

**EFFECTIVITAT DEL MÈTODE  
D'ENSENYAMENT DE LES FRACCIONS  
EN UNA ESCOLA RESPECTE AL GRAU DE  
COMPRESIÓ D'AQUEST CONCEPTE EN  
ELS ALUMNES**

TREBALL DE FINAL DE GRAU  
EN MESTRA D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA

LAIA MATEOS RIUS

CURS 2017 - 2020

TUTOR: VICTOR GRAU TORRE-MARÍN

UNIVERSITAT DE VIC - UNIVERSITAT CENTRAL DE CATALUNYA

VIC, MAIG DE 2020



---

## Agraïments

---

M'agradaria donar les gràcies a totes les persones que han fet possible i s'han involucrat en aquest projecte.

A la meua família, per ser-hi i recolzar-me sempre. A la meua mare, al meu pare, a la Ceclina i als meus avis, als que hi són i als que no; ells sempre tan orgullosos de tot el que faig. A la Lara, la meua germana, per implicar-se en aquest treball amb tanta il·lusió com jo col·laborant amb la creació de les figures. Per ser la mà que m'acompanya sempre. Suport incondicional.

A l'Ari, per tota la paciència i confiança que diposita en mi, creant l'autoconfiança que necessito en moments crítics. Pel seu amor, suport moral i per ser-hi sempre. Infinites gràcies.

A tots els meus amics i amigues, pel seu suport moral i la seva amistat.

A l'Olga, l'Anna i la Sílvia per fer de conillots d'índies amb el qüestionari i ajudar-me, així, a millorar-lo.

Als companys de la facultat, per compartir aquest gran aprenentatge durant aquests anys. En especial a la Marina, la Kabita, l'Helena, la Núria, la Irina, la Chadia, l'Anna, la Júlia, l'Ester i en Roger. Per ser-hi sempre i créixer junts com a persones i com a professionals. Us desitjo el millor i espero coincidir a les escoles amb vosaltres.

A la Marina (una altra vegada), per ser piràmide i positivitat, pel seu suport i confiança des del primer dia. No hauria sigut el mateix sense tu.

A la Ceci, pels seus consells professionals durant aquests anys i pel seu coneixement compartit. I a en Koro, la Cèlia i la Gina, pel seu amor com si fos una més de la família.

A l'Estel i la Margarita, mestres de l'escola, per la seva col·laboració amb el meu estudi. A la Mariona, la directora, per la seva disposició, il·lusió i confiança.

Als professors de la universitat, per tots els coneixements compartits gràcies als quals he arribat on soc ara. Especialment a la Isabel Sellas, la Mariona Casas, en Joan Callarisa, en Víctor Grau, l'Arnau Amat, l'Arnau Vernis i la Mia Güell, que han marcat aquest camí d'una manera més personal.

A la Isabel Sellas, pels seus coneixements i dedicació. Per ser la inspiració d'aquest projecte. Pels comentaris constructius i per l'amor que transmet cap a les matemàtiques i el seu ensenyament.

Al meu tutor, Víctor Grau, per la paciència, coneixements i dedicació. Per guiar-me i ajudar-me sempre que ho he necessitat. Moltes gràcies.

Gràcies a totes i cadascuna d'aquestes persones, professionals, família i amics, perquè sense vosaltres aquest projecte no hagués sigut el mateix.



# RESUM - ABSTRACT

---

## Resum

---

Aquest estudi es centra en la relació entre el mètode d'ensenyament de les fraccions d'una escola del Gironès i el grau de comprensió d'aquest concepte en els seus alumnes. Les dades obtingudes provenen d'un qüestionari realitzat pels alumnes de 6è que van a aquesta escola des d'educació infantil i de dues entrevistes realitzades a dues mestres de l'escola. La finalitat d'aquest estudi és saber si la metodologia que utilitza l'escola ajuda als seus alumnes a comprendre el concepte de fracció i de fraccions equivalents. Les conclusions indiquen el grau de comprensió dels alumnes en referència a aquests dos conceptes tenint en compte les respostes i les justificacions que han donat en el qüestionari. Aquestes respostes han estat comparades amb el que diuen diferents autors, com són: S.J. Lamon (2012), P. Flores i M. Torralbo (2011), D.M. Clarke, A. Roche i A. Mitchell (2008) o J. A. Van de Walle, K. S. Karp & J. M. Bay-Williams (2013).

