83	9.43	18.32	27.75
EBRO	33	33	-38.69	57.88	-0.01	6.99	6.97
ELE	6	22	-40.05	76.30	2.73	9.82	12.55
ENG	32	19	-34.33	39.10	-0.80	8.44	7.64
FCC	7	19	-31.69	72.71	8.23	12.65	20.88
FER	32	14	-45.93	201.84	5.51	16.21	21.73
GAM	11	20	-63.74	153.00	8.08	9.54	17.63
GAS	22	24	-34.21	211.81	4.22	15.66	19.88
GRF	17	31	-35.16	103.59	5.78	14.63	20.41
IAG	22	33	-42.65	133.24	2.49	13.98	16.48
IBE	14	29	-42.32	368.61	1.36	36.71	38.07
IBR	28	10	-32.99	71.01	5.95	1.01	6.96
IDR	6	13	-27.16	66.91	4.50	10.33	14.84
ITX	6	8	-43.86	73.97	-0.56	11.19	10.63
MAP	6	9	-74.86	431.14	-3.32	35.28	31.96
OHL	20	28	-51.52	205.55	3.53	25.84	29.37
POP	22	13	-49.89	495.56	4.52	30.35	34.86
REE	6	29	-33.33	51.94	0.75	14.36	15.11
REP	8	23	-32.31	56.87	3.51	7.21	10.72
SAB	17	27	-13.91	60.49	16.98	8.55	25.53
SAN	15	27	-52.14	122.37	0.52	12.47	12.99
SYV	12	21	-18.10	113.76	14.56	22.09	36.65
TEF	18	26	-29.95	65.12	3.21	4.47	7.68
TL5	6	30	-21.85	128.18	11.22	13.43	24.65
TRE	22	23	-28.01	114.58	8.98	25.52	34.50

TABLE II

Indicator PE. 200-day market. Indicator with better parameters for each value.								
Ticker	Parameters			Max and Min		Average of the balances		
	P	M_c	M_f	B_{Tmin}	B_{Tmax}	B_S	B_L	B_T
ABE	3	2	14	-337.13	3635.62	-20.84	222.60	201.76
ABG	7	1	5	-46.90	146.50	7.39	23.19	30.58
ACS	35	6	5	-21.09	42.55	-0.96	12.15	11.18
ACX	3	2	5	-32.83	339.04	4.10	42.17	46.27
AMS	3	3	6	1.33	18.88	-1.41	9.56	8.15
ANA	6	4	6	-76.17	100.73	2.05	13.98	16.04
BBVA	5	3	9	-82.854	1641.6	1.8519	119.28	121.13
BKT	32	4	5	-28.40	405.50	4.41	44.16	48.57
BME	7	8	5	-24.44	84.30	14.14	16.56	30.70
CRI	3	4	5	-19.46	92.61	8.83	18.20	27.03
EBRO	3	8	10	-28.30	73.05	-1.13	9.93	8.80
ELE	4	2	7	-28.90	78.29	4.87	13.00	17.86
ENG	8	6	18	-31.39	59.03	-0.20	13.33	13.13
FCC	35	5	2	-48.37	59.94	2.46	6.42	8.88
FER	35	2	9	-57.76	254.42	7.08	20.73	27.82
GAM	3	7	5	-30.95	156.35	12.50	12.02	24.52
GAS	5	5	2	-40.31	284.61	3.45	19.81	23.26
GRF	5	1	8	-27.13	94.98	9.62	21.94	31.57
IAG	3	2	3	-60.86	137.70	3.12	20.61	23.73
IBE	8	4	3	-42.54	391.44	-0.23	46.71	46.48
IBR	3	4	7	-37.71	81.17	7.54	-0.39	7.15
IDR	7	3	7	-32.30	70.45	1.69	7.89	9.58
ITX	3	2	8	-64.75	62.92	-0.18	12.41	12.23
MAP	16	18	1	-88.09	440.33	-2.91	37.88	34.98
OHL	23	6	10	-35.46	191.29	5.82	31.70	37.52
POP	3	2	1	-50.72	402.20	4.93	15.67	20.61
REE	4	3	7	-30.65	52.94	0.65	17.62	18.27
REP	32	4	1	-26.21	37.96	0.07	4.12	4.19
SAB	10	5	5	-22.21	79.69	21.44	11.47	32.91
SAN	27	6	3	-31.98	150.70	3.56	18.60	22.16
SYV	11	6	1	-59.34	122.06	15.78	24.55	40.33
TEF	4	5	1	-37.837	77.918	2.387	4.602	6.99
TL5	3	8	6	-53.09	120.93	10.43	12.78	23.21
TRE	28	2	5	-32.20	122.31	8.35	27.80	36.15

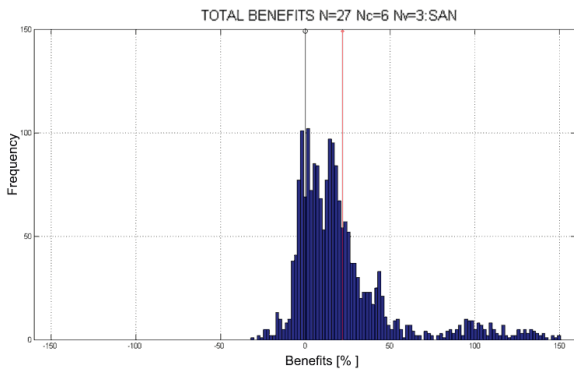


Figure 10 Histograms of the profits obtained using ourthe own method with the parametes P=27, Mc=6 and Mv=3 parameters which that maximizes its performance

C. Simulation 3

Finally, two more simulations were carried out with the Santander prices with the two methods. In this case we used a part of the data corresponding to the period that begins on 01-01-2003 and finishes on 07-10-2003 in order to determine the combination of parameters that maximizes the 200-day mean benefits. Then, the remaining data was processed with these parameters. The results are summarized in Fig.11 and Fig. 12. In the right graphic of these figures, it can be seen that the performance of the methods decreases. In the ADX method the 200 day benefits in the second part of the experiment are practically zero, while in our method the mean decreases to 13.78, remaining positive, and the standard deviation increases to 68.04. .

I. CONCLUSIONS

We have developed an application which can obtain any series of day prices for any financial asset in the world from a free provider. Using this application we evaluated two day-trading strategies. One method is widely reported in the literature and is commonly accepted as a good trading method, the second method is proposed by the authors. Benefit histograms were used to evaluate the performance of the methods. In this article we verify that the application strategies based on signals can obtain positive benefit expectations and positive means, but at the price of having large standard deviations. These methods can produce large benefits in only a few days but they can also lead to large losses. In the last experiments presented in Fig. 10 and Fig. 11 we show that past benefits don't guarantee future benefits. In agreement with Mandelbrot, Figure 9 shows that the benefits are discontinuous functions that depend strongly on time. Our simple method is more robust and outperforms the first method in many scenarios. However, we can obtain directives from the results to further improve our system. If the system is improved, its practical application can be considered. For example, in order to develop a practical system that minimizes risk we need to improve the signals

that guide the choice of short positions. We also need to determine a way of decreasing the losses in order to protect the investor's money. Moreover, it would be interesting to investigate a way of adapting the parameters to different market conditions. All these modifications can be validated or invalidated using simulations with statistical criteria.

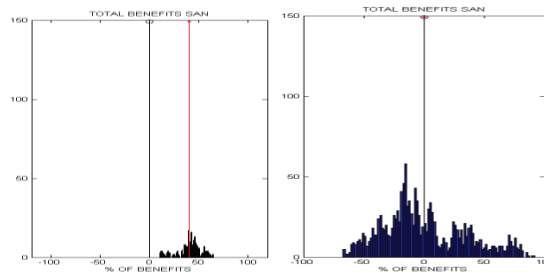


Figure 11 Histograms of the profits obtained using the ADX method On the left using the values ADX(10) and ADI(26) values that maximizes the mean of benefits of a set of data set and, With these values we have applied the method to the data remaining data, represented on theat right

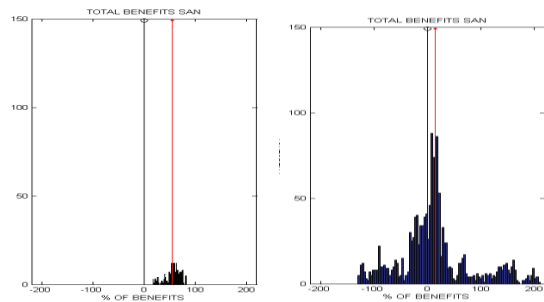


Figure 12 Histograms of the profits obtained using the own method On the left using the values N=4, Nc=4, Nv=10, whichthat maximizes the mean of benefits on a set of data and, with those values we have applied the method to the data remaining, represented on theat right

ACKNOWLEDGMENT

This work is partially supported by UVic under grant R0904.

REFERENCES

- [1] B Mandelbrot and W H Freeman The Fractal Geometry of Nature, & Co, 1982; ISBN 0716711869
- [2] H L Richard and B Mandelbrot The (Mis)Behavior of Markets: A Fractal View of Risk, Ruin, and Reward New York: Basic Books, 2004; ISBN 0-465-04355-0
- [3] B Mandelbrot, N Taleb "A focus on the exceptions that prove the rule" Financial Times Retrieved 2010-10-17
- [4] J W Wilder, New Concepts in Technical Trading Systems Greensboro, NC: Trend Research, 1978 ISBN 978-0894590276
- [5] J L Cava, El Arte de especular Las técnicas que mejor funcionan Eds M A Cava, Madrid, 2006; ISBN 84-611-1763-8
- [6] L Ortiz de Zárate Técnicas relevantes para la especulación en los mercados financieros El método menos es más Printed in Spain 2009 ISBN 978-84-613-0449-3

Anexo E.2: Application for back-testing day Trading strategies

Application for back-testing day trading strategies

Ricardo Rivera-Peruyero¹, Pere Marti-Puig²

¹ Dept. of Digital Information Technologies University of Vic (UVic),
08500 Vic (Barcelona), Spain
juanricardo.rivera@uvic.cat

² Dept. of Digital Information Technologies University of Vic (UVic),
08500 Vic (Barcelona), Spain
pere.marti@uvic.cat

Abstract: An application was developed to mine the prices of financial assets from free web information providers. The mined data are used for evaluating and back-testing day trading strategies in order to provide information and references to small investors who often only observe the market once it is closed. This application is written in Matlab, as this language can be used to performing intensive mathematical calculations to determine the best combination of parameters in the algorithms. This work evaluates two simple speculation methods in terms of the mean losses and benefits they produce under different market conditions, after 200 days of activity. Both methods need certain parameters to be adjusted, whose influence on profits is difficult to observe without these tools. We also explored combining these strategies with the use of stop-losses or stop-profits. The results are presented as histograms of benefits. One of the methods is widely known while the other is proposed by the authors. The results relate to stocks of the Spanish IBEX-35.

Keywords: automatic trading systems, data mining, day trading strategies, speculation systems.

I. Introduction

In this work we present an application that can obtain any series of day prices of any financial asset for the purpose of back-testing day-trading operation methods. The application is designed to study the methods used by small investors to operate on the stock market since, small investors often use strategies that offer few guarantees. The application is also useful for developing and adapting new strategies. The methods in which we are interested are formulated by algorithms that clearly specify all the actions to be taken. They make investment decisions independently of emotional aspects, because the strategy is governed by a set of defined rules. Obtaining a good trading algorithm is quite complicated, some approaches can be seen in [1][2]. What we have observed is that a strategy may obtain great results during a certain period of time, but, may go terribly wrong in another time. Moreover, the reason behind this disparity in the results are often not clear.

Beyond the great difficulties involved in predicting market movements and in accordance with Mandelbrot [3], who stated 'Many economic theories have more pseudoscience than science, and anyone who claims to have a method to easily win in the stock market has the same reliability as an astrologer', in this work we have developed a web-based system for evaluating two simple trading strategies that avoid models. One of these strategies is proposed by the authors [4] while the other is a popular method that has been recommended by several authors [5][6]. These methods are based on simple and mostly non-linear operations on the price series to produce signals of buying or selling. In the day trading literature and on the Internet we can find many methods that fulfill the requirements and often their users/authors state that they perform well. The web-based application is programmed with Matlab. As we understand the limitations described by Mandelbrot and others involved in obtaining a system that easily wins in the stock markets, we need to verify if really obtains (or not) recurrent benefits.

This paper is organized as follows. In part II we present the kind of algorithms and strategies in which we are interested as well as the framework in which we observe the markets. In part III we present the two strategies under evaluation. In part IV we briefly describe the web-based system. In part V we present some simulations and the results of the analysis of the two methods. In part VI we perform new simulations including different modes to combine these methods with the use of stop loss orders, a strategy that is frequently recommended by trading professionals. Finally, section VII compiles some conclusions.

II. Strategies of interests and framework

The algorithms in which we are interested are those that do not assume any model to predict the financial asset behavior as, for example, any future evolution of price, volatility or risk. We evaluate and explore techniques based on computing

signals from the available series of prices and taking advantage of some patterns that those signals could exhibit in order to automatically generate orders of buying or selling. In some way we could say that we work with empirical methods trying to discover some operation rules that work in practice. To analyze, model or develop the method of generating signals we use different signal processing tools, like linear, non-linear and adaptive filters, but we avoid the uses of models trying to describe the behavior of prices. Moreover, the reason of avoiding complicated models that do not work properly well, is the nature of the financial data. Even nowadays the models widely used in financial asset management are based on certain hypotheses that have been proven wrong; therefore, the predictions of the future evolution of prices, risk or any other financial parameter are quite poor. This is mainly because all the models used assume Gaussian distributions. As far as we know, Benoit Mandelbrot was the first to warn that the statistical distributions used to model the variation in prices are not Gaussian [3][7][8]. He showed that the tails of the probability density functions for real price variation are bigger than the tails of the Gaussian distributions. He showed that the same happens for other kinds of variables, such as, the personal incomes, the market profit, the size of hedge funds, the returns on financial markets, the number of deaths in wars or the number of terrorist victims. Mandelbrot's observation is relevant, because extreme events happen more frequently than Gaussian statistics suggest. This is why Gaussian models have provided incorrect risk perceptions, however, the classical models used to calculate the prices of financial assets (loans, bonds, stocks, insurance policies, derivative products, etc.) are based on Gaussian distributions. This is the reason, Mandelbrot strongly criticizes the theoretical foundations of the Black-Scholes model, which was the model used by banks. He presented numerous cases in which reality contradicts theoretical expectations. In addition, Mandelbrot notes that the models used are unable to prevent disasters like the recent economic crisis or help reach more modest goals, such as securing profits in stable periods or correctly predicting market risk. He said that, according to Gaussian models the 1987 stock market crash was something that could only happen once in several billion years. Mandelbrot raised two more important fundamental questions about price series. The first question whether the current models consider the random discontinuities or jump what occurs in prices, benefits or other financial variables. The second question whether the prices follow a fractal pattern, that is, whatever the time scale of observation, the appearance of prices is always the same. In the day trading literature and on the Internet we can find many methods that fulfill the requirements selected for our algorithms and often their users/authors state that they perform well. Some of those methods have been analyzed [5][6][9].

III. Day-trading strategies under evaluation

We examined two simple day trading strategies. If the asset price is expected to rise then the system adopts long positions stock values and if they are expected to fall then short positions are adopted. Platforms that operate with CFD (Contracts for Differences) provide this functionality. The first one is based on the directional movement indicator

(ADX) developed by Wilder [9]. We selected this method because in [5][6] it is classified as one of the best trading methods. The second method is our own method. These methods work with just four representative financial asset prices that are determined each business day. That is, for the day indexed with n we only take the price at opening, $o(n)$, the highest price reached, $h(n)$, the lowest price reached, $l(n)$, and the price at closing, $c(n)$, see Fig. 1.

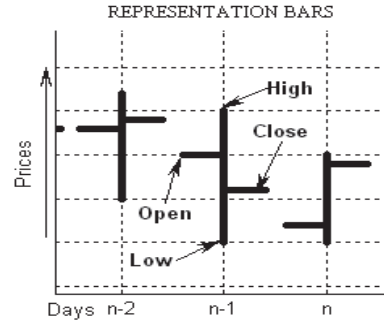


Figure 1. Representation of the four price values considered at days $n-2$, $n-1$ and n . These prices are at the opening (o), the lowest (l), the highest (h) and the closing (c).

A. Method 1 (based on ADX)

Before defining the ADX, we need to present some signals. In accordance with [9] and using a similar nomenclature, the directional movement of day n , $DM(n)$, is defined with the next two signals $DM^+(n)$ and $DM^-(n)$. Being:

$$M_h(n) = h(n) - h(n-1) \quad (1)$$

$$M_l(n) = l(n-1) - l(n) \quad (2)$$

Then,

$$DM^+(n) = \begin{cases} M_h(n) & \text{if } M_h(n) > 0 \wedge M_h(n) > M_l(n) \\ 0 & \text{if not} \end{cases} \quad (3)$$

And

$$DM^-(n) = \begin{cases} M_l(n) & \text{if } M_l(n) > 0 \wedge M_h(n) < M_l(n) \\ 0 & \text{if not} \end{cases} \quad (4)$$

where $h(n)$ and $l(n)$ are the highest and lower prices on day n respectively and symbol \wedge stands for the logical AND. To continue, the true range on day n , $TR(n)$, is defined as:

$$TR(n) = \max\{h(n) - l(n), |h(n) - c(n-1)|, |c(n-1) - l(n)|\} \quad (5)$$

The operator $||$ represents the absolute value.

Wilder observes that $TR(n)$ expands and contracts with the volatility of prices, and states that it is a measure of the maximum fluctuation that the price of a given asset undergoes in a day. Using the true range he defines the directional indicator $DI^+(n)$ as:

$$DI^+(n) = DM^+(n)/TR(n) \quad (6)$$

and directional indicator $DI^-(n)$ as:

$$DI^-(n) = DM^-(n)/TR(n) \quad (7)$$

The average directional indicators are obtained by averaging the last two signals. Considering N is the number of days used to compute them, the signal $ADI_N^+(n)$ is:

$$ADI_N^+(n) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} DI^+(n-i)}{\sum_{i=0}^{N-1} TR(n-i)} \quad (8)$$

and the signal $ADI_N^-(n)$:

$$ADI_N^-(n) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} DI^-(n-i)}{\sum_{i=0}^{N-1} TR(n-i)} \quad (9)$$

Finally, Wilder defines the average directional movement index as:

$$ADX_N(n) = \frac{|ADI_N^+(n) - ADI_N^-(n)|}{ADI_N^+(n) + ADI_N^-(n)} \times 100 \quad (10)$$

The higher the value of this ratio, the stronger the directional movement is, and, Wilde interprets this as showing more pronounced trend for the price sequence. The $ADX_N(n)$ does not provide information on the trend direction; it only provides information on its strength. There are different ways of taking advantage of the $ADX_N(n)$.

Our method establishes that when the following conditions are satisfied on day n , the system will move to long positions that will be taken next business day for the opening price. That is:

$$ADI_N^+(n) > ADI_N^-(n) \wedge ADX_N(n-1) < ADX_N(n) \quad (11)$$

Condition (11) means that the $ADX_N(n)$ crosses to the $ADI_N^+(n)$ signal while $ADX_N(n)$ has a positive slope as shown in Fig. 2.

Otherwise, when:

$$ADI_N^+(n) < ADI_N^-(n) \wedge ADX_N(n-1) < ADX_N(n), \quad (12)$$

the system changes positions, canceling long positions and opening short positions. Fig. 3 shows this second condition graphically.

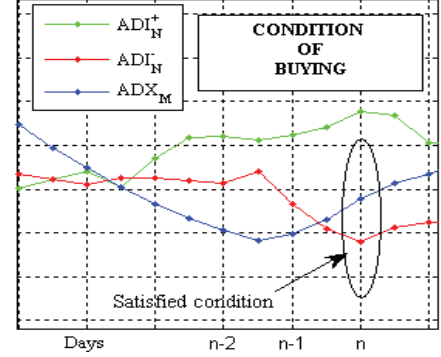


Figure 2. Combination of signals to take long positions

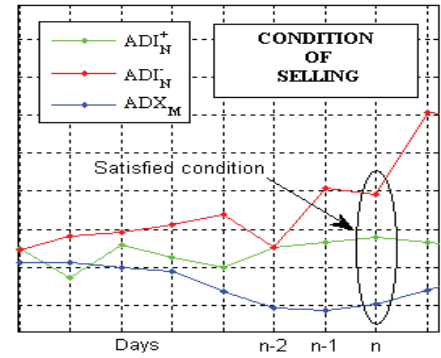


Figure 3. Combination of signals to take short positions

B. Method 2. The proposed method.

The proposed method is based on only three very simple signals. A moving average signal $M_M(n)$ that averages M points.

$$M_M(n) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} c(n-i) \quad (16)$$

And two signals we have called $PE_P^+(n)$ and $PE_P^-(n)$. The first one, $PE_P^+(n)$, takes the maximum value within a set of P consecutive lowest day prices. That is:

$$PE_P^+(n) = \max\{l(n), \dots, l(n-P+1)\} \quad (14)$$

The other signal, takes the minimum value within a set of P consecutive highest day prices.

$$PE_P^-(n) = \min\{h(n), \dots, h(n-P+1)\} \quad (15)$$

The buying and selling decisions are based on the crosses of these lines. The system cancels short positions (if there were

any) and opens long positions if $PE_P^+(n)$ crosses $M_M(n)$ going up, while $PE_P^+(n)$ has a positive slope, as shown in Fig.4. This happens when:

$$PE_P^+(n) > PE_P^+(n-1) \wedge PE_P^+(n) > M_M(n) \quad (16)$$

However, when $PE_P^-(n)$ crosses $M_M(n)$ going down, $PE_P^+(n)$ has a negative slope:

$$PE_P^-(n) < PE_P^-(n-1) \wedge PE_P^-(n) < M_M(n) \quad , \quad (17)$$

then the system changes long positions to short positions; see Fig.5. This system always remains in the market, taking short or long positions on the asset of interest. Fig.4. shows graphically the point at which a buy order is generated, and Fig. 5, shows a sell order.

C. Operating rules established for all experiments

For all the experiments to be easily reproducible and independent of the market access-time a daily operating procedure common to all experiments was established, whereby, after the close of the interest market, the system automatically updates the data and, changes long positions for short positions or vice versa if a signal is produced. This change is performed on the next active day, always at the opening price. The experiments only use known data; that is, data from the past. Once the system is in the market it remains inside, and only commutes in terms of short or long positions following the combination of signals as described in the both methods. To compare the system's behavior with different stocks or assets we established a period of days in which the system would remain in the market. Once this period was reached we computed the profits (or losses) of this period. We used this parameter -the global benefits given a number of days in the market- to test and compare the systems.