**Paraules clau:** Matemàtiques, nombres racionals, fraccions, fraccions equivalents

---

## Abstract

---

This study focuses on the relationship between the method of teaching the fractions in a school in Gironès region and the degree of understanding of this concept in its students. The data obtained comes from a questionnaire conducted by 6th graders who go to this school from early childhood education and from two interviews conducted with two teachers from the school. The purpose of this study is to find out if the methodology used by the school helps its students to understand the concept of fraction and equivalent fractions. The conclusions indicate the degree of understanding of the students about these two concepts taking into account the answers and justifications they have given in the questionnaire. These responses have been compared to what different authors say, such as: S.J. Lamon (2012), P. Flores & M. Torralbo (2011), D.M. Clarke, A. Roche & A. Mitchell (2008) or J. A. Van de Walle, K. S. Karp & J. M. Bay-Williams (2013).

**Key words:** Mathematics, rational numbers, fractions, equivalent fractions

# ÍNDEX

1. Introducció	8
1.1 Objectius, pregunta i hipòtesi de recerca	10
1.2 Estructuració de la recerca	10
2. Marc teòric	11
2.1 Introducció a les fraccions	12
2.1.1. Què són les fraccions?	12
2.1.2. Interpretacions de les fraccions	12
o FRACCIÓ COM A COMPARACIÓ PART-TOT	13
o FRACCIÓ COM A MESURA	14
o FRACCIÓ COM A QUOCIENT	14
o FRACCIÓ COM A OPERADOR	14
o FRACCIÓ COM A RAÓ	15
2.1.3. Concepte d'unitat	16
2.1.4. Procés de partició	17
2.1.5. Comparació i equivalència de fraccions	18
2.1.6 Dificultats en l'aprenentatge de les fraccions	20
2.2 Aspectes generals de l'ensenyament de les matemàtiques	21
2.3 Les fraccions al currículum d'educació primària	22
3. Marc metodològic	24
3.1 Enfocament metodològic	25
3.2 Context d'obtenció de dades	25
3.2.1. L'ensenyament de les fraccions a l'escola	26
3.2.2. Selecció dels participants	27
3.3 Eines de recollida de dades	28
3.3.1. L'entrevista	28
o PRESENTACIÓ DE L'ENTREVISTA	28
o PRESENTACIÓ DE LA MESTRA	28
o CONEIXEMENTS MATEMÀTICS	29



o	LES FRACCIONS A L'AULA	29
o	CONTINGUTS I OBJECTIUS	30
3.3.2.	El qüestionari	31
o	SELECCIÓ DELS PARTICIPANTS	31
o	PREGUNTES REFERENTS AL CONCEPTE DE FRACCIÓ	32
o	PREGUNTES REFERENTS AL CONCEPTE DE FRACCIONS EQUIVALENTS	35
4.	Resultats de la cerca	37
4.1	Anàlisi de dades del qüestionari en relació al concepte de fracció	38
4.1.1.	Anàlisi de la pregunta 2	38
4.1.2.	Anàlisi de la pregunta 3	39
4.1.3.	Anàlisi de la pregunta 4	44
4.1.4.	Anàlisi de la pregunta 6	45
4.1.5.	Anàlisi de la pregunta 7	47
4.1.6.	Anàlisi de la pregunta 8	52
4.1.7.	Anàlisi de la pregunta 10	54
4.2	Anàlisi de dades del qüestionari en relació al concepte de fraccions equivalents	56
4.2.1.	Anàlisi de la pregunta 5	56
4.2.2.	Anàlisi de la pregunta 9	58
4.2.3.	Anàlisi de la pregunta 11	60
5.	Conclusions	62
5.1	Conclusions sobre els resultats de la recerca	63
5.2	Limitacions	68
5.3	Futures recerques	69
5.4	Valoració del procés	69
6.	Bibliografia	70
7.	Índex de taules	72
8.	Índex de figures	74

# 1. INTRODUCCIÓ

El present Treball de Final de Grau es centra en l'estudi de com influeix el mètode d'ensenyament de les fraccions en el grau de comprensió d'aquest concepte en l'alumnat. Les dades per a realitzar aquest estudi es van obtenir en el centre escolar que se'm va assignar per les Pràctiques III, en aquest cas, en una escola de la comarca del Gironès. Des d'un inici volia lligar l'estudi del Treball de Final de Grau amb l'escola on realitzes les Pràctiques III, però no volia dur a terme una intervenció, sinó analitzar en quin punt es troben els alumnes respecte als tres temes que es volien estudiar: el concepte de fracció, de fraccions equivalents i de suma de fraccions.