D. Calculating the benefits

The benefits are measured as a percentage. Sometimes we distinguish between long and short benefits depending on whether they are produced from a long or short operation. The benefit of the long operation indexed by index i is computed as:

$$B_L(i) = \frac{P_c(i) - P_o(i)}{P_o(i)} \times 100 \quad (18)$$

where $P_o(i)$ is the price at which the operation begins and $P_c(i)$, is the price at which the operation is finished. Similarly, the benefit of the short operation indexed by index j is computed as:

$$B_S(j) = -\frac{P_c(j) - P_o(j)}{P_o(j)} \times 100 \quad (19)$$

Therefore, the total benefits inside the period of activity will be:

$$B_T = \sum_i B_L(i) + \sum_j B_S(j) \quad (20)$$

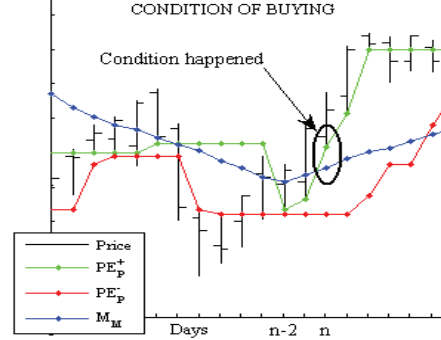


Figure 4. Combination of signals to take long positions.

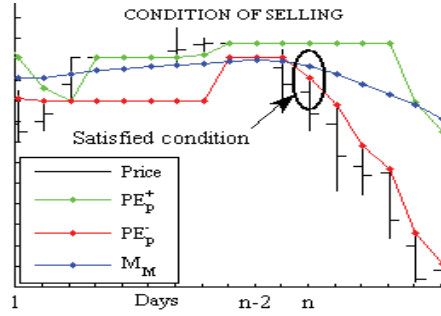


Figure 5. Combination of signals to take short positions

IV. Web-based system overview

This application was developed with Matlab because this software offers a lot of facilities for testing new algorithms quickly and visualizing the results. With Matlab it is also easy to implement functions for mining web information. In our case, we extracted the free information from the finance section of Yahoo and Google. As we stated above, the application starts once the markets of interest are closed, the series of day prices are automatically updated and, after the signals are computed, the new orders to be applied the next day are presented, always at the opening market price. With our application it is possible to visualize the generation of the signals and the orders day by day. Therefore, it is possible to see in which cases the system fails and provides and gain an idea of how to improve strategies. Initially the application was developed to work with the stock values of the IBEX35.

V. Simulations and experiments I

In the following simulations we compare the performance of the two day-trading methods as follows: we always considered

blocks of 200 consecutive days of activity in a given market. The choice of the number 200 is arbitrary; however, we chose this number of days because it is nearly a year. Then, we selected the price series of the financial asset we would use in the method under evaluation. After 200 days of activity we computed the total benefits/losses obtained from the long and short positions taken and we finished the experiment. We began with the first day of activity of the year 2000, as that was the first day of the first block to be completed until 200 consecutive prices were reached. The second block started on the second day of activity of 2000 and also included 200 consecutive days of market activity. We proceeded in the same way until we completed the last block of 200 consecutive prices that ended at the present. Beginning in the year 2000, for a given financial asset, we can process nearly 2000 blocks of 200 days. To present the results visually we plotted the histograms of the benefits obtained in those 200 days together with their mean. The histogram provides the maximum profits and losses. Thus, comparing histogram areas provides an approximation of the probabilities of a certain occurrence.

A. Simulation 1

Fig. 6 represents the histogram of the benefits/losses resulting from applying the first method based on ADX to Santander stock prices. In this case we worked with a configuration of $N=14$ for both the ADI and ADX signals defined in (8), (9) and (10). The value $N=14$ was recommended by Wilder [4]. Fig. 6 shows the histogram of the total benefits on the left, the histogram of benefits only due to the long operations in the centre, and the histogram of the benefits only due to the short operations on the right. The mean of these histograms is represented with a red line. The zero is represented with a black line with a circle on top. The means, which could be seen as an approximation of the profit expectations, take the values 10.39, 11.78 and -1.39 respectively. Fig. 7 shows the histograms obtained from the same Santander prices but now when the second method is applied. In this case we set the parameters $P=19$ and $M_c=M_v=6$. Now, the medians take values of 19.35, 16.92 and 2.42 for the total benefits, the long operation benefits and the short operation benefits respectively. It can be seen that our method improves the results of the first method. In Fig. 8 we represent the total profits obtained as a function of time, so that the longitudinal axis begins with the first 200 day block analyzed and finishes with the block of 200 days that ends in the present. Note the strong dependency of benefits on the moment of acting in the market and its discrete nature. The day the simulation begins on can strongly affect the resulting profits.

B. Simulation 2

For the same Santander data, next experiment determines the best combination of parameters for providing the best mean 200-day total benefits. The best combination has been found with the brute force method. This simulation was carried out for both methods. The results are presented in the profit histograms in Fig. 9 for method 1 and in Fig. 10 for method 2. The combination of parameters in method 1 that maximizes the mean is $N=27$ for the ADX and $N=3$ for the ADI. The mean reaches a value of 19.35 and the standard deviation is 31.75. The combination of parameters in our method that maximizes the mean is $P=27$, $M_c=6$ and $M_v=3$. The mean of the 200 day benefits is 22.16 and we have a standard deviation of 30.73.

The presented method also outperforms the one based on the ADX. In Tables I and II we summarize the results obtained for these methods when they are applied to different IBEX-35 stocks. In these tables B_{Tmin} , B_{Tmax} , B_S , B_L and B_T are the maximum losses, maximum benefits, and the means of the short, long and total benefits reached in the simulation. The rest of the parameters are those that maximize the benefit means for each method.

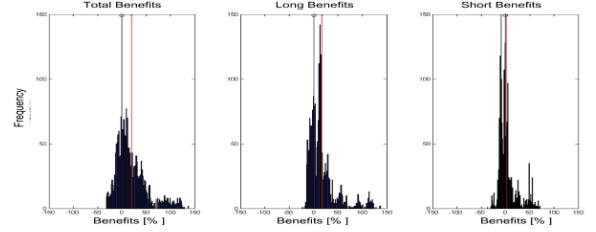


Figure 6. Histograms of the profits obtained with the ADX based method with $N=14$. On the left, total profits; centre, profits from long operations; right, profits from short operations.

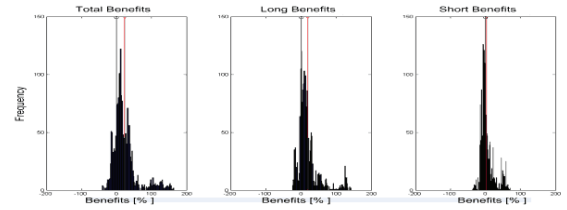


Figure 7. Histograms of the profits obtained using our own method with parameters $P=19$, $M_c=6$ and $M_v=6$. On the left, total profits; centre, profits from long operations; right, profits from short operations.

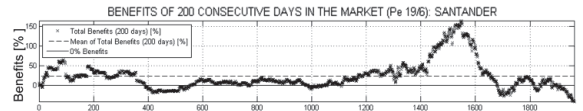


Figure 8. Evolution of 200-day profits over time. The discontinuous line represents the mean.

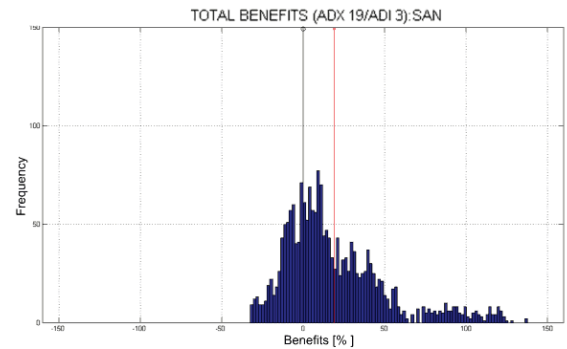


Figure 9. Histograms of the profits obtained using method 1 with parameters the ADX ($N=27$) and ADI ($N=3$) parameters which that maximizes its performance.

Indicator ADX. 200-day market.								
Indicator with better parameters for each value.								
Ticker	Parameters		Max and Min		Average of the balances			
	ADI _N	ADX _M	B _{Tmin}	B _{Tmax}	B _S	B _L	B _T	
ABE	33	11	-2094.4	2134.08	-105.78	78.90	-26.89	
ABG	6	9	-60.16	131.18	4.67	19.80	24.47	
ACS	6	28	-35.20	51.66	-0.29	12.27	11.97	
ACX	15	24	-25.50	412.33	3.71	36.94	40.65	
AMS	26	25	16.13	37.13	10.00	15.09	25.09	
ANA	27	12	-44.45	90.20	4.83	13.45	18.28	
BBVA	9	17	-56.85	1724.41	1.16	102.73	103.89	
BKT	13	19	-50.44	455.17	6.86	48.14	55.01	
BME	7	28	-6.22	85.62	12.87	14.74	27.62	
CRI	6	6	-11.02	80.83	9.43	18.32	27.75	
EBRO	33	33	-38.69	57.88	-0.01	6.99	6.97	
ELE	6	22	-40.05	76.30	2.73	9.82	12.55	
ENG	32	19	-34.33	39.10	-0.80	8.44	7.64	
FCC	7	19	-31.69	72.71	8.23	12.65	20.88	
FER	32	14	-45.93	201.84	5.51	16.21	21.73	
GAM	11	20	-63.74	153.00	8.08	9.54	17.63	
GAS	22	24	-34.21	211.81	4.22	15.66	19.88	
GRF	17	31	-35.16	103.59	5.78	14.63	20.41	
IAG	22	33	-42.65	133.24	2.49	13.98	16.48	
IBE	14	29	-42.32	368.61	1.36	36.71	38.07	
IBR	28	10	-32.99	71.01	5.95	1.01	6.96	
IDR	6	13	-27.16	66.91	4.50	10.33	14.84	
ITX	6	8	-43.86	73.97	-0.56	11.19	10.63	
MAP	6	9	-74.86	431.14	-3.32	35.28	31.96	
OHL	20	28	-51.52	205.55	3.53	25.84	29.37	
POP	22	13	-49.89	495.56	4.52	30.35	34.86	
REE	6	29	-33.33	51.94	0.75	14.36	15.11	
REP	8	23	-32.31	56.87	3.51	7.21	10.72	
SAB	17	27	-13.91	60.49	16.98	8.55	25.53	
SAN	15	27	-52.14	122.37	0.52	12.47	12.99	
SYV	12	21	-18.10	113.76	14.56	22.09	36.65	
TEF	18	26	-29.95	65.12	3.21	4.47	7.68	
TL5	6	30	-21.85	128.18	11.22	13.43	24.65	
TRE	22	23	-28.01	114.58	8.98	25.52	34.50	

Table 1. Set of the best parameters for the ADX method (ADX_M and ADX_N) that maximizes the total of benefits B_T using the stock values of the Spanish IBEX-35. B_{Tmin} , B_{Tmax} , B_S and B_L are the maximum losses, maximum benefits, and the means of the short or long of benefits reached in the simulation.

Indicator PE. 200-day market.								
Indicator with better parameters for each value.								
Ticker	Parameters			Max and Min		Average of the balances		
	P	M_c	M_v	B _{Tmin}	B _{Tmax}	B _S	B _L	B _T
ABE	3	2	14	-337.13	3635.62	-20.84	222.60	201.76
ABG	7	1	5	-46.90	146.50	7.39	23.19	30.58
ACS	35	6	5	-21.09	42.55	-0.96	12.15	11.18
ACX	3	2	5	-32.83	339.04	4.10	42.17	46.27
AMS	3	3	6	1.33	18.88	-1.41	9.56	8.15
ANA	6	4	6	-76.17	100.73	2.05	13.98	16.04
BBVA	5	3	9	-82.854	1641.6	1.8519	119.28	121.13
BKT	32	4	5	-28.40	405.50	4.41	44.16	48.57
BME	7	8	5	-24.44	84.30	14.14	16.56	30.70
CRI	3	4	5	-19.46	92.61	8.83	18.20	27.03
EBRO	3	8	10	-28.30	73.05	-1.13	9.93	8.80
ELE	4	2	7	-28.90	78.29	4.87	13.00	17.86
ENG	8	6	18	-31.39	59.03	-0.20	13.33	13.13
FCC	35	5	2	-48.37	59.94	2.46	6.42	8.88
FER	35	2	9	-57.76	254.42	7.08	20.73	27.82
GAM	3	7	5	-30.95	156.35	12.50	12.02	24.52
GAS	5	5	2	-40.31	284.61	3.45	19.81	23.26
GRF	5	1	8	-27.13	94.98	9.62	21.94	31.57
IAG	3	2	3	-60.86	137.70	3.12	20.61	23.73
IBE	8	4	3	-42.54	391.44	-0.23	46.71	46.48
IBR	3	4	7	-37.71	81.17	7.54	-0.39	7.15
IDR	7	3	7	-32.30	70.45	1.69	7.89	9.58
ITX	3	2	8	-64.75	62.92	-0.18	12.41	12.23
MAP	16	18	1	-88.09	440.33	-2.91	37.88	34.98
OHL	23	6	10	-35.46	191.29	5.82	31.70	37.52
POP	3	2	1	-50.72	402.20	4.93	15.67	20.61
REE	4	3	7	-30.65	52.94	0.65	17.62	18.27
REP	32	4	1	-26.21	37.96	0.07	4.12	4.19
SAB	10	5	5	-22.21	79.69	21.44	11.47	32.91
SAN	27	6	3	-31.98	150.70	3.56	18.60	22.16
SYV	11	6	1	-59.34	122.06	15.78	24.55	40.33
TEF	4	5	1	-37.837	77.918	2.387	4.602	6.99
TL5	3	8	6	-53.09	120.93	10.43	12.78	23.21
TRE	28	2	5	-32.20	122.31	8.35	27.80	36.15

Table 2. Set of the best parameters for the PE method (P , M_c and M_v) that maximizes the total of benefits B_T using the stock values of the Spanish IBEX-35. B_{Tmin} , B_{Tmax} , B_S and B_L are the maximum losses, maximum benefits, and the means of the short and long of benefits reached in the simulation.

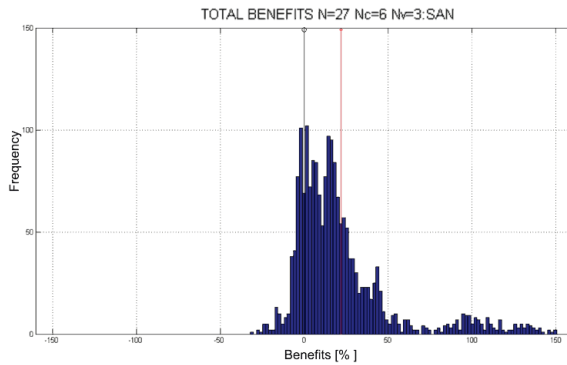


Figure 10. Histograms of the profits obtained using our own method with $P=27$, $M_c=6$ and $M_v=3$; parameters which that maximizes its performance

C. Simulation 3

Finally, two more simulations were carried out with the Santander prices with the two methods. In this case we used a part of the data corresponding to the period that begins on 01-01-2003 and finishes on 07-10-2003 in order to determine the combination of parameters that maximizes the 200-day mean benefits. Then, the remaining data was processed with these parameters. The results are summarized in Fig.11 and Fig. 12. In the right graphic of these figures, it can be seen that the performance of the methods decreases. In the ADX method the 200 day benefits in the second part of the experiment are practically zero, while in our method the mean decreases to 13.78, remaining positive, and the standard deviation increases to 68.04.

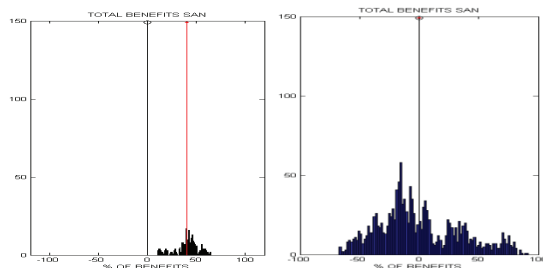


Figure 11. Histograms of the profits obtained using the ADX method. On the left using the values $ADX(10)$ and $ADI(26)$ values that maximizes the mean of benefits of a set of data set. and, With those values we have applied the method to the data remaining data, represented on the right.

VI. Simulations and experiments II

Normally, experts recommend protecting money using stop loss orders. In this set of experiments we analyze the behavior of the methods described above when they work together with stop loss orders. To do this, first we perform experiments with different levels of stop losses to show the importance of choosing a suitable stop loss level and how this choice influences the mean and the standard deviation in the histogram profits. Then we apply dynamic stop losses in order to determine the best way of applying them. Similar experiments can be carried out to stop profits.

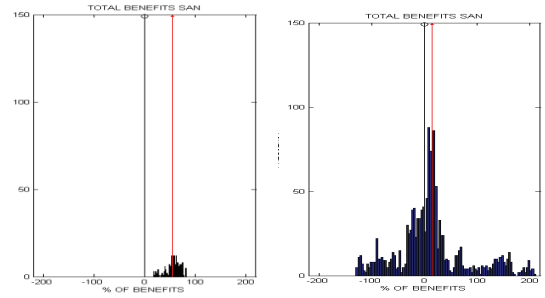


Figure 12. Histograms of the profits obtained using our own method. On the left using the values $N=4$, $N_c=4$, $N_v=10$, which maximize the mean benefits of a data set and on the right, with the values we have applied the method to the remaining data.

A. Stop-losses and stop-profits

A stop loss order is a buying or selling order sent to the market only if a condition on the price, previously established by the user, is satisfied. As the name suggests, they are used by the market actors in an attempt to limit their losses in both short and long operations. That is, if in a transaction they incur losses and these losses exceed the established limit, by means of the stop-loss order, the operation is closed and the losses established by that order are assumed by the actor. The basic idea is that when a stock or an index is falling, it might continue to fall. In order to be protected against unlimited losses, a market actor may choose to close the position after having incurred a certain loss and enter again at a later time. Figure 13 shows the evolution of the profits as a percentage so that when the losses reach the established limit the position is closed in order to avoid bigger losses.

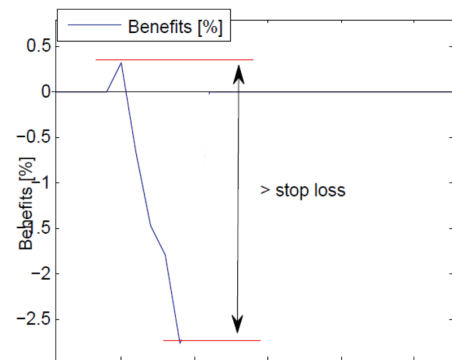


Figure 13. Benefits as a percentage and stop loss margins

On the other hand, the stop-profit orders limit the benefits in the same way that stop-losses limit losses. Before introducing an order into the market, a maximum level of profit is established, so that, if these benefits are reached the operation is closed. Such stops have the disadvantage that the market actors can lose much of the movement of prices because they may leave the market too early. To solve this problem, it has been suggested to use dynamic stop losses. A dynamic stop-loss strategy increases the stop-loss trigger over time when the stock price increases. For example, the

stop-loss trigger could be relative to the peak of the index since we bought it. The dynamic stop-loss consolidates part of the benefits but tries to follow the movement of prices in the direction of benefits, so that the level of the stop loss is recalculated each operation period, which in our case, is one day. Acting in this way the intention is to take advantage of all the movement while protecting the benefits from sudden variations in the opposite direction. In Figure 14 we can see how a dynamic stop loss works in terms of the benefits that are represented as a percentage. The level of stop-loss is determined at the time of buying and we can see that at the first time the operation in Figure 12 incurs losses that do not exceed the stop level. Note that, in this case, the level of this stop can only be incremented when the prices are consolidated. Then some price fluctuations can be supported until a big one causes that the price to reach the stop level and closes the ongoing operation.

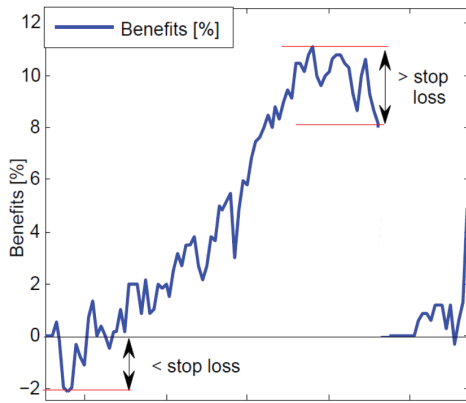


Figure 14. Benefits as a percentage and dynamic stop loss margins

For the following simulations we have worked with the values from Santander considering 200 consecutive days of market activity. We call these 200 days a bloc. We begin with the first activity day of the year 2000 and we form the first bloc, then we consider the second year of activity of that year to form the second bloc and so on. We have analyzed a total of 1967 blocs.

B. Combining the ADX method with stop losses and stop profits

1) Simulation 1

In this case we worked with a configuration of $N=14$ for both the ADI and ADX signals defined in (8), (9) and (10), but now we work with a stop loss of 13% and 20% for both long and short positions respectively. The simulation results are shown in Figure 15 by means of a histogram of the benefits obtained of all the blocs analyzed. We can see, represented with a red line, that the mean of benefits is 17.42% while its standard deviation is 27.6%. Other simulation results obtained with different ADX parameters and different levels of stop losses are summarized in table 3.

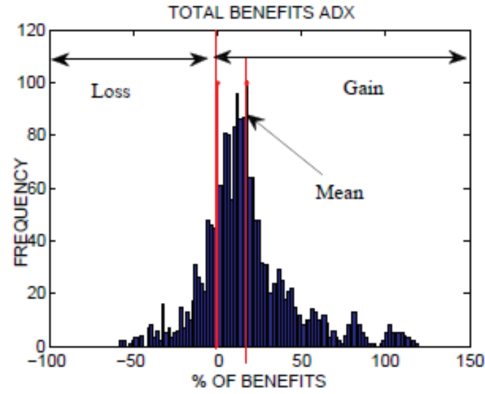


Figure 15. Histograms of the profits obtained using method 1 with parameters the ADX ($N=14$) and ADI($N=14$) and using stop loss levels of 13% and 20% for long and short operations respectively.

2) Simulation 2

In this case we maintain the same configuration of $N=14$ for both the ADI and ADX signals and we work with a dynamic stop loss of 1% for both long and short positions. The simulation results are shown in Figure 16 in form of a histogram of the benefits. In the same way that in Figure 17 we use a red line to show the mean of benefits, now of 3.17% (and a standard deviation of 8.17%). Other simulation results obtained with different ADX parameters are also summarized in table 3.

Comparing the results of these two experiments we can clearly see that low percentages for the stop loss levels cause the mean of the profits to decrease considerably, also decreasing our expectation of obtaining benefits. At the same time the standard deviation is also reduced, which means that the results will be closest to the mean and thus the uncertainty is reduced.

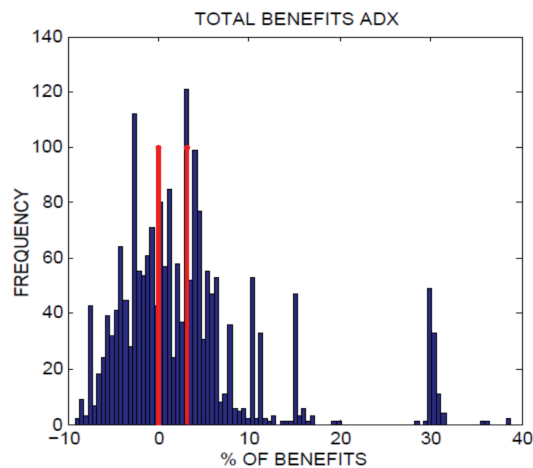


Figure 16. Histogram of the profits obtained using method 1 with parameters the ADX ($N=14$) and ADI($N=14$) and using a dynamic stop loss level of 1% for both long and short operations.

Parameters		Stop-Loss[%]		Mean	Standard deviations
AD _{I_N}	AD _{X_M}	short	long		
14	14	∞	∞	18.05	29.09
14	14	13	20	17.42	27.60
14	14	1	1	3.17	8.17
19	3	1	1	4.11	8.95
19	3	8	8	5.02	20.7

Table 3. Compilation of some simulation results obtained with the ADX method with parameters AD_{X_M} and AD_{X_N} when they are combined with different values of short and long stop loss.

C. Combining the PE method with stop losses and stop profits

1) Simulation 1

In this simulation we use our own (PE) method with the following parameters $P = 19$, $M_c = 6$ and $M_v = 6$ and a stop loss of 14% for long positions and 20% for short positions. In Figure 15 we have represented the histogram of the benefits obtained after processing all the blocs of 200 days. In Table 4 we can see that with these parameters we obtain a mean of benefits of 23.52% and a standard deviation of 33.6. These results are slightly better than the option of working without stop losses. All other cases are debatable.

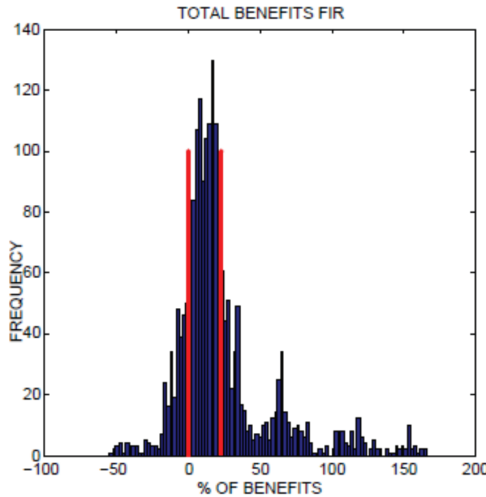


Figure 17. Histograms of the profits obtained using method 2 (PE) with parameters $P=19$, $M_c=6$ and $M_v=6$ and using stop loss levels of 14% and 20% for long and short operations respectively.

2) Simulation 2

In this simulation we use our own (PE) method with the following parameters $P = 19$, $M_c = 6$ and $M_v = 6$ and a dynamic stop loss of 1% for long and short positions.

As it is shown in the histogram of Figure 18 and the data in the table 4 for these parameters we obtain an average profit of 5.15% and a standard deviation of 8.35. Table 4 also shows the results of some of the most significant experiments performed, concluding that limiting the losses the standard deviation is reduced by at the high cost of drastically decreasing potential benefits.

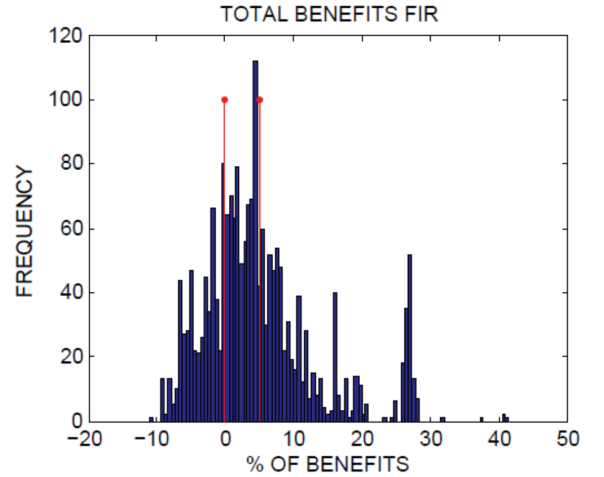


Figure 18. Histogram of the profits obtained using method 2 (PE) with parameters $P=19$, $M_c=6$ and $M_v=6$ and using a dynamic stop loss level of 1% for both long and short operations

Parameters			Stop-Loss[%]		Mean	Standard deviations
P	M_c	M_v	short	long		
19	6	6	∞	∞	23.34	35.44
19	6	6	14	20	23.52	33.61
19	6	6	1	1	5.15	8.35
27	6	3	14	20	21.73	30.06
5	4	9	2	9	21.57	21.73
27	6	3	∞	∞	22.16	21.73

Table 4. Compilation of some simulation results obtained with the PE method with parameters P , M_c and M_v when they are combined a stop losses strategy with different values of short and long stop loss.

VII. Conclusions

We have developed an application which can obtain any series of day prices for any financial asset in the world from a free provider. Using this application we evaluated two day-trading strategies. One method is widely reported in the literature and is commonly accepted as a good trading method, the second method is proposed by the authors. Benefit histograms were used to evaluate the performance of the methods. In this article we verify that the application strategies based on signals can

obtain positive benefit expectations and positive means, but at the price of having large standard deviations. These methods can produce large benefits in only a few days but they can also lead to large losses. In the last experiments presented in Figures 11 and 12 we show that past benefits don't guarantee future benefits. In agreement with Mandelbrot, Figure 8 shows that the benefits are discontinuous functions that depend strongly on time. Our simple method is more robust and outperforms the first method in many scenarios. However, we can obtain directives from the results to further improve our system. If the system is improved, its practical application can be considered. For example, in order to develop a practical system that minimizes risk we need to improve the signals that guide the choice of short positions. We also need to determine a way of decreasing the losses in order to protect the investor's money. To do this, we have integrated the use of stop loss in both methods analyzed in this work: the method based on the ADX and the method developed by the authors. It was observed that a closed margin of stop loss reduces drastically the potential of benefits (although improving the standard deviation). Moreover, it seems that these results can be applied to almost all trading methods. In order to have significant benefits it is required to assume high risks. In a future work it would be interesting to investigate whether there is a way of adapting the parameters to different market conditions. All these modifications can be validated or invalidated using simulations with statistical criteria.

Acknowledgment

This work is partially supported by UVic under grant R0904.

References

- [1] Saurabh Bhardwaj, Smriti Srivastava, J.R.P Gupta and Ashish Srivastava, "Chaotic Time Series Prediction Using Combination of Hidden Markov Model and Neural Nets", *International Journal of Computer Information Systems and Industrial Management Applications*, vol. 4, 2012, pp. 236-243.
- [2] R. Ghazali, N. Mohd Nawi, M. Z. Mohd. Salikon, "Forecasting the UK/EU and JP/UK trading signals using Polynomial Neural Networks", *International Journal of*

Computer Information Systems and Industrial Management Applications, vol. 1, 2009, pp. 110-117.

- [3] H. L. Richard and B. Mandelbrot. *The (Mis)Behavior of Markets: A Fractal View of Risk, Ruin, and Reward*. New York: Basic Books, 2004; ISBN 0-465-04355-0.
- [4] J.R.R. Peruyero and P. Marti-Puig, " Web-based system for evaluating day trading strategies", *Next Generation Web Services Practices (NWeSP)*, 2011 7th International Conference on, Oct. 19 2011-Oct. 21 2011, pp. 250-255, doi: 10.1109/NWeSP.2011.6088186.
- [5] J. L. Cava, *El Arte de especular. Las técnicas que mejor funcionan*. Eds. M. A. Cava, Madrid, 2006; ISBN 84-611-1763-8.
- [6] L. Ortiz de Zárate. *Técnicas relevantes para la especulación en los mercados financieros. El método menos es más*. Printed in Spain. 2009. ISBN 978-84-613-0449-3.
- [7] B. Mandelbrot and W H Freeman *The Fractal Geometry of Nature*, & Co, 1982; ISBN 0716711869.
- [8] B. Mandelbrot, N. Taleb. "A focus on the exceptions that prove the rule". *Financial Times*. Retrieved 2010-10-17.
- [9] J. W. Wilder, *New Concepts in Technical Trading Systems*. Greensboro, NC: Trend Research, 1978. ISBN 978-0894590276.

Biographies

Ricardo Rivera-Peruyero was born in Infesto, 1967 (Spain) He has a Bachelor of Industrial Organization Engineering from the University of Vic (UVic) and master's degree on Applied Information Technologies also in UVic Now, he is employed on Telefónica Spain His research interests include one dimensional signal processing, pattern recognition and algorithmic trading, fields in which he is currently orienting his Ph D

Pere Marti-Puig was born in Banyoles in 1967 (Catalonia, Spain) He received the M Sc degree in Telecommunication Engineering from the Universitat Politècnica de Catalunya (UPC-Barcelona Tech) and his Ph D in Telecommunication Engineering from the same University, in 2001 Nowadays he is an associate professor at the University of Vic, UVic (Barcelona) His research interests include multidimensional signal processing and their applications He has published various papers in international conferences and journals He is a member of the Digital Technologies Group and belong to the Associated Research Unit UVIC-UPC-ICM(CSIC)-IMEDEA(CSIC)

Anexo E.3: Analysis of day trading strategies using histograms of benefits

Analysis of day trading strategies using histograms of benefits

Juan Ricardo Rivera Peruyero¹, Pere Marti-Puig¹, Vladimir Zaiats¹, juanricardo.rivera@uvic.cat

¹ Escola Politècnica Superior, Universitat de Vic, c/. Laura 13, 08500 Vic (Barcelona) Spain

Keywords: Day trading strategies; Back-testing; Algorithmic trading.

1 Introduction

An application for downloading any series of financial asset day prices from a free provider has been developed. This application also allows to back-test any day-trading strategy with the mined data easily. In a previous work we have proposed and evaluated different day trading methods in terms of the mean losses and benefits they produce under different market conditions, after 200 days of activity; see Marti and Rivera (2011). Those methods are formulated by algorithms that clearly specify all the actions to be taken and make investment decisions independent of the emotional aspects of trading because the strategy is governed by a set of defined rules. A trading strategy can be automated and performed by a computer that wraps trading formulas into automated order and execution systems. However, obtaining good trading algorithms is quite complicate and what we have observed is that a certain strategy may exhibit great results during a certain period of time, and instead, may work terribly wrong in another. Moreover, often it is not clear the reason that originates this disparity of results. The day trading strategies are mainly used by small investors. This contribution focuses on validating or invalidating different day trading strategies by performing a back-testing with data of different financial assets in a diary framework. The developed application is designed to study the methods mainly used by small investors to operate on the stock market.

This paper is organized as follows. In part 2 we present the kind of algorithms and strategies that we want to evaluate as well as the framework in which we observe the markets. In part 3 we present some simulation experiments and the results obtained. Finally, section 4 contains some conclusions.

2 Approach, assumptions and application overview

The algorithms in which we are interested are those that do not assume any model to predict the financial asset behaviours as, for example, any future evolution of price, volatility or risk. We evaluate and explore techniques based on computing signals from the available series of prices and taking advantage of some patterns that those signals could exhibit in order to automatically generate orders of buying or selling. In some way we could say that we evaluate using statistics some empirical methods and we try to discover some operation rules that could work in practice. To develop the method of generating signals we use different signal processing tools, like linear, non-linear and adaptive filters, but we avoid the uses of models trying to model the behaviour of prices. The reason of avoiding complicated models of prediction is that the most common methods assume Gaussian statistics. However, the probability density functions of financial data differs from the Gaussian because exhibit bigger tails in both extremes. As a consequence, the common Gaussian assumption to model the variation of prices origins a lot of mistakes because the extreme events are underestimated; see Mandelbrot and Freeman (1982), Richard and Mandelbrot (2009), Mandelbrot and Taleb (2006). Long before the last financial crisis, Mandelbrot, who first reported this observation, strongly criticized the Black-Scholes model, widely used in banking to estimate the price of options and many other financial derivatives, because of its Gaussian behaviour assumption; see Mandelbrot and Freeman (1982).

In the day trading literature and on the Internet we can find many methods that fulfil our strategy requirements. Very often the authors state that their strategies perform quite well with poor statistic arguments justifying their statements. Some of these methods, e.g., Wilder (1978), Cava (2006), Ortiz de Zárate (2009), have been analysed with our application. The developed application mines the prices of financial assets from free web information providers like google/finances and yahoo/finances. These two providers offer for free to their users the historic of day prices of any financial asset negotiated in any important market in the world. The huge amount of available data will be very useful for the back-testing. That application is developed with Matlab because this software offers a lot of facilities for testing algorithms quickly and visualizing the results. With Matlab it is also easy to implement functions for mining web information.

3 Simulations and experiments

Almost all the trading algorithms, also those used in this work, depend on some parameters that are required to be tuned and that are commonly obtained from historical analysis using prices of the past. In some previous work Marti and Rivera (2011) we have explored the best parameter combinations that maximize the benefits over an historic of 10.000 prices of

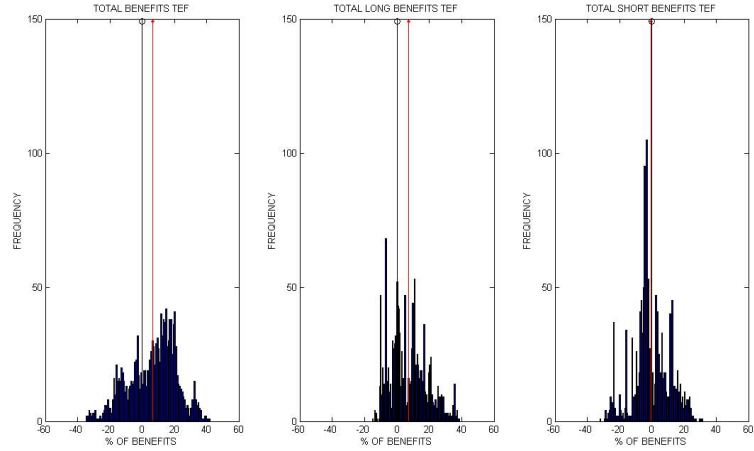


FIGURE 1. Histograms of the profits obtained with the ADX based method after 200 consecutive days in the market with $N = 6$ for signal $ADX_N(n)$ and $N = 24$ for signals $ADX_N^+(n)$ and $ADI_N^-(n)$. On the left, total profits; centre, profits from long operations; right, profits from short operations.

the Santander and Telefonica Spanish IBEX35 stocks. That operation was performed for both methods. Then, maintaining the best set of parameters for each method we have explored the same historic, but now computing the benefits/losses obtained from all periods of 200 consecutive days we can form from the historic. The results are presented by histograms. In Figures 1 and 2 there are represented tree histograms; the total of benefits obtained in 200 days (left), the benefits of the same period obtained from long operations (centre) and the benefits obtained from short operations (right). These histograms are computed operating exclusively on the Telefonica stock. The histograms provide a fast interpretation of the dispersion of the results. The mean is represented using a red line. Figure 1 is obtained by applying the ADX method with $N = 6$ for signal $ADX_N(n)$ and $N=24$ for signals $ADX_N^+(n)$ and $ADI_N^-(n)$. In that case the mean of benefits is positive and we can conclude that most of benefits are given from long operations with a very poor contribution due to short operations. Figure 2 is obtained by applying the own method on the Telefonica stock prices data with parameters $P = 4$, $M_c = 5$ and $M_v = 1$. In that case the results are better than the ADX method with important expectations of mean benefits even for short operations.

Some other experiments where done in order to provide an idea of how the systems work. An interesting result is that the benefits are strong dependent

4 Back-testing day trading strategies

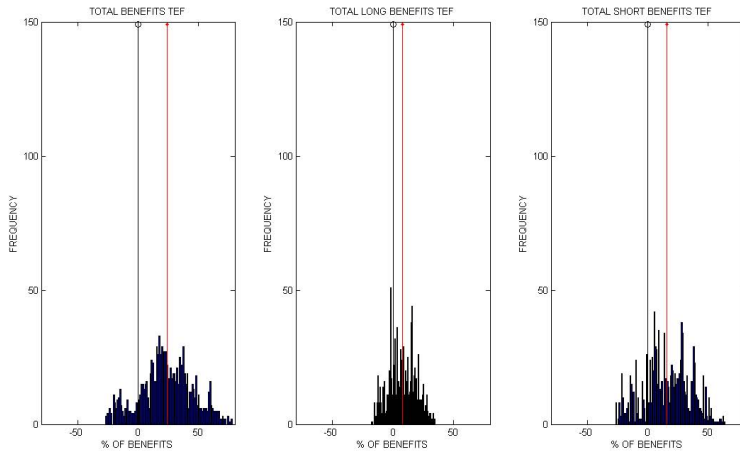


FIGURE 2. Histograms of the profits obtained using our own method after 200 consecutive days in the market with parameters $P = 4$, $M_c = 5$ and $M_v = 1$. On the left, total profits; centre, profits from long operations; right, profits from short operations.

on the day in which the operations begin. Starting the operations one day or the day after can significantly modify the benefits. In Figure 3 we represent the total profits obtained as a function of time, so that the longitudinal axis begins with the first 200 day block analyzed and finishes with the block of 200 days that ends in the present. Note the strong dependency of benefits on the moment of acting in the market and its discrete nature.

In Figure 3 the time dependence of the benefits of operating 200 days consecutive days using the own method with $P=19$ and $M_c = 6$ and $M_v = 6$ against the Spanish Santander stock value is given.

A drawback of this experiment is that to identify the best set of parameters we use all the data available and then, with a selection of parameters, we use short periods (of 200 day) extracted from the same data used to tune the system.

A more realistic approach

The following set of experiments differs from the last ones because use the available data more realistically. Once an historic of prices of a particular financial asset is selected we always proceed in the same way. Consider a test of benefits for the day n . Then we take N consecutive past days beginning with the day $n - 1$ and going back to day $n - N$. We use those N past prices to find the best set of parameters that maximize the benefits in

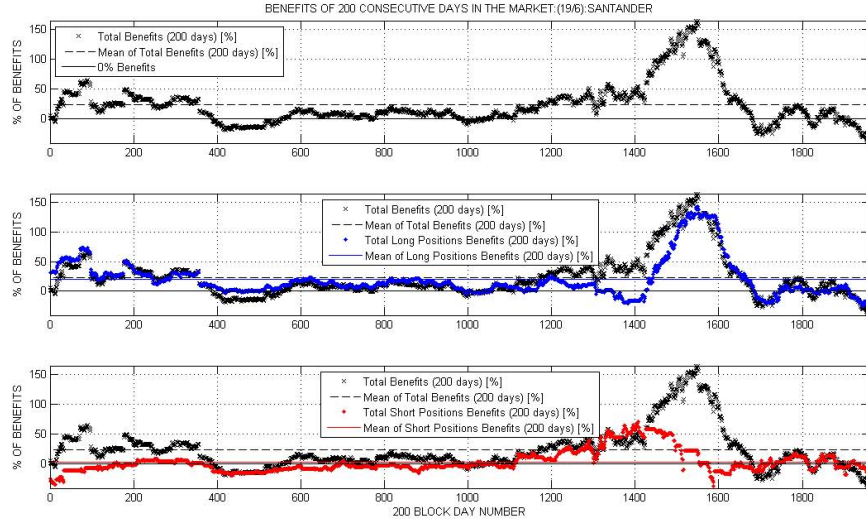


FIGURE 3. Evolution of 200-day profits over in time using our own method with parameters $P = 19$, $M_c = 6$ and $M_v = 6$. The discontinuous line represents the mean.

this period by a brute force exploration. Once the parameters are obtained, and maintaining these parameters, the trading method is evaluated with the next M consecutive days, indexed from $n + 1$ to $n + M - 1$, to show how the system performance on the next M future days. Then, after these M days in the market, the system closes positions and computes the total of benefits. So, for the simulation started at day n we obtain, at day $n + M$, one benefit (or loss) value. Next we do the same operation for the day $n + 1$, for the day $n + 2$, and so on until finishing all the historic available.

This kind of experiments is done to explore if updating each day the parameters with the recent past prices can improve or not the benefits.

In next pair of histograms we represent the results of those experiments. The histogram on the left represents the maximum of benefits obtained in the bloc of training days. The combination of parameters that maximize the benefits will be used to the operations of next bloc of 'future days.' On the right it is represented the histogram of benefits generated in the blocs of 'future days.' In the experiments below we have used the prices of the Santander stock.

In Figure 4 we can see the performance of the ADX method when 100 days are used for the training and 100 days for the test. In that case we can observe, in the histogram on the left, that the benefits reached in the

6 Back-testing day trading strategies

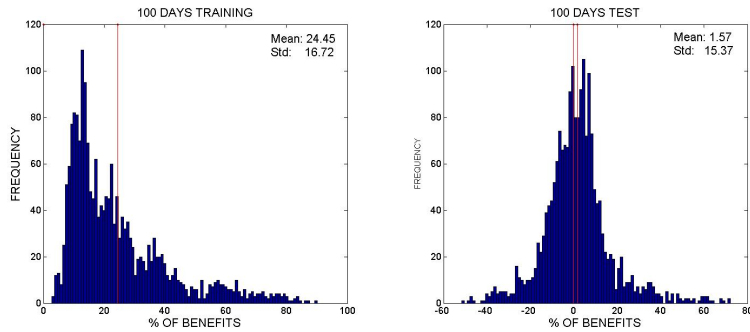


FIGURE 4. Performance of the ADX method when 100 days are used for the training and 100 days for the test. In the histogram on the left, the benefits reached in the training periods and, on the right, the performance of the method over 100 days. The red line indicates the mean.