Així va ser com a finals d'octubre em vaig posar en contacte amb el centre per presentar-me i demanar permís per a poder realitzar el meu estudi. Un cop la directora va donar llum verda al meu estudi, vaig acabar d'estructurar totes les idees que tenia per començar l'estudi. El primer que vaig fer va ser posar-me en contacte amb la professora de la Universitat de Vic, Isabel Sellas, ja que va realitzar la seva Tesi Doctoral sobre l'ensenyament de les fraccions i ella em podria ajudar a buscar una bona manera per complir els meus objectius. La idea que li vaig presentar era senzilla: realitzar un qüestionari a alumnes de 6è de primària amb la finalitat de saber si entenen el concepte de fracció, el de fraccions equivalents i el de suma de fraccions. El meu dubte principal era com crear un qüestionari que em permetés valorar si els alumnes entenen el concepte en lloc de si sabien aplicar les normes que se'ls hagués pogut ensenyar al llarg de l'educació primària. Després d'una llarga tutoria, vam arribar a la conclusió que utilitzar el qüestionari que ella mateixa havia utilitzat en la seva Tesi Doctoral era una bona opció. De totes maneres, no hauria d'utilitzar el qüestionari sencer, ja que en aquest cas es treballen menys conceptes. També em va recomanar fer una prova pilot del qüestionari que tenia pensat fer amb la finalitat de veure quant temps es tardava a completar i per veure amb quines preguntes podia treure més informació.

Quan el qüestionari va estar provat, vaig parlar amb la mestra de 6è de primària per buscar un moment per poder passar els qüestionaris als alumnes. En aquest moment, la mestra em va comentar que encara no havien treballat la suma de fraccions, així que aquest concepte va quedar descartat de l'estudi. Un cop realitzat el qüestionari, va ser moment de fer les entrevistes amb diferents mestres. Aquestes entrevistes estaven pensades per fer-se de forma personal, mantenint directament una conversa amb cada mestra i, si em donaven permís, enregistrar-les amb àudio amb la finalitat de conservar tota la informació que em pogués donar cada una. A causa de l'estat d'alarma provocat per la COVID-19, les entrevistes no es van poder realitzar com tenir previst. Per aquest motiu, vaig simplificar l'entrevista creant un formulari de Google perquè les mestres poguessin contestar les preguntes de forma més ràpida i ordenada.

Paral·lelament a tot aquest procés, vaig recopilar diversos llibres i articles de diferents autors sobre l'ensenyament de les fraccions. Tota la informació que s'ha extret d'aquests documents ha servit per poder analitzar les respostes que els alumnes han donat a les preguntes del qüestionari.

---

## 1.1 Objectius, pregunta i hipòtesi de recerca

---

Per a realitzar la investigació, a l'inici em vaig plantejar uns objectius de recerca amb la finalitat d'assolir-los un cop finalitzat el procés. Aquests objectius són:

- ✚ Objectiu 1: Fer una recerca bibliogràfica sobre l'ensenyament-aprenentatge de les fraccions.
- ✚ Objectiu 2: Analitzar com influeix la metodologia de l'ensenyament de les fraccions d'una escola en la comprensió que tenen els alumnes sobre les fraccions.

Tenint en compte aquests objectius, la pregunta central de la meua investigació és la següent: Quina és l'efectivitat de la metodologia emprada per una escola en relació amb l'ensenyament de les fraccions respecte al grau de comprensió d'aquest concepte en el seu alumnat de 6è de primària?

Quan vaig escollir el tema de la meua investigació, vaig decidir dur-la a terme en el centre de pràctiques que se m'assignés. Un cop assignat, vaig descobrir que l'escola havia realitzat cursos amb la Universitat de Vic sobre l'ensenyament de les matemàtiques. Per aquest motiu, la meua hipòtesi és que la metodologia que utilitza l'escola afavoreix l'aprenentatge de les fraccions als seus alumnes.

---

## 1.2. Estructuració de la recerca

---

Aquest treball està organitzat en quatre grans blocs. El primer correspon al marc teòric, que conté els conceptes teòrics bàsics relacionats amb el tema de la recerca, fomentats a partir d'autors referents. Concretament, s'hi troben aquells conceptes necessaris per a analitzar posteriorment els qüestionaris realitzats pels alumnes.