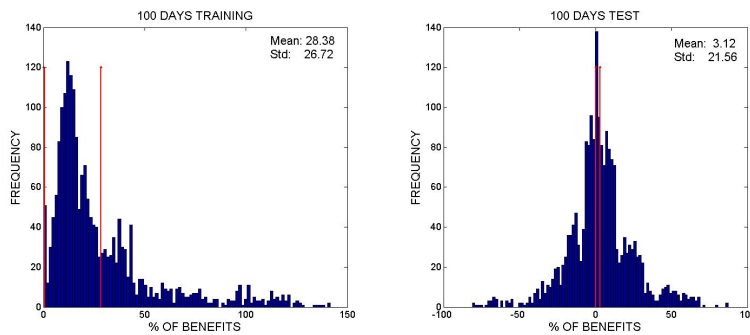


FIGURE 5. Performance of the own method when 100 days are used for the training and 100 days for the test. In the histogram on the left, the benefits reached in the training periods and on the right, the performance of the method over 100 days. The red line indicates the mean.

training periods, that are the maximum benefits possible for each period because he have found the set of parameters by a brute force exploration, has a mean of 24.45 while their standard deviation is only of 17.72. However, in the histogram on the right, we can observe that the parameters that maximize the benefits for the past 100 days do not work properly to the next 100 days and the mean of benefits decreases to 1.57 while the standard deviation is practically the same.

A similar result is found when using the own method. The results of using

100 days for training are represented in Figure 5. In that case the mean of benefits reached in the training process is about 28.38% with a standard deviation of 26.72 as we can see in the histogram on the left. In that case, the benefits obtained in the next 100 days are showed in the histogram on the right, showing a mean of 3.12, which is better – the double – than the one of experiment of figure 4, but has decreased a lot.

4 Conclusions

We have developed a Matlab based application for downloading series of financial asset day prices. This application also allows to back-test any day-trading strategy with the mined data. The application visualize by graphic representations the generation of signals and orders produced by a selected strategy together with a price representation. So, observing the cases in which the system fails, it is possible to improve the strategy. Almost all the algorithms applied depend on a small number of parameters that can be adapted for different financial assets and different market conditions. One of the most interesting possibilities that the application offers is to perform exhaustive explorations of a set of parameters on all the historical to maximize some criteria in order to find the best combinations. These explorations can be time consuming intensive, however the Matlab platform is oriented to perform mathematical calculations and simulation. Other Matlab platform advantage is that we can use a lot of statistics and signal processing tools available in their toolboxes. Therefore, new trading strategies can be easily developed with some basic knowledge of programming on Matlab. In this article we investigate the performance of two day trading strategies. Depending on the way to present the results obtained by these two systems it could seem that they work pretty well. In fact, after an exhaustive exploration in the space of tuning parameters on a past series of data we always find combinations that, on these data, produce spectacular benefits. The same also happens if we look for combinations that work terribly wrong. Some information about this kind of algorithms are often not presented with rigor and small investors may be tempted to use strategies that offer few guarantees. Works like this can help to protect them. What we have observed is, for example, that the day the simulation begins on can strongly affect the resulting profits and that both methods can produce large benefits in only a few days but they can also lead to large losses. As the market conditions change on time we have prepared some simulations to know what happens when we use the recent past data in order to determine the tuning strategy parameters and use them on a short future period of 100 days and we have observed that the histograms of benefits obtained are centered near zero, with positive means close to zero and large standard deviations.

Acknowledgments: All authors have partially been supported by the Universitat de Vic under grant R0904.

References

- Cava, J. L. (2006). *El Arte de especular. Las técnicas que mejor funcionan*. Madrid: Eds. M. A. Cava.
- Mandelbrot, B. B., and Freeman, W. H. (1982). *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman & Co.
- Mandelbrot, B. B., and Taleb, N. (2006). A focus on the exceptions that prove the rule. *Financial Times*, March 23. Retrieved on 2010-10-17 from <http://www.ft.com>
- Marti-Puig, P., and Rivera-Peruyero, J. R. (2011). Web-based system for evaluating day trading strategies. In: *Proceedings of 7th International Conference on the Next Generation Web Services Practices (NWeSP)*, 250-255, Salamanca, Spain. DOI: 10.1109.
- Ortiz de Zárate, L. (2009). *Técnicas relevantes para la especulación en los mercados financieros. El método menos es más*. Madrid: Bolsa Relevante, S.L.
- Richard, H. L., and Mandelbrot, B. B. (2009). *The (Mis)Behavior of Markets: A Fractal View of Risk, Ruin, and Reward*. New York: Basic Books.
- Wilder, J. W. (1978). *New Concepts in Technical Trading Systems*. Greensboro, NC: Trend Research.

Anexo E.4: Automatic Trend Line Generation for time-series analysis: a Graphical Approach

Automatic Trend Line Generation for time-series analysis: a Graphical Approach

Juan Ricardo RIVERA PERUYERO^{a1} and Pere MARTI-PUIG^{a2}

^a*Dept. of Digital Information Technologies, University of Vic (UVic), 08500 Vic (Barcelona), Spain*

¹*juanricardo.rivera@uvic.cat*, ²*pere.marti@uvic.cat*

Abstract. Trend lines are revealed useful to explain the past evolution of time-series of prices that are represented on graphics. However, in practice, there are a huge amount of possible trend lines to be plotted but only a reduced set of them are significant or relevant. The rapid identification of relevant trend lines when they are in their initial phase of their development could provide interesting projections for the future evolution of time-series. This approach is focused on the graphical analysis of time-series –especially those coming from financial asset prices– under a framework of trend lines.

Keywords. Trend lines, time-series analysis, graphical processing.

Introduction

Trend lines are one of the most basic tools of financial time-series analysis and have been used since the beginning of market trading. Trend lines are plotted on a graphic representation of the time-varying sequence of data and they are well suited to any type of market (stocks, currencies, futures, etc.) providing some understanding –or interpretation– of the time-series evolution. From trend lines it is inferred the general direction and the strength of the current price movement and, what is of interest for traders, where future supports and resistances are likely to be located.

The use of trend lines are based on the idea that markets move in trends, meaning that sustained movements in one direction are followed by sustained movements in the opposite direction. All of this without forgetting the great difficulty of predicting market movements, according the approach to markets given by Mandelbrot and others [1-3].

A trend line is formed when a diagonal line can be drawn between two or more price pivot points and, in practice; there are huge quantity of possible trend lines but only a reduce set of them have significance and can be classified as relevant. Nowadays most of the charting software enables plotting trend lines, option that is used for most traders to select and to draw their own trend lines in a quite subjective manner. From a graphical representation of the time-series it is often clear to find a trend line that the prices had followed for a time. However, when the time-series is updated time-to time, the decision of drawing a new relevant trend line in the incipient formation phase is not so simple. In order to overcome the subjective criteria used for traders, the present work investigates a way to establish some objective criteria to systematically draw trend lines in real-time, following the time-series evolution, in order to observe if those lines become or not important in the interpretation of the time-series. In [4] a set of basic rules appears useful to identify trend lines but the rules could be different. To do this automatically, however, it has to deal with different essential points and decisions like, how a line can be considered that is becoming a trend line, when this line can be considered valid, how to manage multiple trend lines, this is, when two or more similar trend lines are -or not- the same and how to manage different temporal scales, how to aggregate or discard information, and mainly, which are the objective criteria to do all this in order to obtain reproducible results and significant simulations. To study the time-series under that not conventional framework a program based on MATLAB has been developed.

¹ Corresponding Author.

1. Automatic Trend Line Generation Software Overview

1.1. Program operation overview

A program for the MATLAB environment has been coded to compute and represent trend lines automatically on any graphical representation of a given time-series that is previously stored on the computer or directly downloaded from the web. It is looked for a simulation that reproduces the real-time market conditions by providing a new time-series value each simulation step. The simulation step represents the time increment between two consecutive time-series values. In each simulation step the incoming data is processed together with the previously obtained time-series values and the representation of the trend lines is graphically updated. The user can control the evolution of the simulation by pressing a button in order to study and evaluate the trend line evolution.

The financial asset time-series are currently given in the following way. In every time t , considering the interval of time $\Delta t = t - t_{-1}$, the financial asset prices are given by for values: the first price obtained in Δt , known as the price at the opening $\{o_t\}$, the highest price $\{h_t\}$ reached in Δt , the lowest price reached in Δt $\{l_t\}$, and the last price at the end of Δt , known as the closing price $\{c_t\}$. The series of prices are currently been graphically represented by means of bars as it is represented in Fig. 1.

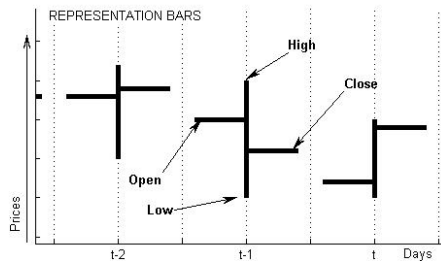


Figure 1. Representation of the four price values considered at days $t-2$, $t-1$ and t . These prices are at the opening (o), the lowest (l), the highest (h) and the closing (c).

At present, the simulation is driven by the user who pushes a button each time he want a new set of four values. Once a button is pressed the graphic representation in the computer screen is updated by adding the new bar, computing and updating the trend lines and moving the temporal axis in order to obtain a centred representation.

1.2. Trend line drawing process

The trend line drawing process can be described in three stages. The first is the detection of interest points, which are the points that could belong to a relevant trend line. The second is the detection of pairs of interest points with the potential of belonging to a trend line. The third is the identification of the trend lines based on some pre-established conditions. Next the three stages are presented.

1.2.1. Interest points detection

In this stage the program looks for all the points able to be in a trend line. The conditions to be an interest point differ depending on if the search is for upwards or downwards trend lines. The search for sideward trend lines appears included in those previous conditions so it is not addressed as a particular case. The selection of interest points depends on the trend considered.

In upwards lines, the interest points come from the time-series $\{l_t\}$ of lowest prices for past values of t . The interest points are: (1) the local minima and (2) the minima of upward gaps. An upward gap is produced when the highest price of day $t-1$, h_{t-1} , is lower than the lowest price of the day t , l_t , as it is shown on the left side of figure 2.

In downward lines, the interest points are the local maxima and the maxima of downward gaps, now explored in the time-series of highest prices $\{h_t\}$ for past values of t . A downward gap is produced when the lowest price of any day l_{t-1} , is higher than the highest price of the next day h_t , as it is shown on the right side of figure 2. In those conditions h_t is also a point of interest.

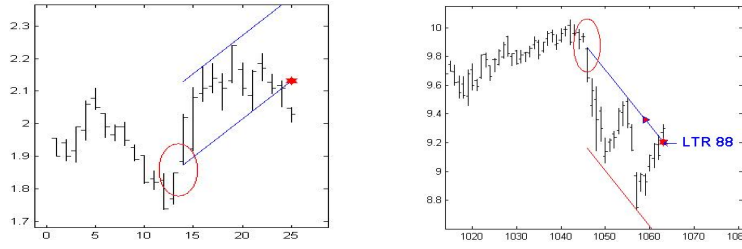


Figure 2. On the right, an upward gap, showed by an ellipse, that is the origin of an upwards trend line. On the left, a downward gap, showed by an ellipse, that is the origin of a downwards trend line.

The points that meet the above conditions are stored in two matrices, one for the upward trend analysis, with elements (l_{t_i}, t_i) and one for the downward trend analysis, with elements (h_{t_j}, t_j) . Those matrices are updated, if proceed, each simulation step.

1.2.2. Identifying potential trend lines

In this stage, and only when a new point of interest (l_{t_u}, t_u) or (h_{t_v}, t_v) is detected by the previous stage, it is preceded to the calculus of all possible slopes and lines that the new point can form with the other previously stored interest points. For the upward trend research, for all i going from 1 to $u-1$, the slope i is computed as:

$$m_i = \frac{l_{t_u} - l_{t_i}}{t_u - t_i} \quad (1)$$

And, for all j going from 1 to $v-1$, in the downward trend research, as:

$$m_j = \frac{h_{t_v} - h_{t_j}}{t_v - t_j} \quad (2)$$

Then, for all i, j it is checked if $m_i \geq 0$ and $m_j \leq 0$. Afterwards, it is tested that the new slopes are not the same as other previously detected relevant trend lines. To do this a margin of tolerance ϕ_T of very few degrees is considered together with a proximity criterion between points to verify if the line under evaluation had been previously identified.

For the set of slopes that fulfil those conditions, the points t_k of the segment lines going from t_i to t_u , in the upwards case, are computed in the way:

$$r_{t_k} = l_{t_i} + m_i(t_k - t_i) \quad t_i \leq t_k \leq t_u \quad (3)$$

The points of the segment lines going from t_j to t_v , for the downwards case, are:

$$r_{t_q} = h_{t_j} + m_j(t_q - t_j) \quad t_j \leq t_q \leq t_v \quad (4)$$

The segments points r_{t_k} and r_{t_q} are stored in two matrices because they can potentially belong to a relevant trend line. Its parameters will be stored in two arrays (one for the upward and one for the downward trends) for being used in the next processing stage.

1.2.3. Trend lines detection

In this stage, as the simulation goes on, each of the lines stored in the matrices of the previous stage are extended in time step by step. When the lines are updated two things can happen:

- 1) The line being evaluated crosses –or cuts- the prices. In that case its parameters are deleted from the array and the line disappears without a trace.
- 2) The line meets certain imposed conditions (of which we will talk below) and it becomes a significant –or relevant- trend line. In that case an identification number is given to it and its parameters are also stored in two different arrays, one for dynamical graph representations and for long term historic representations.

In the same way, as the simulation advances, all the identified relevant trend lines are extended in time. In that process, when relevant trend lines cut the prices, and certain conditions of cutting are fulfilled, its information previously stored, is erased at exception of the one present in the array used to preserve its information for the long time analysis. When more than two points fulfil de condition of belonging to the same trend line, not fit exactly the line, the line is adjusted using a linear regression.

1.2.4. Delayed significant trend lines and channels

For every established significant trend line another line with the same slope is looked for. This new line which is parallel to its associated significant trend line is called delayed significant trend line. Different rules to draw delayed significant trend lines can be explored and discussed. For now, in this work, a delayed significant trend line associated with an upward trend line starts in the first maximum of $\{h_{t_j}\}$ found after its consolidation and it is updated when a new higher maximum in the time-series $\{h_{t_j}\}$ appears. Then the line is replaced by the parallel line which starts in that new point. In a similar way, a delayed significant trend line associated with a downwards trend line starts in the first minima of $\{l_{t_i}\}$ found (after its consolidation) and it is updated when a new lower minima in $\{l_{t_i}\}$ appears. The set of both lines forms a channel into which the prices are moving. Figure 3 shows different kinds of channels.

The information to draw significant delayed trend lines is stored in two arrays; the one is required for dynamic representations and the other to manage global representations and time analysis studies. A significant delayed trend lines always goes associated to its principal trend line.

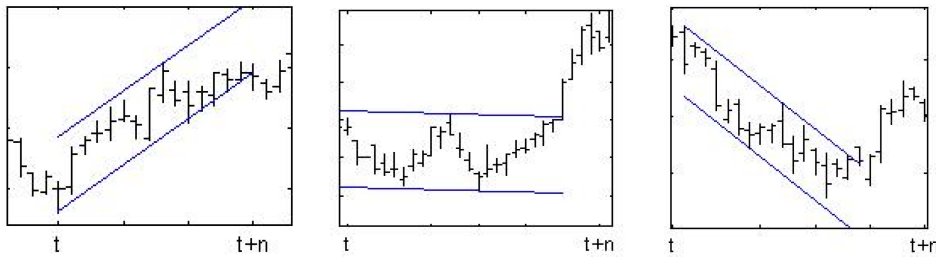


Figure 3. On the right, an downwards channel also known as bullish channel is represented in blue for a time-series. In the centre there is a side channel and, on the right, an upwards (or bearish) channel.

1.2.5. Criteria for a line becomes a significant trend line

Different criteria can be considered to establish how a line becomes a relevant trend line. The criteria are based on the fulfillment of a set of conditions. Depending on those conditions it will be easier or harder to form new trend lines or to control their lifetimes. Different objective criteria can be proved to draw significant trend lines and channels. Those rules can be easily tuned after a statistical analysis. Depending on the difficulty in the compliment of these conditions the number of trend lines will change.

A *point of contact* of prices with a trend line happens is defined when the price at a given t takes values between the point of the trend line in that instant plus minus a tolerance. If that margin of tolerance is overcome it is considered that the prices crosses the trend line. Then, being t_1 the temporal index of the point of interest in which a trend line starts and, t_2 the first point of contact, the trend line that contains these two points is going to become relevant or principal if when, after touching the point in t_2 , it has been maintained without the prices crossing it for a time Δt_I . Then it will be considered than the relevant trend line will be valid for a period of time of Δt_F after t_2 , this is, the time of live of the relevant trend line with only two points of contact with prices will be:

$$t_2 + \Delta t_I \leq t \leq t_2 + \Delta t_F \quad (5)$$

where, for instance:

$$\Delta t_I = (t_2 - t_1)/2 \quad (6)$$

and

$$\Delta t_F = 2 * (t_2 - t_1) \quad (7)$$

The parameter Δt_I in (5) controls the beginning of the trend line. If the beginning is closed to t_2 , the line is quickly identified but at the price of assuming bigger risk of doing a mistake. If the trend line doesn't touch any other new point (of the time-series) after $t_2 + \Delta t_F$ it dies. However, if a new point t_3 appears in this time interval, the lifetime of the line will be extended an interval of Δt_G that it can be, for example:

$$\Delta t_G = 2 * (t_3 - t_2) \quad (8)$$

Similarly the new points that touch the trend line will be integrated in the trend line and the line lifetime will be extended.

1.2.6. Criteria for validating a trend line breakdown

In the similar way it is important to define the criteria to consider when a trend line is broken. These criteria can incorporate different levels of flexibility. For instance it could be considered that a trend line is broken when the closing price is lower than a bullish trend line or higher than a bearish trend line. However these criteria could be more relaxed by imposing the condition of expending some time-series values under the trend line or to reach a predefined distance of prices with respect the line once the line is broken. The meaning of all these considerations can be appreciated in figure 4.

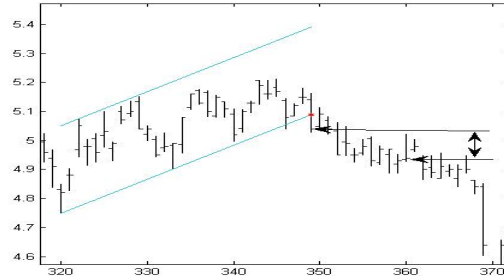


Figure 4. Representation of a bullish trend line rupture. The longitudinal axes represent the temporal order and the vertical axes the prices. The rupture can be considered effective at the first point (represented in red colour) in which the closing value is lower than the values of the trend line or, following other criteria, when a given number of the time-series values have taken values under the line or, for instance, if some distance from the trend line is reached.

1.2.7. Criteria for grouping different similar lines in one

This is one of the most important rules to take into account because it helps to filter the lines appropriately. To do this, different artificial intelligent techniques could be applied and investigated in the future. In the current software implementation the filtering is doing by comparing the slopes of the different lines and the distances of the points of interests. Using this strategy the program merges different similar lines that have been appeared at different time scales in only one representative line that can be tuned using some easy regression techniques. Now the software employs two parameters to perform the tuning. Figure 5 shows two analysis of a particular time-series in terms of relevant trend lines when the option of merging similar trend lines is or not considered. It can be observed that when this functionality is used, in the graphic on the right, the clarity of the figure increases a lot. A great amount of lines that are nearly parallel but had being created at different temporal scales are merged in only one. The necessity of filtering information seems clear and this implies to manage tolerances in order to identify that different trend lines are the same or to establish appropriate criteria to decide when a relevant trend line is broken.

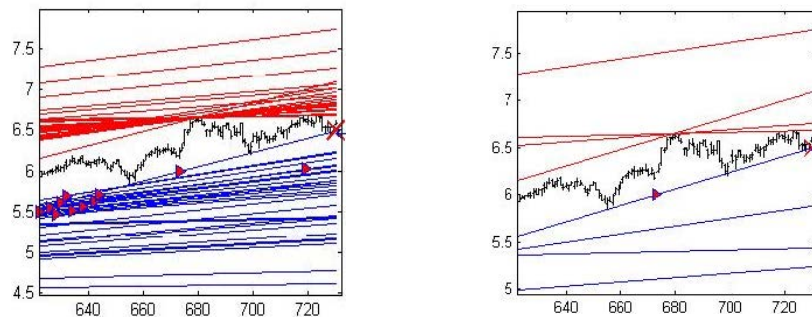


Figure 5. In blue there are represented the trend lines and in red the differed line to form the channels. The graphic on the left shows all the possible trend lines detected by the program as a result of the fulfilment of the established criteria. The figure on the right shows the result of filtering the lines by grouping the lines with a very similar slope. It can be appreciated that in the graphic on the right only appears the trend line at the scale of interest (with a red triangle) and other three trend lines important in the long term analysis.

2. Results

The developed application mines the prices of financial assets from free web information providers like google/finances and yahoo/finances. These providers offer for free to their users the historic of day prices of any financial asset negotiated in any important market in the world. The huge amount of available data will be very useful for the back-testing. That application is developed with MATLAB because this software offers a lot of facilities for testing algorithms quickly and visualizing the results. With Matlab it is also easy to implement functions for mining web information.

The MATLAB code developed led us to observe how new lines can appear in each simulation step because a new time-series value is introduced, reporting a realistic simulation of what it could happen in a real-time exploration. Figure 6 shows a sequence of two simulation steps.

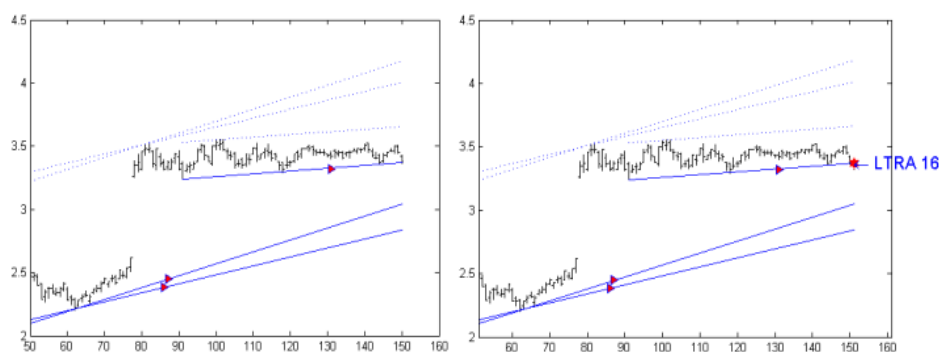


Figure 6. On the left, we show the evolution of a sequence that is characterized by means of three relevant trend lines, two of them are clear bullish trend lines originated in a bigger time scale than the one represented in the figure and the other is a nearly horizontal trend line completely represented in the figures. On the right representation, a new time-series value introduced in next simulation step touches the horizontal trend line.

The program has also the possibility of representing all the trend lines that had been appeared in all the analyzed historic as in figure 7 or only some parts of the historic as showed in figures 8 and 9. All that information is stored to be used to any statistical study. It is interesting to note that the program works well at different time scales.



Figure 7. It is represented the evolution of an historic in terms of all the relevant trend lines. This analysis is performed for a given criteria that governs the trend line generation and they live time. Graphics like that can be compared for a different set of criteria in order to tune the rules.

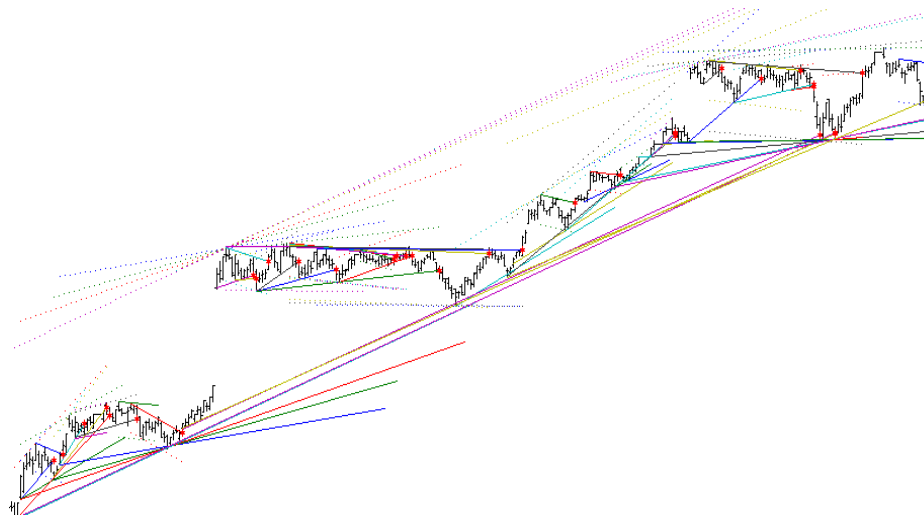


Figure 8. Part of the analysis represented in figure 7 that shows a bigger level of detail. The reader can appreciate how the software represents the trend lines at different scales.

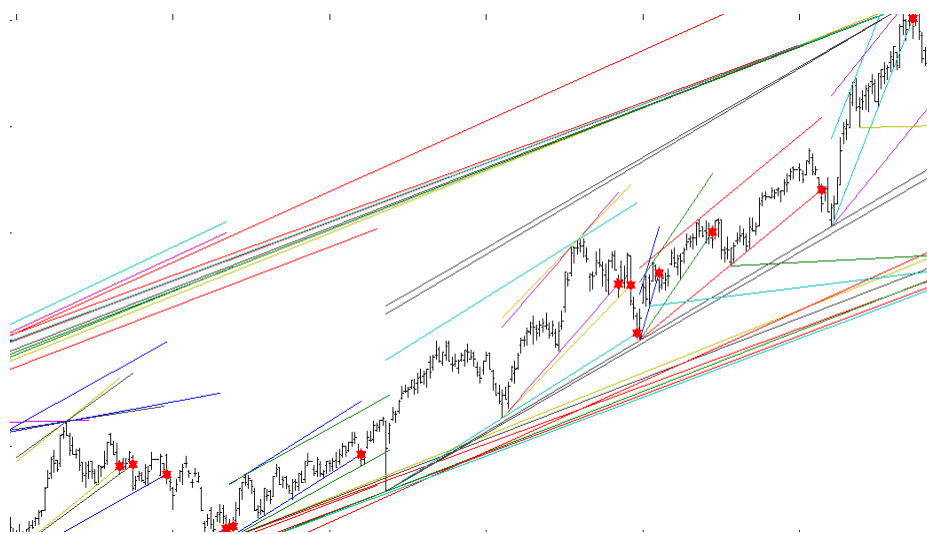


Figure 9. Part of the analysis represented in figure 7. The reader can appreciate multiple trend lines that have the same slope and that could be considered the same.

It is interesting to observe that the evolution of prices seems often to follow trend lines and it is surprising that trend lines act as a resistance or supports for prices over and over. Figure 10 show those phenomena in another level of detail.

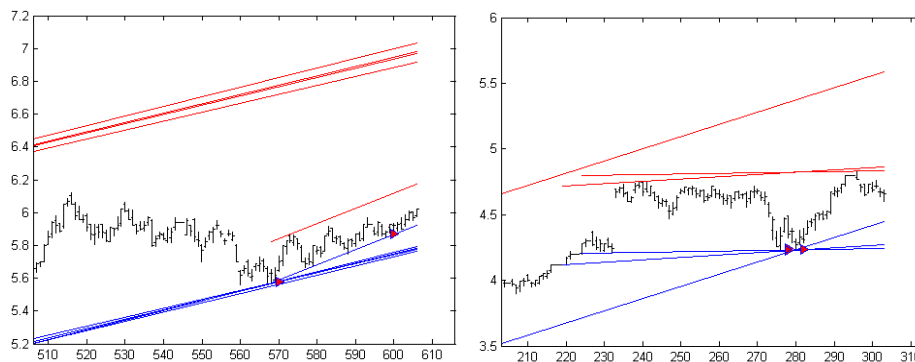


Figure 10. Part of an historic analyzed in terms of upwards relevant trend lines. On the left, the prices touch the long term relevant trend line and begin a secondary trend. On the right the prices that are moving inside a channel touch again the trend line.

3. Conclusions

There are many techniques used to analyze time-series that have been developed for a long time. The systematic study of time-series of prices under the trend line framework had been poorly addressed despite the fact that trend lines are widely used for most traders that plot them on charts, using support tools, but in a subjective manner. This approach is based on processing information graphically and let to address the time-series analysis under a new framework. The proposed approach is quite non linear and a lot of work must be done to establish new techniques to filter lines or, for instance, for merging lines with nearly the same slope which appear close between them. Artificial intelligence techniques are assumed to have something to say about it. Image processing techniques can also be considered. Although those studies are at an early stage a set of patterns of crossing lines have been identified that are regularly repeated and can provide interesting information on establishing future projections. As future work, some statistical validation must be performed for which the developed software will be really useful.

Acknowledgements

This work was partially supported by UVIC under the grant R0904.

References

- [1] B. Mandelbrot and W H Freeman The Fractal Geometry of Nature, & Co, 1982; ISBN 0716711869.
- [2] H. L. Richard and B. Mandelbrot. The (Mis)Behavior of Markets: A Fractal View of Risk, Ruin, and Reward. New York: Basic Books, 2004; ISBN 0-465-04355-0.
- [3] B. Mandelbrot, N. Taleb. "A focus on the exceptions that prove the rule". Financial Times. Retrieved 2010-10-17.
- [4] L. Ortiz de Zárate. Técnicas relevantes para la especulación en los mercados financieros. El método menos es más. Printed in Spain. 2009. ISBN 978-84-613-0449-3.

Introduction

Trend lines are one of the most basic tools of financial time-series analysis and have been used since the beginning of market trading [1]. Trend lines are plotted on a graphic representation of the time-varying sequence of data and they are well suited to any type of market (stocks, currencies, futures, etc.) providing some understanding—or interpretation—of the time-series evolution. From trend lines it is inferred the general direction and the strength of the current price movement and, what is of interest for traders, where future supports and resistances are likely to be located. The use of trend lines are based on the idea that markets move in trends, meaning that sustained movements in one direction are followed by sustained movements in the opposite direction. All of this without forgetting the great difficulty of predicting market movements, according the approach to markets given by Mandelbrot and others [2-4].

A trend line is formed when a diagonal line can be drawn between two or more price pivot points and, in practice, there are huge quantity of possible trend lines but only a reduce set of them have significance and can be classified as relevant. Nowadays most of the charting software enables plotting trend lines, option that is used for most traders to select and to draw their own trend lines in a quite subjective manner. From a graphical representation of the time-series it is often clear to find a trend line that the prices had followed for a time. However, when the time-series is updated time-to time, the decision of drawing a new relevant trend line in the incipient formation phase is not so simple. In order to overcome the subjective criteria used for traders, the present work investigates a way to establish some criteria to systematically draw trend lines in real-time, following the time-series evolution, in order to observe if those lines become or not important in the interpretation of the time-series. In [5] a set of basic rules appears useful to identify trend lines but the rules could be different. To do this automatically, however, it has to deal with different essential points and decisions like, how a line can be considered that is becoming a trend line, when this line can be considered valid, how to manage multiple trend lines, this is, when two or more similar trend lines are—or not—the same and how to manage different temporal scales, how to aggregate or discard information, and mainly, which are the objective criteria to do all this in order to obtain reproducible results and significant simulations. In order to study all these points a program based on MATLAB has been developed.

Automatic Trend Line Generation Software

A program for the MATLAB environment has been coded to compute and represent trend lines automatically on any graphical representation of a given time-series that is previously stored on the computer or directly downloaded from the web. It is looked for a simulation that reproduces the real-time market conditions by providing a new time-series value each simulation step. The simulation step represents the time increment between two consecutive time-series values. In each simulation step the incoming data is processed together with the previously obtained time-series values and the representation of the trend lines is graphically updated. The user can control the evolution of the simulation by pressing a button in order to study and evaluate the trend line evolution. The financial asset time-series are currently given in the following way. In every time t , considering the interval of time $\Delta t = t - t_0$, the financial asset prices are given by four values: the first price obtained in Δt , known as the price at the opening (α_0), the highest price (h_1) reached in Δt , the lowest price reached in Δt (l_1), and the last price at the end of Δt , known as the closing (c_1). The series of prices are currently being graphically represented by means of bars as it is represented in Fig. 1.

At present, the simulation is driven by the user who pushes a button each time he want a new set of four values. Once a button is pressed the graphic representation in the computer screen is updated by adding the new bar, computing and updating the trend lines and moving the temporal axis in order to obtain a centred representation. The process is performed in three stages. It is started with an *interest point detection stage* that identifies all the points able to be in a trend line. The points that meet the above conditions are stored in two matrices, one for the upward trend analysis, with elements (l_p, t_p) and one for the downward trend analysis, with elements (h_p, t_p) . Those matrices are updated, if proceed, each simulation step. The second stage consists on the *identification of potential trend lines* by computing all possible slopes and lines that the new point can form with the other previously stored interest points. In the same way, as the simulation advances, all the identified relevant trend lines are extended in time. In that process, when relevant trend lines cut the prices, and certain conditions of cutting are fulfilled, its information previously stored, is erased at exception of the one present in the array used to preserve its information for the long run analysis. In the other hand, when a new time-series value fulfils the condition of belonging to a trend line, as the new value do not perfectly fit the mathematical expression of that line, the trend line is recalculated—considering this new point—using linear regression techniques.

In order to draw the lines appropriately some practical considerations have to be considered. Those practical considerations have to be addressed from an artificial intelligence framework. These main points are: when a line becomes a significant trend line, when it is considered that a significant trend line is crossed or cut and when two or more different but similar trend lines can be considered the same line. Those questions could be attached from a fuzzy logic paradigm.

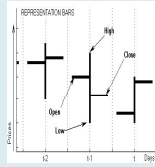


Figure 1. Representation of the four price values considered at days t_0 , t_1 and t_2 . These prices are at the opening (α_0), the lowest (l_1), the highest (h_1) and the closing (c_1).

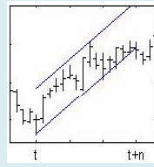


Figure 2. This figure represents a rising canal, understood between two parallel lines with positive slope.

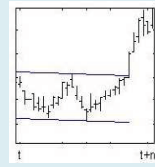


Figure 3. This figure represents a lateral canal, understood between two parallel horizontal lines.

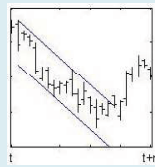


Figure 4. This figure represents a falling canal, understood between two parallel lines with negative slope.

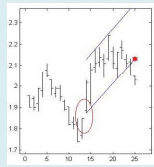


Figure 5. A rising canal, showed by an ellipse, that is the origin of an upwards trend line.

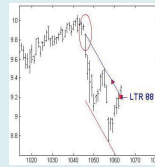


Figure 6. A downwards canal, showed by an ellipse, that is the origin of a downwards trend line.



Figure 7. Example of as the program suggests the rupture of the rising trend line number 16 (LTRA 16).

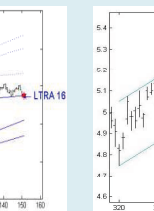


Figure 8. Representation of the rupture of a rising tendency with the resulting change of tendency.

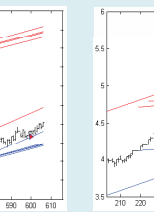
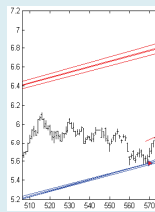


Figure 9. Part of an historic analyzed in terms of upwards relevant trend lines. On the left, the prices touch the long term relevant trend line and begin a secondary trend. On the right the prices that are moving inside a channel touching again the trend line.



Figure 10. The reader can appreciate how the software represents the trend lines at different scales and how the evolution of prices can be interpreted from the trend line framework.

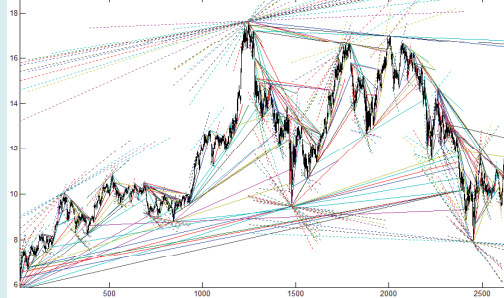


Figure 11. Representation completes of the processing of the time series of TEF in terms of all the trend lines. This analysis is performed for a given criteria that governs the trend line generation and they line time. Graphics like that can be compared for a different set of criteria in order to tune the rules.

Results

The developed application mines the prices of financial assets from free web information providers like *google/finance* and *yahoo/finance*. These providers offer stock market historical data for free.

The MATLAB code developed led us to observe how new lines can appear in each simulation step because a new time-series value is introduced, reporting a realistic simulation of what it could happen in a real-time exploration. The results obtained with our program have been represented in figures 2-11.

The program has also the possibility of representing all the trend lines that had been appeared in all the analyzed historic as in figure 11 or only some parts of the historic as showed in figures 7 and 8. All that information is stored to be used to any statistical study. It is interesting to note that the program works well at different time scales.

It is interesting to observe that the evolution of prices seems often to follow trend lines and it is surprising that trend lines act as a resistance or supports for prices over and over.

Conclusions

There are many techniques used to analyze time-series that have been developed for a long time. The systematic study of time-series of prices under the trend line framework had been poorly addressed despite the fact that trend lines are widely used for most traders that plot them on charts, now using digital support tools, but in a subjective manner. This approach is based on processing information graphically and let to address the time-series analysis under a new framework. The proposed approach is quite non linear and a lot of work must be done to establish new techniques to filter lines or, for instance, for merging lines with nearly the same slope which appear close between them. Artificial intelligence techniques are assumed to have something to say about it. Image processing techniques can also be considered; for example, the special points through which a lot of lines converge can be easily identified if the set of lines are seen as a black and white image only identifying the zones with high density of pixels from the lines. Although those studies are at an early stage a set of patterns of crossing lines have been identified that are regularly repeated and can provide interesting information on establishing future projections. As future work, some statistical validation must be done for which the developed software will be useful.

Acknowledgements

This work was supported by UVIC under the grant R0904.

References

- [1] J.J. Murphy. Technical analysis of the financial markets: a comprehensive guide to trading methods and applications. 1999
- [2] B. Mandelbrot and W H Freeman .The Fractal Geometry of Nature, & Co, 1982; ISBN 0716711869.
- [3] H. L. Richard and B. Mandelbrot. The (Mis)Behavior of Markets: A Fractal View of Risk, Ruin, and Reward. New York: Basic Books, 2004; ISBN 0-465-04355-0.
- [4] B. Mandelbrot, N. Taleb. "A focus on the exceptions that prove the rule". Financial Times. Retrieved 2010-10-17.
- [5] L. Ortiz de Zárate. Técnicas relevantes para la especulación en los mercados financieros. El método menos es más. Printed in Spain. 2009. ISBN 978-84-613-0449-3.

Anexo E.5: Filtering Discrete-Time Series of Financial Assets under a Classical Control Theory Perspective

Filtering Discrete-Time Series of Financial Assets under a Classical Control Theory Perspective

Juan Ricardo Rivera Peruyero¹, Pere Marti-Puig²

Dept. of Digital Information Technologies, University of Vic (UVic), 08500 Vic (Barcelona), Spain

¹juanricardo.rivera@uvic.cat, ²pere.marti@uvic.cat

Abstract. It is commonly accepted the great difficulty in detecting the changes in the time-series of prices of financial assets, especially in the short term. Market traders that employ technical analysis use, among other tools, different averages of prices –such as moving and exponential moving averages– and the points where they cross in order to obtain signals for supporting their decisions. However, such signals appear time-delayed so that, when they appear, the major price movement has almost finished. All these kind of means can be computed by very simple digital filters. In this paper we interpret all those averages under the digital filtering framework and the classical theory of control. This allows to modify filter characteristics in function of only one parameter that can change with an error -or the volatility of a given magnitude- in order to obtain different behaviors, as for example, some responses that exhibit a signal overshoots at the same time that the stability of filters are guaranteed. The goal is to reduce the delay of signals following the price movements. The first results are presented together with the candlestick representation of prices and the signals. The performance of such approach is evaluated on back tests using by day-by-day time-series of stocks.

Keywords: Linear and adaptive filtering, overshoot signal responses, time-series of financial assets, trading support.

1 Introduction

The efficient-market hypothesis states that stock price movements are governed by the random walk hypothesis and thus are inherently unpredictable. From this hypothesis the price of a particular financial instrument is governed by a random walk and hence it is unpredictable. If the random walk hypothesis is false, as many others suggest, then there could exist some potential correlation between the instrument price and some past values of prices –or other kind of indicators– and therefore some potential profit could be made. Another important aspect to consider is, according to the studies of Mandelbrot [1][2][4] and many others, that the probability density functions of financial data are not Gaussian which contrasts with the assumptions made from some financial models. It is widely reported that financial data distributions exhibits bigger tails than those of the Bell curves. Especially relevant is the Black-Scholes model used to establish the price of stock options and other derivative investment instruments because its Gaussian assumption causes that the extreme values of the real distributions are underestimated incurring in a false perception of risk [4]. There is no discussion, however, in the enormous difficulty of predicting future evolution of markets. People who believe that it is possible state that the prices move in trends and its mandatory to detect trend changes in its first stages to obtain recurrent profits. Market actors support their activity by means, signals and oscillators to have some objective references in order to obtain a well-defined actuation pattern. There are also some research focused on developing sets of rules that permit that algorithms can operate in the market automatically and independently of human emotions. A lot of work has been done in the area of Neural Networks. Other trading systems generate alerts when a set of signals cross between them or change their slope in a predefined way [3][5]. Those systems are based in the use of signals that, sometimes, can be described by very simple discrete filters. Following this approach a geometric average signal can be obtained by filtering the prices with a first-order infinite impulse response (IIR) filter. More sophisticated signals can be obtained from most sophisticated filters. Interpreting the signals under the filtering framework means to adopt the point of view from which a signal is the result of filtering a time series, usually prices. The introduction of filters in the signal generation let us interpret results in terms of band of frequencies and their poles and zeros on the Z plain as well their steady-state responses in terms of control theory. In order to provide a new set of signals for trading in this seminal work we propose a method to obtain a new set of signals to support decisions following the discrete filter approach.

2 Discrete time systems. A brief preliminary

Most of the filters required to obtain technical analysis signals such as geometric average means can be viewed as systems of ‘type 0’, according to a classification given

in control theory that classifies filters according to their capability to follow known inputs as unitary steps, ramps and second order polynomials. Some important drawbacks are reported for the type zero systems when they are used to follow a signal; they cannot follow a ramp, increasing an error of approximation as the time increases. Type zero filters can also make a steady state error to a step input. However, 'type one' filters never incur in error at step responses and are able to follow ramps with constant error. Type-two systems can follow ramps as time increases and are able to follow second order polynomial inputs with only a constant error in their steady-state responses.

A discrete-time dynamic system is described by a difference equation that denotes the output at the discrete-time positions by a linear combination of the input at k and N past values of inputs and outputs. N is the order of the filter. A linear second order difference equation with $x(k)$ as input variable and $y(k)$ as output variable takes the form:

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) + b_0 x(k) + b_1 x(k-1) + b_2 x(k-2) \quad (1)$$

where a_i and b_j are coefficients of the difference equation. In that case this difference equation is normalized since the coefficient of $y(k)$ is 1. The Z-transform of the discrete-time signal $Z[y(k)]$, or just $Y(z)$, is defined as follows:

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(k) z^{-k} \quad (2)$$

Usually the systems are presented in the Z domain by their Z-transfer functions that can be obtained first by taking the Z-transform of both sides of the difference equation and applying the Z-transforms properties of linearity and time delay-property. The Z-transfer function $T(z)$ from $X(z)$ to $Y(z)$ given in (1) takes the form:

$$T(z) = \frac{X(z)}{Y(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (3)$$

The zeros of the transfer function are the roots of numerator polynomial, and the poles are the z-roots of the denominator polynomial. The poles determine the stability property of the system. For discrete systems, we can analyze the system behaviors from different pole locations in the Z-plane. For instance, a system is unstable when any pole is located to the right of the imaginary axis. The stability boundary in the z-plane is the unit circle $z=1$. The system is stable when all poles are located inside the unit circle and unstable when any pole is located outside.

In the automatic control field context a system $T(z)$ that depends on a variable parameter K are often written following the feedback structure of figure 2 using another discrete system $G(z)$. The product $KG(z)$ is known as the open loop system of $T(z)$.

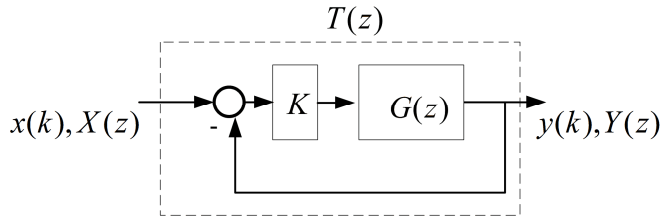


Fig. 1. Bloc diagram representing the filter transfer function of $T(z)$ in terms of $G(z)$ and parameter K .

The dependence between $G(z)$ and $T(z)$ in the structure of figure 1 is clear:

$$T(z) = \frac{KG(z)}{1 + KG(z)} \quad \text{or} \quad G(z) = \frac{T(z)}{K(1 - T(z))} \quad (4)$$

Control engineers write $T(z)$ in function of $KG(z)$, the open-loop transfer function, because different properties of $T(z)$ can be explained directly from the poles and zeros of $G(z)$. For example, knowing the poles and zeros of $G(z)$ it is easy to know all the possible positions of poles of $T(z)$ in the Z-plane for all K going from zero to infinite. That information is known as the root locus and it is drawn in figure 2.

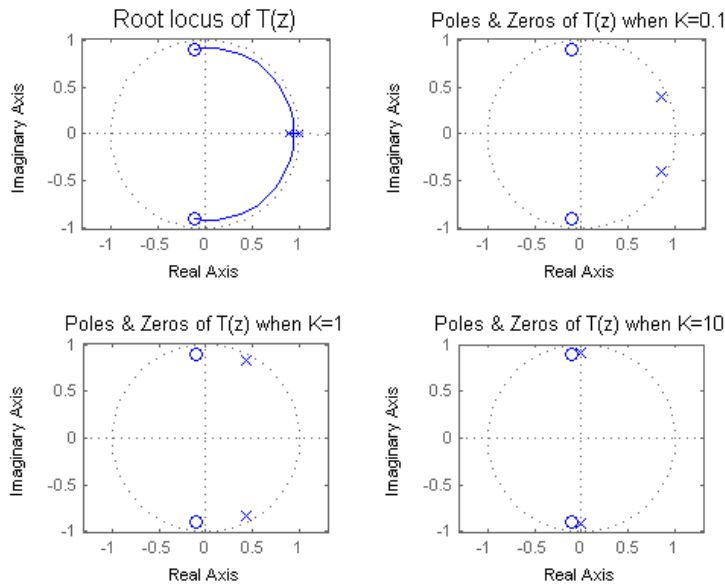


Fig. 2. Example of a root locus representation in the upper left plot and three pole-zero plots for $K=0.1, 1$ and 10 . All cases share the same $G(z)$.

The knowledge of the position of poles brings information about the frequencies that the filter lets pass and the ones that attenuate.

From $G(z)$ it is also easy to know the steady state responses to some previously defined inputs as steps, ramps, and polynomial in order to compare systems between them, the $T(z)$ is classified in function of the number of poles that $G(z)$ has in $z=1$. $G(z)$ can be written as:

$$G(z) = \frac{1}{(z-1)^N} \frac{B(z)}{A(z)} \quad (4)$$

If $G(z)$ has N poles in $z=1$ the system $T(z)$ is classified as of ‘type- N ’. The bigger the number N is the better accuracy response the system exhibits, however the problem of the stability becomes more critical.

The steady-state error that a system of type-zero does to a step can be written using $G(z)$ in the form [6]:

$$\frac{1}{1 + \lim_{z \rightarrow 1} G(z)} \quad (5)$$

And similarly, the steady-state error that a system of type-one does to a normalized ramp takes the form [6]:

$$\frac{1}{1 + \lim_{z \rightarrow 1} G(z)} \quad (6)$$

3 Signal generation for fast tracking of prices

3.1 Time-series of prices and its representation

In the common approach to series of market prices, the prices are stored every time interval Δt . An this interval can be from seconds or minutes to weeks or even months. In every interval of time Δt , considering $\Delta t = t_k - t_{k-1}$, the financial asset prices are given by four values: the first price obtained at the beginning of Δt known as the opening $\{o_k\}$, the highest price $\{h_k\}$ and the lowest price $\{l_k\}$ both reached in Δt , and the last price, known as the closing $\{c_k\}$. The series of prices are currently represented graphically. There are different options. The most common are bars or candlesticks. Figure 3 shows a bar representation.

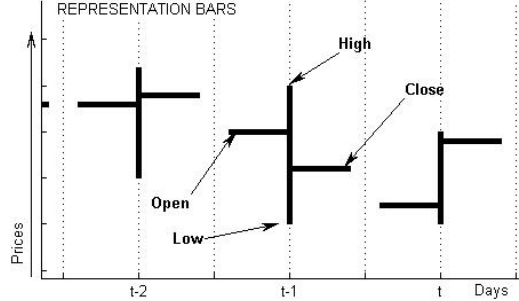


Fig. 3. Representation of the four price values considered at days t-2, t-1 and t. These prices are at the opening (o), the lowest (l), the highest (h) and the closing (c).

3.2 Signal generation by filter outputs crosses

The simplest strategy to produce signals in order to support investor's decisions consist on the generation of two different filter outputs. It is required that one of this outputs follows the prices faster than the other. The faster output appears over the slower one when the prices go up and under it when the prices go down. Each cross produces a signal. The crosses indicate a change in trend. The filtering process is required to remove short time erratic fluctuations that can be interpreted as fast frequency noise. The investor can decide some action in the next time periods. A fast decision can be taken just at the opening price of the immediate Δt time-interval. For instance this way of operation can be shown with the filters $T_1(z)$ and $T_2(z)$ that slightly differs in its wide band. $T_1(z)$ and $T_2(z)$ are second order type-one low pass filters with transfer functions:

$$T_1(z) = \frac{0.2 - 0.2z^{-1} + 0.058z^{-2}}{1.2 - 2.1z^{-1} + 0.9858z^{-2}} \quad (7)$$

$$T_2(z) = \frac{0.3 - 0.3z^{-1} + 0.087z^{-2}}{1.3 - 2.2z^{-1} + 0.987z^{-2}} \quad (8)$$

Figure 4, on the left, shows $T_1(z)$ and $T_2(z)$ filter magnitudes against the discrete frequency. Both filters are quite similar but it can be seen, taking the 0dB line by reference, that $T_1(z)$ has a smaller wide-band than $T_2(z)$ and therefore its response follows prices movements a little bit slower than $T_2(z)$. The same figure 4, on the right, shows the zero-pole representation in the Z-plane. Both filters share the pair of complex-conjugate zeros but have different pair of complex-conjugate poles that are located quite close between them. Figure 5 shows a detail of the output of both filters when the input is the time-series of highest prices. That information is overlapped with prices representing in blue and in red the time-intervals in which the prices are expected to go up and down respectively. Figures 6 and 7 show the performance of $T_1(z)$ and $T_2(z)$ on different time intervals of the time-series of Santander stock prices.

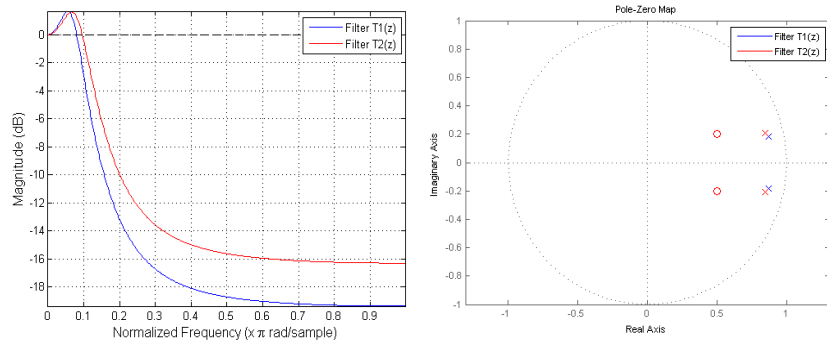


Fig. 4. On the left, $T_1(z)$ and $T_2(z)$ filter magnitudes against the normalized frequency. On the right zero-pole representation of $T_1(z)$ and $T_2(z)$ on the Z-plane

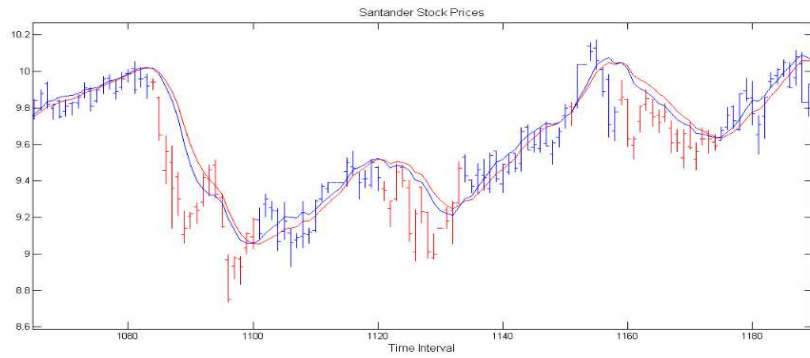


Fig. 5. Detail of the outputs of filters $T_1(z)$ and $T_2(z)$ when the input is the time-series of highest prices. The crosses generate the signals that could be employed to alert of trend changes.

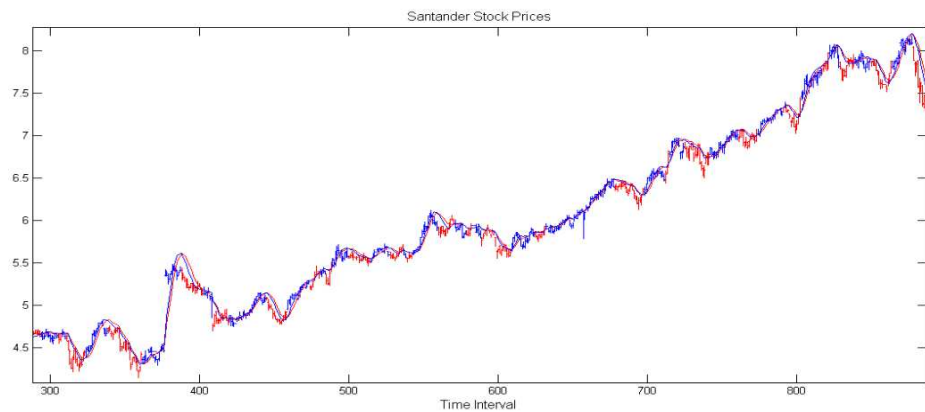


Fig. 6. Performance of output crosses generated by $T_1(z)$ and $T_2(z)$ when in both cases the input is a time-interval of the time-series of Santander stock highest prices

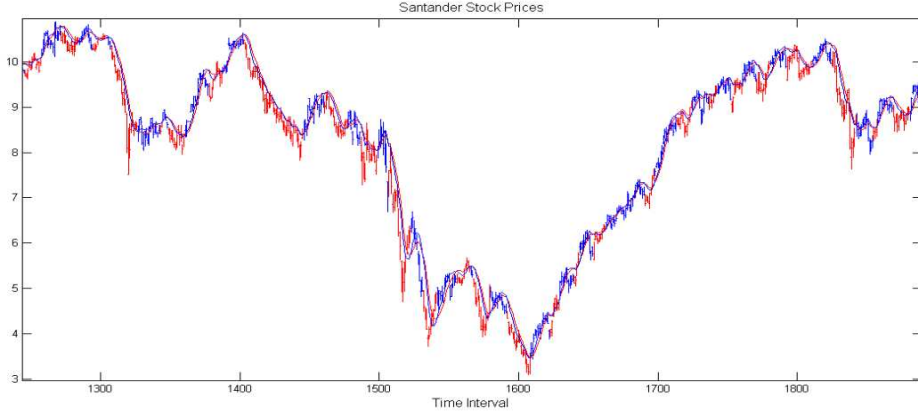


Fig. 7. Performance of output crosses generated by $T_1(z)$ and $T_2(z)$ when in both cases the input is the Santander stock highest prices. The time-interval is different of the one in figure 6

3.3 Signal generation by detecting changes in the slope of a filter output

Another simple strategy that depends on only one filter output consists in generating signals when the filter output changes its slope. Once a filter that produces an appropriate output is selected it is required the calculus of its first derivative and if it is greater than zero it is concluded that the prices move up, otherwise if the slope is negative, it is assumed that the prices move down.

Considering the sample time as the unit, the first order derivative can be fast approximated in the discrete world by adding a zero in $z=1$ which means that the numerator of the original filter has to be multiplied by a factor $(1-z^{-1})$. For instance, by taking the filter $T_1(z)$ of the previous section the new filter will be:

$$T_3(z) = (1 - z^{-1})T_1(z) = \frac{0.2 - 0.4z^{-1} + 0.258z^{-2} - 0.058z^{-3}}{1.2 - 2.1z^{-1} + 0.9858z^{-2}} \quad (9)$$

This kind of filters eliminate the continuous component because they have a zero in $z=1$ and therefore their output oscillates around the zero value. Filters with this behavior can be seen as what in technical analysis is known as oscillators. In fact the technique presented in this section provide a general method to develop oscillators and has the advantage that their filter formulation lets interpret their characteristics in the frequency domain. This is an important information that helps to modify the filter coefficients in order to achieve some desired properties. In next figure 8, on the left, it is presented the magnitude of filters $T(z)$ and $(1-z^{-1})T(z)$ where $T(z)$ is the filter origin that has been used to construct the oscillator. In the same figure, on the right, the distribution of the poles and zeros that both filters share together with the zero in $z=1$.

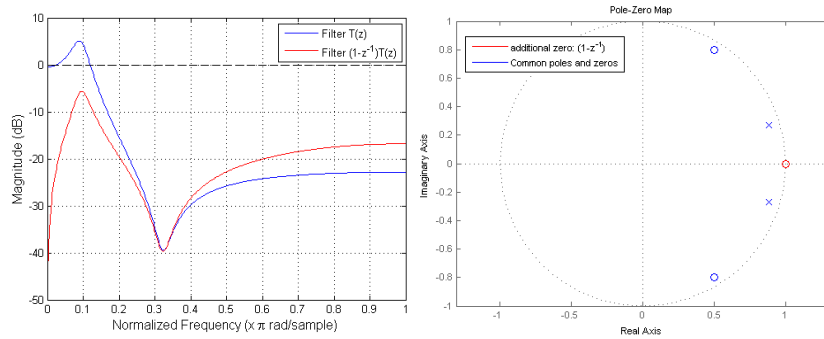


Fig. 8. On the left, magnitudes of filters $T(z)$ and $(1-z^{-1})T(z)$ against the normalized frequency. On the right, in blue, the zeros and poles of $T(z)$ on the Z-plane, in red, the zero at $z=1$.

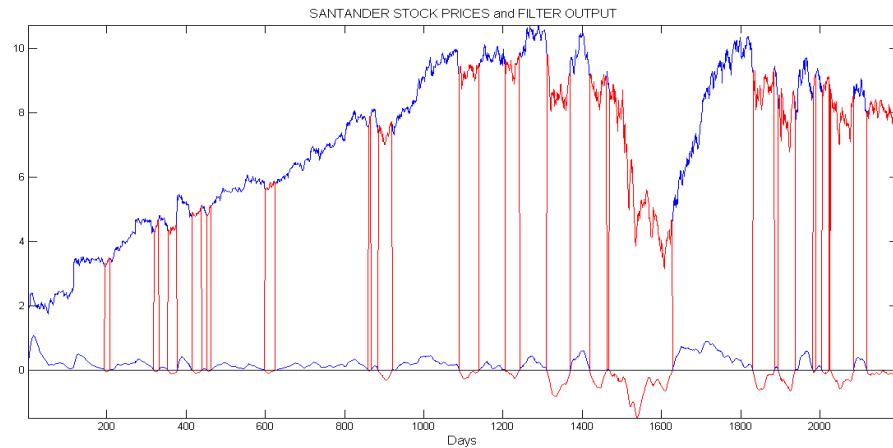


Fig. 9. Performance of filter $(1-z^{-1})T(z)$ shown in figure 8 on the Santander stock day prices. The filter input are the time-series of high values. The signals are generated when the filter output crosses the zero. In blue it is shown the periods in which the prices are expected to go up while in red to go down. In that case, this strategy clearly wins the market.

In order to show the robustness of that strategy the same filter of figure 8 is evaluated on different time-series of stocks that belong to the Spanish index IBEX 35 and we mark in blue color the time intervals that the system expects the prices to increase and in red to decrease. The evaluation has been done graphically. In all cases the time intervals are of one day. The set of stocks are Telefonica S.A., Repsol, Gas Natural, Banco Popular, Inditex I Bolsas y Mercados Españoles showed on figures 10, 11, 12, 13, 14 and 15 respectively. The international symbol tickers of those values are: TEF.MC, REP.MC, GAS.MC, POP.MC, ITX.MC and BME.MC in the same order.

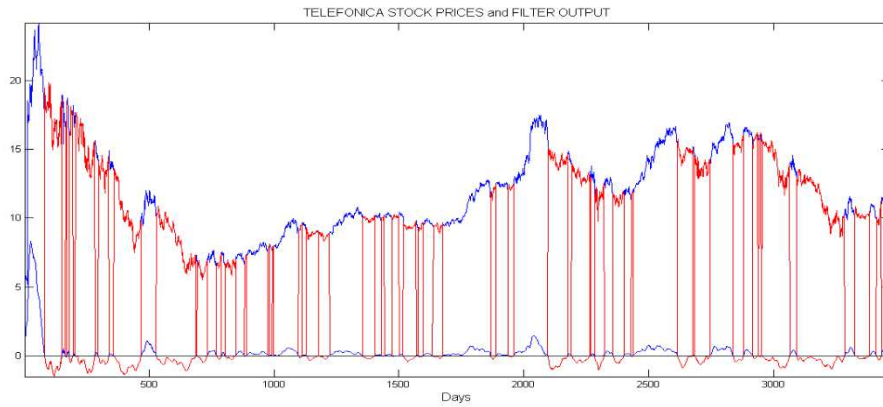


Fig. 10. Performance of filter $(I-z^{-1})T(z)$ shown in figure 8 on Telefonica stock prices.

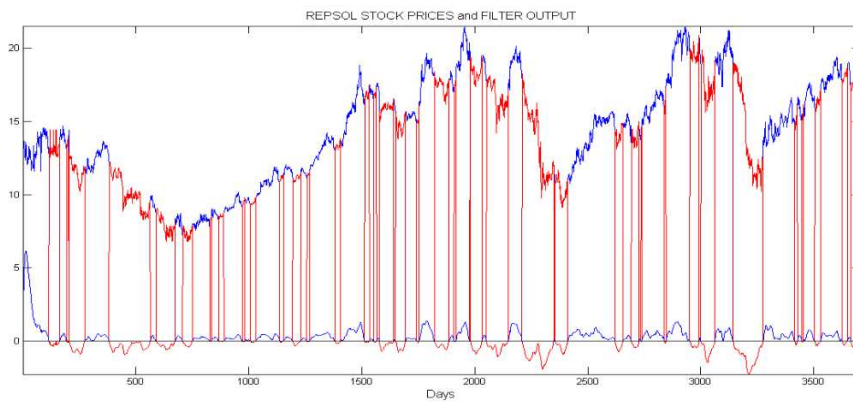


Fig. 11. Performance of filter $(I-z^{-1})T(z)$ shown in figure 8 on Repsol stock prices.

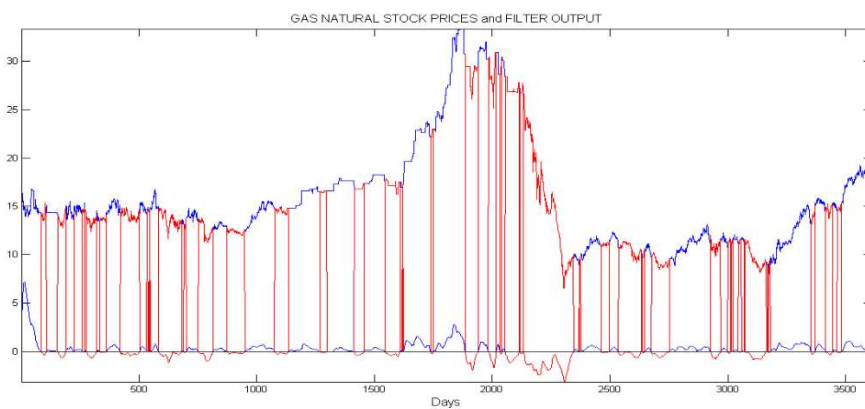


Fig. 12. Performance of filter $(I-z^{-1})T(z)$ shown in figure 8 on Gas Natural stock prices.

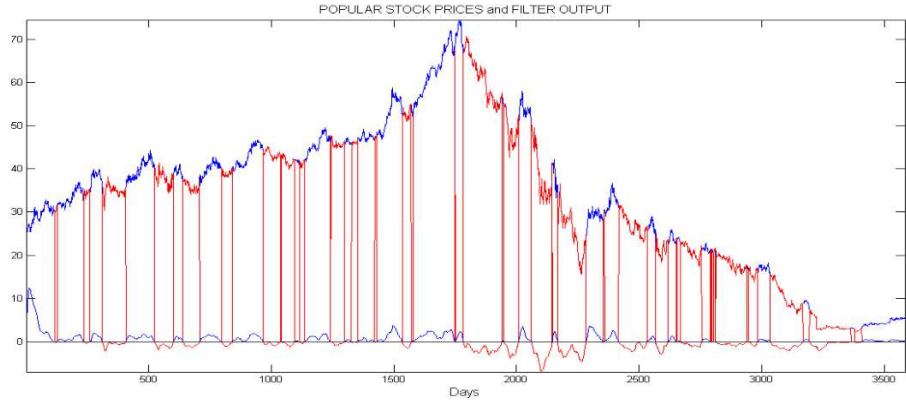


Fig. 13. Performance of filter $(1-z^{-1})T(z)$ shown in figure 8 on Banco Popular stock prices.

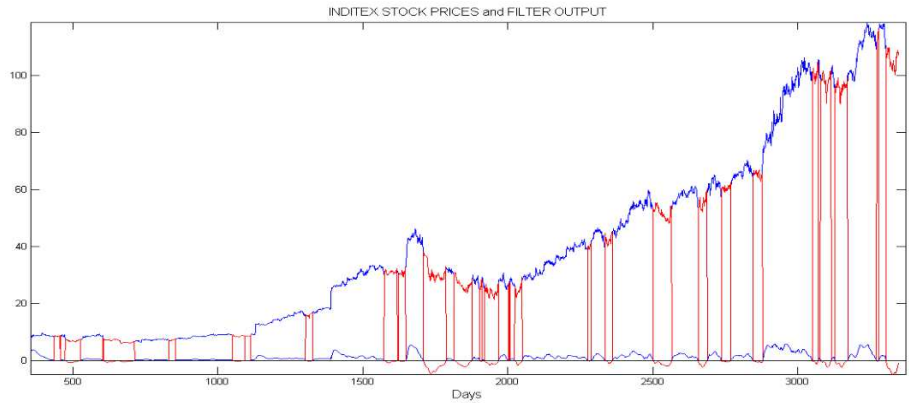


Fig. 14. Performance of filter $(1-z^{-1})T(z)$ shown in figure 8 on Inditex stock prices.

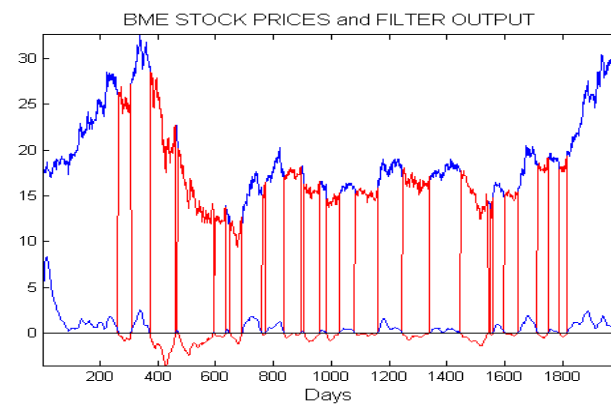


Fig. 15. Performance of filter $(1-z^{-1})T(z)$ shown in figure 8 on Bolsas y Mercados Españoles stock prices.

4 Conclusions

In this seminal work we have begun the exploration of markets under the perspective of discrete filtering in order to evaluate the possibility of taking some advantages of that formulation. The final goal is supporting trader market decisions. In order to interpret how the filters work and how to modify them to obtain some desired characteristics the discrete signal processing and the discrete control theory can provide some insights; especially by the frequency filter characterization and by the zero-pole representation in the Z-plane. In that work we have introduced two basic strategies to obtain signals useful to take decisions. The one is based on crosses of two filter outputs and the other is based on crosses to zero of outputs of a single filter. In the first case the filters are of low-pass type and in the second are mostly of band-pass type. First analysis suggests that this approach can be quite interesting and robust, especially in the case of those filters which work as oscillators. Some results that have been presented in a graphical form evaluate the performance of the same filter on a set of stock values without any tuning required. However in order to evaluate more precisely the performance of those methods a battery of tests have to be done especially before consider any practical application. It is required for instance to know the percentage of true and false signals as well the potential benefits or losses derived from each signal. Nowadays there are some financial products that let any particular investor take advantage of up and down price movements. Otherwise it is mandatory the exploration of new strategies from the combinations of those basic ones in order to obtain more accurate signal generators.

Acknowledgments

All authors have partially been supported by the University of Vic under grant R0904.

5 Bibliography

1. Mandelbrot, B. B., and Freeman, W. H. (1982). *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman & Co.
2. Mandelbrot, B. B., and Taleb, N. (2006). A focus on the exceptions that prove the rule. *Financial Times*, March 23. Retrieved on 2010-10-17 from <http://www.ft.com>
3. Marti-Puig, P., and Rivera-Peruyero, J. R. (2011). Web-based system for evaluating day trading strategies. In: *Proceedings of 7th International Conference on the Next Generation Web Services Practices (NWeSP)*, 250-255, Salamanca, Spain. DOI: 10.1109.
4. Richard, H. L., and Mandelbrot, B. B. (2009). *The (Mis)Behavior of Markets: A Fractal View of Risk, Ruin, and Reward*. New York: Basic Books.
5. Wilder, J. W. (1978). *New Concepts in Technical Trading Systems*. Greensboro, NC: Trend Research.
6. Ogata, K. (1995) *Discrete-Time Control Systems*. Prentice Hall International, Inc. New Jersey, USA.

Introduction

There is no discussion about the enormous difficulty of predicting future evolution of markets. However, there is no agreement about how to model the time-series of prices of financial assets. Some people believe that prices move in trends and that the detection of trend changes in their first stages can be used to obtain recurrent profits. We explore this assumption. Market actors support their activity by means of signals and oscillators to have some objective rules in order to obtain a well-defined actuation pattern independently of human emotions and sometimes automatically. Some of these systems are based in the use of signals that, sometimes, can be described by very simple discrete filters that work on the prices. Following this approach a geometric average signal can be obtained by filtering the prices by a first-order infinite impulse response (IIR) filter. More sophisticated signals can be obtained from most sophisticated filters. Interpreting the signals under the filtering framework means to adopt the point of view from which a signal is the result of filtering a time series, usually prices. The introduction of filters in the signal generation let us interpret results in terms of band of frequencies and their poles and zeros on the Z plane as well their steady-state responses in terms of control theory. In order to provide a new set of signals for trading, in this seminal work, we propose a method to obtain a new set of signals to support decisions following the discrete filter approach.

Discrete time systems. A brief preliminary

A discrete-time system is described by a difference equation that denotes the output at the discrete-time position k by a linear combination of the input at k and N past values of inputs and outputs. N is the order of the filter. He have for instance:

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) + b_1 x(k) + b_2 x(k-1) + b_3 x(k-2)$$

where a_i and b_i are the difference equation coefficients. The Z-transform of the discrete-time signal $Z\{y(k)\}$, or just $Y(z)$, is defined as follows:

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(k)z^{-k}$$

Systems are presented in the Z domain by their Z transfer function $T(z)$ that is the quotient of $Y(z)$ and $X(z)$. This is:

$$T(z) = \frac{X(z)}{Y(z)} = \frac{b_2 + b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

The zeros and the poles are the numerator and denominator polynomials roots respectively. For discrete systems, we can analyze the system behaviors from different pole locations in the Z-plane. For instance a system is stable when all poles are located inside the unit circle otherwise it is unstable.

In the automatic control field context a system $T(z)$ that depends on a variable parameter K is often written following the feedback structure of figure 1 using another discrete system $G(z)$. The product $KG(z)$ is known as the open loop system of $T(z)$.

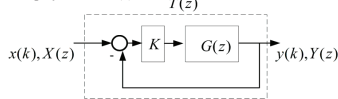


Fig. 1. Bloc diagram representing the filter transfer function of $T(z)$ in terms of $G(z)$ and parameter K .

$$T(z) = \frac{KG(z)}{1 + KG(z)} \quad \text{or} \quad G(z) = \frac{T(z)}{K(1 - T(z))}$$

Control theory classifies filters according to their capability to follow known inputs as unitary steps, ramps and second order polynomials. 'Type zero' filters make a steady state error to a step input however 'type one' filters never incur in error at step responses and are able to follow ramps with constant error. 'Type-two' systems can follow ramps as time increases and are able to follow second order polynomial inputs with only a constant error in their steady state responses. Geometric average means used in technical analysis are 'type 0' systems. They cannot follow a ramp, increasing an error of approximation as the time increases.

Different properties of $T(z)$ can be explained directly from $G(z)$. For example, knowing their poles and zeros we also know all the positions of poles of $T(z)$ in the Z-plane for all K going from zero to infinite. That information is known as the root locus and it is represented in figure 2.

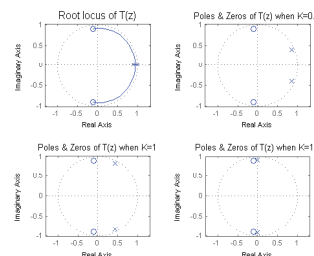


Fig. 2. Example of a root locus representation in the upper left plot and three pole-zero plots for $K=0.1, 1$ and 10 . All cases share the same $G(z)$.

The knowledge of the position of poles brings information about the normalized frequencies that the filter lets pass and the ones that attenuate. Given $T_1(z)$ and $T_2(z)$, we have:

$$T_1(z) = \frac{0.2 - 0.2z^{-1} + 0.058z^{-2}}{1.2 - 2.1z^{-1} + 0.9858z^{-2}} \quad T_2(z) = \frac{0.3 - 0.3z^{-1} + 0.087z^{-2}}{1.3 - 2.2z^{-1} + 0.987z^{-2}}$$

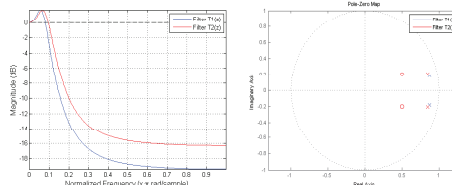


Fig. 3. On the left $T_1(z)$ and $T_2(z)$ filter magnitudes against the normalized frequency. On the right zero-pole representation of $T_1(z)$ and $T_2(z)$ on the Z-plane.

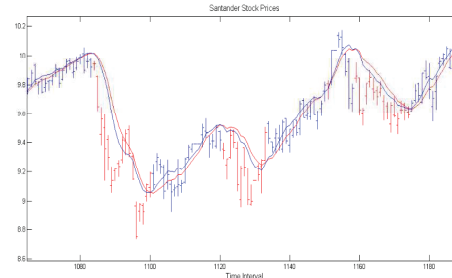


Fig. 4. Detail of the outputs of filters $T_1(z)$ and $T_2(z)$ when the input is the time-series of highest prices. The crosses generate the signals that could be employed to alert of trend changes.

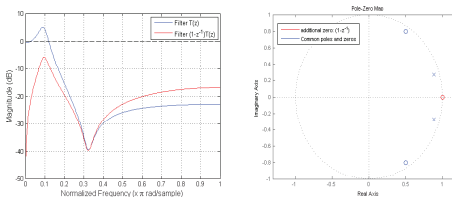


Fig. 5. On the left magnitudes of filters $T_1(z)$ and $(1-z^{-1})T_1(z)$ against the normalized frequency. On the right in blue the zeros and poles of $T_1(z)$ on the Z-plane; in red the zero at $z=1$.

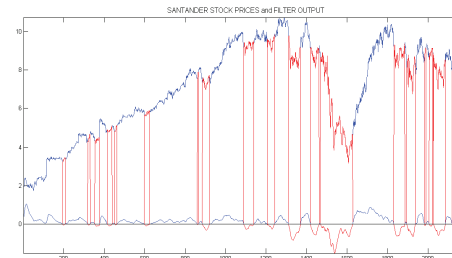


Fig. 6. Performance of filter $(1-z^{-1})T_1(z)$ shown in figure 8 on the Santander stock day prices. The filter input are the time-series of high values. The signals are generated when the filter output crosses the zero. In blue it is shown the periods in which the prices are expected to go up while in red to go down. In that case this strategy clearly wins the market.

Signal alerts by crosses of filter outputs

The simplest strategy to produce alert signals in order to support investor's decisions consist on the generation of two different filter outputs. It is required that one of this outputs follows the prices faster than the other. The faster output appears over the slower one when the prices go up and under it when the prices go down. Each cross produces a signal. The crosses indicate a change in trend. The filtering process is required to remove short time erratic fluctuations that can be interpreted as fast frequency noise.

The investor can decide some action in the next time period. A fast decision can be taken just at the opening price of the immediate time-interval k . For instance this way of operation can be shown with the filters $T_1(z)$ and $T_2(z)$ that slightly differs in its wide band. See figure 3: $T_1(z)$ and $T_2(z)$ are second order 'type-one' low pass filters; on the left, the $T_1(z)$ and $T_2(z)$ filter magnitudes against the discrete frequency. It can be seen, taking the 0dB line as a reference, that $T_1(z)$ has a smaller wide-band than $T_2(z)$ and therefore its response follows prices movements a little bit slower than $T_2(z)$. In the same figure, on the right, the zero-pole Z-plane representation. Figure 4 shows a detail of the output of both filters when the input is the time-series of highest prices. That information is overlapped with prices representing in blue and in red the time-intervals in which the prices are expected to go up and down respectively.

Signal alerts by a zero crossings or by detecting changes in the slope of a filter output

Another simple strategy that depends on only one filter output consists in generating signals when the filter output changes its slope. Once a filter that produces an appropriate output is selected it is required the calculus of its first derivative and if it is greater than zero it is concluded that the prices move up, otherwise if the slope is negative, it is assumed that the prices move down. Considering the sample time as the unit, the first order derivative can be fast approximated in the discrete world by adding a zero in $z=1$ in the filter transfer function which means that the numerator of the original filter has to be multiplied by a factor $(1-z^{-1})$ and the problem is reduced to the detection of zero-crosses. For instance, by taking the filter $T_1(z)$ of the previous section the new filter will be:

$$T_1(z) = (1-z^{-1})T_1(z) = \frac{0.2 - 0.4z^{-1} + 0.258z^{-2} - 0.058z^{-3}}{1.2 - 2.1z^{-1} + 0.9858z^{-2}}$$

This kind of filters eliminate the continuous component and their output oscillate around the zero value. That technique provides a general method to develop oscillators providing a nice interpretation of its behavior in the frequency domain. Figures 5 shows the frequency filter interpretation and figure 6 its performance.

Conclusions

In this seminal work we have begun the exploration of markets under the perspective of discrete filtering in order to evaluate the possibility of taking some advantages of that formulation. The final goal is supporting trader market decisions. The discrete signal processing and control theory can provide some insights to interpret how the filters work and how to modify them to obtain some desired characteristics; especially by the frequency filter characterization and by the zero-pole Z-plane. In that work we have introduced two basic strategies to obtain signals useful to take decisions. The one is based on crosses of two filter outputs and the other is based on crosses to zero of outputs of a single filter. In the first case the filters are of low-pass type and in the second are mostly of band-pass type. The first analysis suggests that this approach can be quite robust, especially in the case of those filters which work as oscillators. Some results that have been presented in a graphical form evaluate the performance of the same filter on a set of stock values without any tuning required. In order to evaluate more precisely the performance of those methods a battery of tests have to be done especially before consider any practical application. It is required for instance to compute the percentage of true and false signals as well the potential benefits or losses derived from each one.

Acknowledgments

All authors have partially been supported by the University of Vic under grant R0904.

Anexo E.6: Empirical evidence for day-to-day persistence of higher and lower American and European stock indices

Empirical evidence for day-to-day persistence of higher and lower American and European stock indices

Juan Ricardo RIVERA-PERUYERO^a and Pere MARTI-PUIG^{a,1}

^a *Data and Signal Processing Research Group, U Science Tech, University of Vic - Central University of Catalonia, Perot Rocaguinarda 17, 08500 Vic, Catalonia, Spain*

Abstract. The Hurst exponent is the only real number required to describe a type of stochastic process known as fractal Brownian motion that is employed to model time series of financial origin. The Hurst exponent can also be taken as a measure of the long term memory of time series. In this work we analyze four daily time series of prices (Open, Close, High and Low) of some American and European stock indices. There are very few studies of the characteristics of daily High and Low time series. However, an empirical, in-depth, comparative study of all four series reveals some consistent patterns at the day-to-day time scale. In all the cases considered, the Hurst exponents of High and Low time series are appreciably higher than those obtained for Open and Close. Our analysis indicates that High and Low index values are more persistent (positively auto-correlated) and, therefore, more predictable than Open and Close values, whose time series fluctuate between persistence and anti-persistence (negative auto-correlation) and in the long term have a Hurst exponent close to 0.5, characteristic of a random walk process.

Keywords. Hurst exponent, fractal dimension, Fractal Brownian Motion (FBM), long term persistence, American and European stock indices

Introduction

Financial data providers usually present time series of financial asset prices by giving four prices per time interval Δt_k . These four values are: the market opening, the highest, the lowest and the closing prices in each Δt_k . With these values they form the four time series named Open, High, Low and Close. The time interval Δt_k can go from fractions of seconds to months. In the case of our study, Δt_k is one day.

In order to know the characteristics of the High and Low time series related to the Open and Close series, we have performed an empirical study of the Hurst exponent (H) of these four series corresponding to some major American and European stock indices. We also propose a simple, dynamic way to monitor the temporal evolution of H from estimates made on fragments of the time series under analysis in order to verify whether the results obtained are consistent.

¹Corresponding Author: Book Production Manager, IOS Press, Nieuwe Hemweg 6B, 1013 BG Amsterdam, The Netherlands; E-mail: bookproduction@iospress.nl.

The origin of H stems from the work of English hydrologist Harold Edwin Hurst, who studied the aperiodic cycles of Nile River flooding using data that the Egyptians kept during 847 years [1].

The Hurst exponent, H , is a real number between zero and one, and it is the only parameter required to describe a type of stochastic process known as Fractal Brownian Motion (FBM), a mathematical generalization of the Brownian Motion (BM) process. In fact, a stochastic representation of BM itself is obtained from the general expression for an FBM when $H = 0.5$. Historically, the standard BM process has been widely used in the characterization of time series of financial origin, since it was first proposed by Bachelier in 1900 [2]. Today, however, many studies suggest that FBM provides better fits to financial time series, and substantial work has been done on this [3]. Parameter H is accepted as a measure of the long-term memory, or persistence, in a series, as well as being a measure of the reduction rate of auto-correlation in a time series. Moreover, H is strongly related to the self-similar or fractal dimension, D , according to the relation: $D = 2H$. The temporal and spectral properties of FBM are widely reported [4]. A time series presents different properties depending on its value of H . For instance, when $0 \leq H \leq 0.5$, it is said that the series are anti-persistent or anti-correlated. In those series a period of growth strongly tends to be followed by one of decline, and nearby values will tend to revert to a mean. Moreover, their spectral representations present high-frequency content. When $H = 0.5$, data are independent, and it is said that the process is memory-less. There is neither positive nor negative correlation between an observation and a future observation; all are equally likely to be higher or lower than the current one. In that case, the time series has the characteristics of the standard BM, also known as a Random Walk (RW). Finally, when $0.5 \leq H \leq 1$, there is correlation between a given observation and future observations. In that case the time series is known as persistent or positively correlated, meaning that an increase in values will most likely be followed by an increase in the short term and a decrease, by another decrease in the short term. Figure 1 shows three synthetic time series generated by the method presented in [5] with H values of 0.1, 0.5 and 0.9 respectively.

During recent years, in the framework of analyzing time-series of financial origin, H is being intensively applied with different purposes. Some work [6][7] is focused on prediction, while other effort [8] is devoted to the study of futures prices in the energy sector and to the sub-prime crisis [9] to the sub-prime crisis. Much attention has been focused also on knowing the dependence of H on time and, therefore, the capability to estimate H from short time series [10] [11] [12]. This time-dependence has been applied to the study of developed and emerging markets [13] [14] [15] and used to establish links with important parameters like the volatility [15] and Hurst exponent estimation techniques are reported by Couillard and Davison [16] and Mielniczuk and Wojdyła [17], and more methods are based on wavelet analysis [18] [19] [20] [21]. Almost all the analyses in those contributions have been done on time series of daily returns. As far as we know, there are no comparable studies of the four (Open, Close, High and Low) time series of the same financial asset.

1. Used dataset of daily time series

Today, time series of daily prices of almost all financial assets in the world can be obtained for free from both YAHOO!® and Google® finance sections. With the

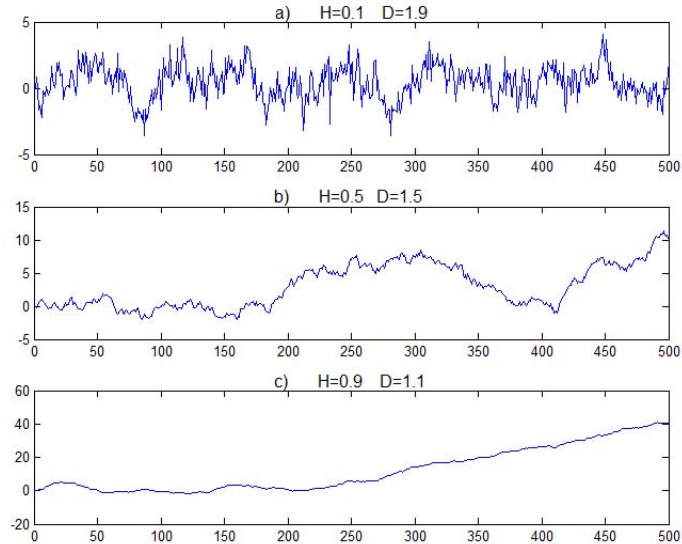


Figure 1. Synthetic time series with Hurst exponents (H) and fractal dimension (D) of a) $H=0.1$, $D=1.9$; b) $H=0.5$, $D=1.5$ and c) $H=0.9$, $D=1.1$.

MATLAB® environment it is easy to implement functions for mining web information. Thus, by knowing the identifier - the *ticker symbol* - of any financial asset, it is possible to obtain all of the historical data available. The downloaded data can be analyzed with Matlab® using the facilities it provides for testing new algorithms quickly and visualizing results. Both financial websites provide equivalent data sets in almost the same format, although small differences exist. While Yahoo finances provides the prices of the assets together with data for the splits and stock dividends (if any) with the user having to make the corrections, Google® provides the data with those corrections done.

2. Hurst exponent estimators and evaluation of their dependence upon sequence length, an empirical test

The first Hurst exponent estimators, the Rescaled Range (R/S) algorithm [1], was evaluated by using thousands of synthetic time sequences of different lengths and known H obtained according the algorithm in Abry and Sellan [5]. The same was done for all other Hurst estimators provided by the MATLAB® wavelet toolbox: the Discrete Second-Order Derivative (DSOD) and its Wavelet-based adaptation (WDSOD) [22], as well as the Wavelet Regression estimator (WR) [18] [23]. The results obtained confirm that the larger the sequence, the better the standard deviation and the mean square error of all estimators, as can be seen in figure 2. Our empirical results also show that, for the synthetic time sequences employed, the R/S and WR algorithms introduce bias in the estimation, while DSOD and WDSOD do not. This can be seen in the histogram representations of figure 3 corresponding to H estimates of synthetic random sequences of

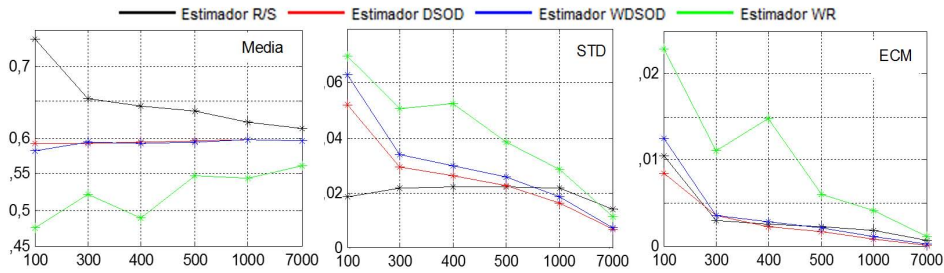


Figure 2. Mean, standard deviation and mean square error of estimators R/S, DSOD, WDSOD and WR depending on the lengths of the sequences.

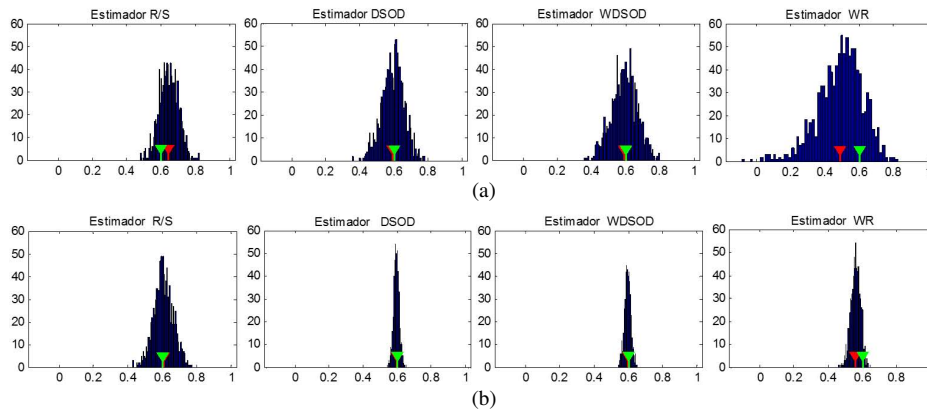


Figure 3. Estimation histograms from methods: R/S, DSOD, WDSOD and WR when synthetic sequences have a known H of 0.6 and a length of a) 400 and b) 1600. Red and green markers show the average and the true value.

known H (equal to 0.6) and different lengths, as well as in the mean representation of figure 2. This experiment gives us an idea of the minimum sequence length required to produce a given estimation variance and provide an idea of the estimation accuracy of H according to the length of the sequences used. For instance, we can appreciate that the DSOD algorithm applied to sequences of 300 samples provides estimates with standard deviations around 0.3 (see again figure 2).

By assuming a given estimation quality, these results suggest the possibility to obtain different Hurst exponent estimations from small sub-sequences obtained from an entire time series. Thus, instead of employing all the samples for a unique estimation, \hat{H} , of H , we can observe the variations of \hat{H} through time, if we select the sub-sequences with a sliding window. Following that idea, the DSOD estimator is selected because, for the synthetic sequences employed in our test, it presents the best performance in terms of standard deviation.

3. Dynamic estimation of H

To obtain dynamic estimates of H for every new time sequence value i , named $\hat{H}(i)$, we select the sub sequences under the sliding window as follows: for given time series of L samples $[x(1) \dots x(i) \dots x(L)]$, we consider $L - N + 1$ sub-sequences of length N , named $\mathbf{x}_N(i)$ which are taken in the form:

$$\mathbf{x}_N(i) = [x(1) \ x(i-1) \ \dots \ x(i-N+1)]^T, \quad (1)$$

then, given $\mathbf{x}_N(i)$ the estimation $\hat{H}(i)$ will be:

$$\hat{H}(i) = \overline{H}_{DSOD}(\mathbf{x}_N(i)), \quad (2)$$

where \overline{H}_{DSOD} stands for the DSOD algorithm. It is clear that the first estimate is obtained after the first N samples, $i = N$, and that new estimates can be obtained at each successive i . As the consecutive sub-sequences values of $\mathbf{x}_N(i)$ and $\mathbf{x}_N(i+1)$ only differ by removing one value and replacing it, see equation 1, it is also expected that consecutive estimates will not differ very much.

4. Results

In this section, the dynamic evolution of Hurst exponent estimations corresponding to Open, Close, High and Low time series, named $\hat{H}_O(i)$, $\hat{H}_C(i)$, $\hat{H}_H(i)$ and $\hat{H}_L(i)$ are shown by means of graphics. All the estimates have been obtained according to equation 2. For simplicity and to make the graphics readily interpretable, the horizontal axis shows the number of the resulting time series, not the dates of the stock values. For instance, figure 4 represents a little over six thousand consecutive Hurst exponent estimations of $\hat{H}_O(i)$, $\hat{H}_C(i)$, $\hat{H}_H(i)$ and $\hat{H}_L(i)$ for Dow Jones daily prices obtained for windows of $N=1600$. This figure shows that $\hat{H}_H(i)$ and $\hat{H}_L(i)$ are usually considerably greater than $\hat{H}_O(i)$, $\hat{H}_C(i)$ with $\hat{H}_H(i)$ and $\hat{H}_L(i)$ satisfying, respectively, the conditions: $0.6 < \hat{H}_H(i) < 0.7$ and $0.55 < \hat{H}_L(i) < 0.75$. Additionally, mean values of both $\hat{H}_H(i)$ and $\hat{H}_L(i)$, named $\bar{H}_H(i)$ and $\bar{H}_L(i)$, are about 0.67, a value characteristic of persistent time series, and it is very close to the overall estimates of $\bar{H}_H(i)$ and $\bar{H}_L(i)$ for the original sequence. In contrast, $\hat{H}_O(i)$ and $\hat{H}_C(i)$ alternate at values around 0.5 and exhibit periods of weakly persistent and more variable behavior. $\bar{H}_O(i)$ and $\bar{H}_C(i)$ are 0.473 and 0.499, respectively, both close to 0.5 (the value of the standard BM process).

Similar results have been obtained for all the American and European stock market indices explored. In order to show only some few examples we have selected the same window length of $N = 1600$ to compute the dynamic estimates given by equation 2 for American stock index Standard and Poor 500 (GSPC) in figure 5 and Nasdaq 100 (NDX) in figure 6.

Next, in order to evaluate the persistence of results independently of the lengths of the sub-sequences involved in the estimations, we repeat the same experiments for different values of N . In order to compact information those results have been summarized in tables and extended also to European stock indices as DAX (GDAXI) from Germany, CAC 40 (FCHI) from France, Financial Times Stock Exchange (FTSE 100) from UK and the Spanish Exchange Index (IBEX).

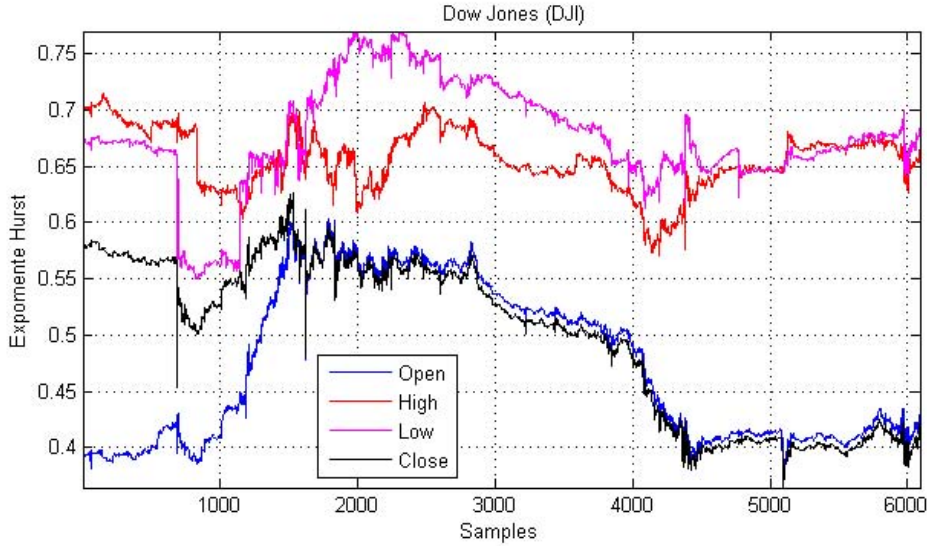


Figure 4. Dynamical Hurst exponent estimations for Open, High, Low and Close daily time series of Dow Jones prices when $N = 1600$. For simplicity, abscissa values are not dates, but subsequence numbers.

Tables 1, 2 and 3 group four American indices identified by their ticker symbols. Each table is obtained using the same DSOD algorithm, but changing N in order to show the persistence of the results obtained for a large range of N . All tables share the same format. Their first four columns correspond to the means of $\hat{H}_O(i)$, $\hat{H}_C(i)$, $\hat{H}_H(i)$ and $\hat{H}_L(i)$, named $\bar{H}_O(i)$, $\bar{H}_C(i)$, $\bar{H}_H(i)$ and $\bar{H}_L(i)$, respectively. The next six columns are the percentage of time in which a given condition is fulfilled. So that, for instance, symbol $H_O > (H_C, H_L, H_H)$ stands for the percentage of the series in which the Hurst exponent estimation of $\hat{H}_O(i)$ is higher than $\hat{H}_C(i)$, $\hat{H}_H(i)$ and $\hat{H}_L(i)$. Accordingly, in table 4 the same computations are presented for the European stock indices DAX, CAC 40, FTSE 100 and IBEX, but for only a $N = 700$.

5. Conclusions

The comparative analysis of the four time series of prices at daily time scales in terms of Hurst exponents of several important American and European stock indices reveals a persistent pattern. Most of the time the High and Low time series present bigger Hurst exponents than the Open and Close time series. Open and Close values, $\hat{H}_O(i)$ and $\hat{H}_C(i)$, oscillate from persistent to anti-persistent behavior around an H above or below 0.5 (the characteristic of a pure random walk or BM process). Moreover, for all the indices analyzed, Hurst exponent estimations for High and Low time series, $\hat{H}_H(i)$ and $\hat{H}_L(i)$, are greater than 0.6, and the dynamic analysis shows that is so for almost all of the time. These results are robust with respect the length of the input sub-sequences, as long as that length is greater than 300 to ensure acceptable estimation quality. The results are also robust with several estimation algorithms; they are very similar for WDSOD and DSOD.

Table 1. Dow Jones (DJI), NASDAQ Composite (IXIC), Nasdaq 100 (NDX) and S&P 500 (GSPC). Hurst exponent estimations with N=700.

	DJI	IXIC	NDX	GSPC
\hat{H}_O	0.468	0.583	0.540	0.528
\hat{H}_C	0.499	0.630	0.546	0.516
\hat{H}_L	0.669	0.731	0.697	0.716
\hat{H}_H	0.652	0.710	0.681	0.662
$H_O > (H_C, H_L, H_H)$ (%)	0.82	0.01	0.72	0.00
$H_C > (H_O, H_L, H_H)$ (%)	1.51	3.25	0.56	0.00
$H_L > (H_O, H_C, H_H)$ (%)	68.19	52.72	55.78	77.68
$H_H > (H_O, H_C, H_L)$ (%)	29.49	36.72	42.94	22.32
$H_L > (H_O, H_C)$ (%)	94.08	83.27	96.79	97.62
$H_H > (H_O, H_C)$ (%)	95.16	69.68	89.21	96.37

Table 2. Dow Jones (DJI), NASDAQ Composite (IXIC), Nasdaq 100 (NDX) and S&P 500 (GSPC). Hurst exponent estimations with N=400.

	DJI	IXIC	NDX	GSPC
\hat{H}_O	0.469	0.582	0.539	0.529
\hat{H}_C	0.499	0.633	0.550	0.517
\hat{H}_L	0.667	0.733	0.694	0.712
\hat{H}_H	0.650	0.713	0.681	0.662
$H_O > (H_C, H_L, H_H)$ (%)	0.67	0.16	1.90	0.00
$H_C > (H_O, H_L, H_H)$ (%)	1.33	4.82	2.13	0.00
$H_L > (H_O, H_C, H_H)$ (%)	63.08	48.83	55.78	73.81
$H_H > (H_O, H_C, H_L)$ (%)	34.92	36.72	42.94	26.19
$H_L > (H_O, H_C)$ (%)	92.17	77.99	91.81	96.97
$H_H > (H_O, H_C)$ (%)	95.39	69.56	85.93	96.14

Table 3. Dow Jones (DJI), NASDAQ Composite (IXIC), Nasdaq 100 (NDX) and S&P 500 (GSPC). Hurst exponent estimations with N=1600.

	DJI	IXIC	NDX	GSPC
\hat{H}_O	0.473	0.556	0.515	0.532
\hat{H}_C	0.499	0.616	0.518	0.518
\hat{H}_L	0.667	0.722	0.686	0.732
\hat{H}_H	0.657	0.704	0.681	0.660
$H_O > (H_C, H_L, H_H)$ (%)	0.00	0.00	0.00	0.00
$H_C > (H_O, H_L, H_H)$ (%)	0.00	2.06	0.03	0.00
$H_L > (H_O, H_C, H_H)$ (%)	69.10	55.13	41.74	91.78
$H_H > (H_O, H_C, H_L)$ (%)	30.90	42.81	58.22	8.22
$H_L > (H_O, H_C)$ (%)	99.97	96.47	99.93	100.00
$H_H > (H_O, H_C)$ (%)	100.00	73.25	98.02	99.76

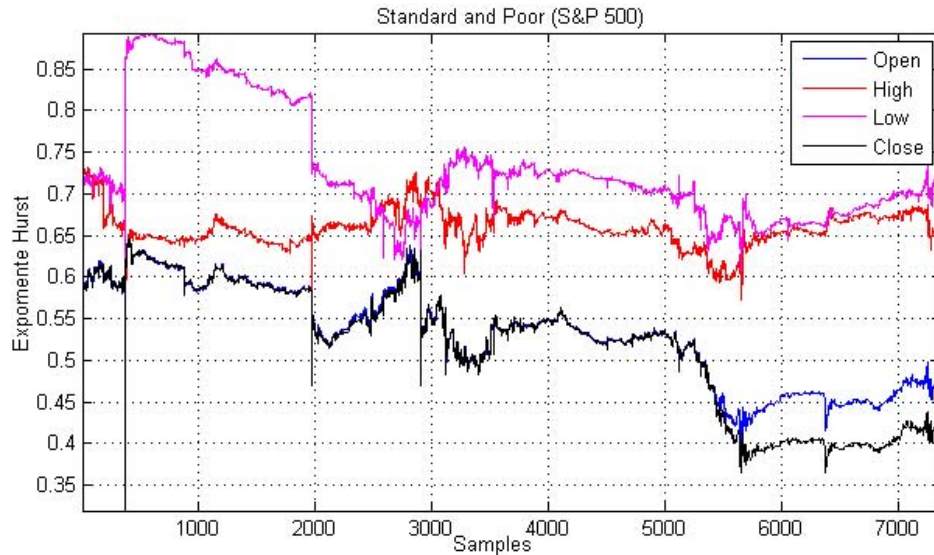


Figure 5. Hurst exponent estimation of Open, Low, High and Low time series obtained with DSOD algorithm and $N = 1600$ for the American stock index Standard and Poor 500 (S&P 500) (GSPC). For simplicity, abscissa values are not dates, but subsequence numbers.

Table 4. DAX (GDAXI), CAC 40 (FCHI), Financial Times Stock Exchange (FTSE 100) and the Spanish Exchange Index (IBEX) Hurst exponent estimations using DSOD algorithm and $N = 700$.

	FCHI	GDAXI	FTSE	IBEX
\hat{H}_O	0.412	0.523	0.511	0.553
\hat{H}_C	0.521	0.517	0.540	0.556
\hat{H}_L	0.658	0.625	0.619	0.658
\hat{H}_H	0.636	0.618	0.669	0.638
$H_O > (H_C, H_L, H_H)$ (%)	0.00	17.23	13.64	28.26
$H_C > (H_O, H_L, H_H)$ (%)	3.32	6.09	0.04	0.00
$H_L > (H_O, H_C, H_H)$ (%)	64.14	38.83	23.08	39.88
$H_H > (H_O, H_C, H_L)$ (%)	32.55	37.84	63.24	31.86
$H_L > (H_O, H_C)$ (%)	96.68	73.13	86.25	64.42
$H_H > (H_O, H_C)$ (%)	98.02	88.62	94.08	94.08

With respect to R/S and WR algorithms, which we have shown introduce a positive bias in the synthetic sequences, similar results are reproduced, but with the bias. What is significant is that relative differences between estimates made on those four time series still persist quite independently of the estimator used, and, by increasing the length of the sequences, the results of all estimators tend to converge. A time series with H greater than 0.6 is clearly positively auto-correlated or persistent. So, it can be concluded that, at the daily time scale, it is more feasible to predict shortly forthcoming High and Low

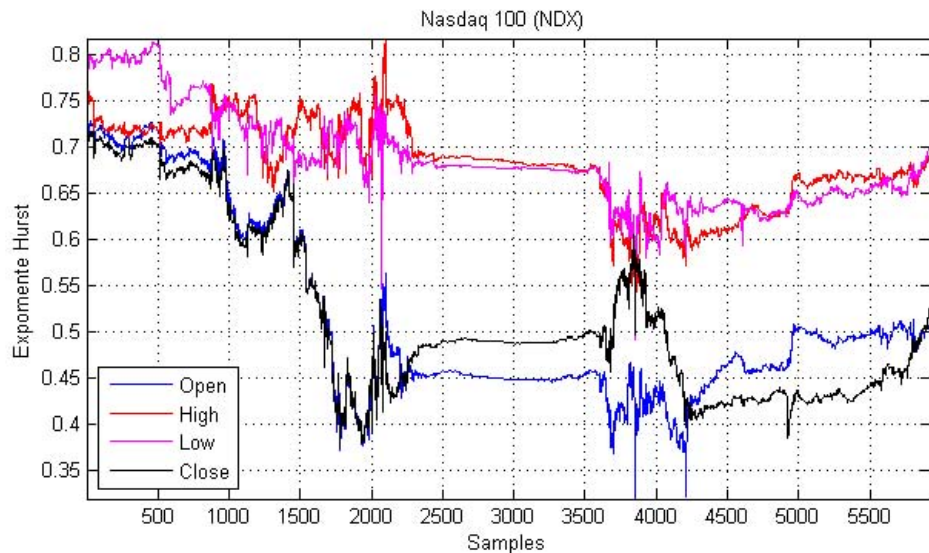


Figure 6. Hurst exponent estimation of Open, Low, High and Low time series obtained with DSOD algorithm and $N = 1600$ for the American stock index Nasdaq 100 (NDX). For simplicity, abscissa values are not dates, but sequence numbers.

values than the corresponding Open and Close values. As far as we know, the time series of High and Low values have seldom been analyzed individually or even in comparison with Close values. Perhaps that is the reason why our observation has remained unreported. Our preliminary work suggests that similar results apply to time series of stock prices. Future work must be done in order to know whether similar results are repeated for different time scales and, of course, whether practical advantage can be taken from this knowledge.

Acknowledgements

This work has been partially supported by the UVic-UCC under the grant R0947. We also want to thank Charlie Miller for his help with English language.

References

- [1] H.E. Hurst, Long-term storage capacity of reservoirs. *Trans. Amer. Soc. Civil Eng.* **116** (1951), 770–808.
- [2] J.M. Courtault, Y. Kabanov, B. Bru, P. Crépel, I. Lebon, A. Le Marchand, Louis Bachelier on the centenary of théorie de la spéculation.
- [3] S. Tzouras, C. Anagnostopoulos, E. McCoy, Financial time series modeling using the hurst exponent. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **425** (2015), 50–68.
- [4] B.B. Mandelbrot, J.W. Van Ness, Fractional brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM review* **10** (1968), 422–437.

- [5] P. Abry and F. Sellan . The wavelet-based synthesis for fractional brownian motion proposed by f. sellan and y. meyer: Remarks and fast implementation, *Applied and computational harmonic analysis* **3** (1996), 377–383.
- [6] B.Q.K. Rasheed, B. Qian, Hurst exponent and financial market pre- dictability *IASTED conference on Financial Engineering and Applications (FEA 2004)* (2004), 203–209.
- [7] C. Eom, S. Choi, G. Oh, W.S. Jung, Hurst exponent and prediction based on weak-form e cient market hypothesis of stock markets. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **387** (2008), 910–917.
- [8] A. Serletis, A.A. Rosenberg, The hurst exponent in energy futures prices. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **380** (2015), 325–332.
- [9] K. Yim, G. Oh, S. Kim, An analysis of the financial crisis in the kospi market using hurst exponents. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **410** (2014), 327–334.
- [10] A. Carbone, G. Castelli, H. Stanley, Time-dependent hurst exponent in financial time series. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **344** (2004), 267–271.
- [11] J.A. Matos, S.M. Gama, H.J. Ruskin, A. Al Sharkasi, M. Crane, Time and scale hurst exponent analysis for financial markets. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **387** (2008), 3910–3915.
- [12] R. Morales, T. Di Matteo, R. Gramatica, T. Aste, Dynamical generalized hurst exponent as a tool to monitor unstable periods in financial time series. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **391** (2012), 3180–3189.
- [13] J. Alvarez-Ramirez, E. Rodriguez, G. Fernandez-Anaya, Time-varying hurst exponent for us stock markets. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **387** (2008), 6159–6169.
- [14] D.O. Cajueiro and B.M. Tabak, The hurst exponent over time: testing the assertion that emerging markets are becoming more e cient. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **336** (2004), 521–537.
- [15] D.O. Cajueiro B.M. Tabak, The rescaled variance statistic and the determination of the hurst exponent. *Mathematics and Computers. Simulation* **70** (2005), 172–179.
- [16] M. Couillard, M. Davison, A comment on measuring the hurst exponent of financial time series. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **348** (2005), 404–418.
- [17] J. Mielniczuk, P. Wojdyło, Estimation of hurst exponent revisited. *Computational Statistics & Data Analysis* **51** (2007), 4510–4525.
- [18] P. Flandrin, Wavelet analysis and synthesis of fractional brownian motion. *Information Theory, IEEE Transactions on* **38** (1992), 910–917.
- [19] Z. Wang, D. Guo, X. Li, Y. Fei, Estimating hurst exponent with wavelet packet *in: Computer-Aided Industrial Design and Conceptual Design in: Computer-Aided Industrial Design and Conceptual Design, 2006. CAIDCDÁ06* (2006), 1–4.
- [20] A. Chamoli, A.R. Bansal, V. Dimri, Wavelet and rescaled range approach for the hurst coefficient for short and long time series. *Computers & Geosciences* **33** (2007), 83–93.
- [21] S. Albeverio, P. Jorgensen, A. Paolucci, On fractional brownian motion and wavelets. *Complex Analysis and Operator Theory* **6** (2012) , 33–63.
- [22] J. Istas, G. Lang, Quadratic variations and estimation of the local hölder index of a gaussian process. *Annales de lâÀIHP Probabilités et statistiques* (1997), 407–436.
- [23] J.M. Bardet, G. Lang, G. Oppenheim, A. Philippe, S. Stoev, M.S. Taqqu, Semi-parametric estimation of the long-range dependence parameter: a survey. *Theory and applications of long-range dependence* (2003), 557–577.