El segon bloc correspon al marc metodològic. En primer lloc conté la definició del paradigma i de la metodologia. Tot seguit, s'exposa el context de l'obtenció de dades, detallant com treballa l'escola els conceptes que es volen estudiar i qui són els participants d'aquest estudi. Finalment, es troben detallades les dues eines utilitzades.

El tercer bloc correspon als resultats de la cerca, on es troben les respostes donades als qüestionaris organitzades en dos grans grups, un per a cada concepte treballat. Aquests dos grups queden desglossats amb els resultats de cada pregunta per separat.

El quart i últim bloc fa referència a les conclusions. La finalitat és donar resposta a la pregunta plantejada inicialment i reflexionar sobre si s'han complert els objectius. També s'hi troben possibles futures recerques, limitacions que m'he trobat al llarg del procés i una valoració sobre el procés i el que m'ha aportat com a futura mestra.

## 2. MARC TEÒRIC

En aquest apartat es desenvolupen els principats coneixements teòrics sobre el tema de la recerca a través de dos subapartats. El primer conté els conceptes teòrics bàsics necessaris per analitzar posteriorment els resultats de la recerca. El segon, en canvi, situa aquests conceptes dins el currículum escolar.

---

## 2.1 Introducció a les fraccions

---

### 2.1.1. Què són les fraccions?

La primera representació dels nombres racionals que va aparèixer a la història de la matemàtica va ser la fraccionaria (Flores i Torralbo, 2011).

Segons Lamon (2012), el mot *fracció* és utilitzat de dues maneres diferents: com a un numeral i, en un sentit més abstracte, com un nombre. En primer lloc, la fracció com a numeral, és un símbol per escriure nombres, com un sistema de notació que escriu dos nombres enters amb una barra entre ells:  $\frac{a}{b}$ . En segon lloc, les fraccions són nombres racionals no negatius. El nombre que es troba a la part superior s'anomena numerador i, el de la part inferior, denominador. L'ordre dels nombres és important, ja que no és el mateix  $\frac{3}{4}$  que  $\frac{4}{3}$ . El zero pot aparèixer en el numerador, però ho pot fer al denominador.

De totes maneres, l'autora puntualitza que no totes les fraccions tenen el segon sentit de la paraula. D'aquesta manera, els següents exemples es poden escriure en forma de fracció (*fraction form*) però no ho són:

$$\frac{-3}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\sqrt{4}}{2}, \frac{-12,2}{14,4}, \frac{1}{\frac{1}{4}}$$

### 2.1.2. Interpretacions de les fraccions

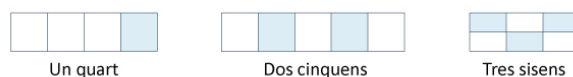
Entendre les fraccions significa entendre tots els conceptes que les fraccions poden representar. Un dels significats de fracció més utilitzats és el de fracció com a part-tot. Aquest és un dels més utilitzats en els llibres de text per representar les fraccions. Pot ser difícil imaginar-se les fraccions representades d'altres maneres, però aquells que investiguen com entendre el concepte de fracció creuen que l'alumnat entendria millor les fraccions si es donés més èmfasi als altres significats (Clarke, Roche i Mitchell, 2008; Siebert i Gaskin, 2006).

Els mateixos autors citen que Kieren (1976) van identificar diverses interpretacions (o construccions) dels nombres racionals com són: part-tot, mesura, quocient (divisió), operador i raó.

### FRACCIÓ COM A COMPARACIÓ PART-TOT

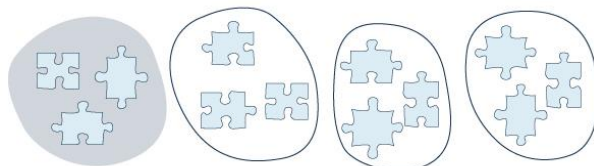
Utilitzar aquesta representació és una bona manera per començar a construir el significat de fracció (Cramer i Whitney, 2010, citat per Van de Walle, Karp i Bay-Williams, 2013).

La comparació part-tot designa un nombre de parts iguals a una unitat. En aquest cas, *igual* fa referència al mateix nombre, mateixa llargada, mateixa àrea, etc. depenent de la naturalesa de la unitat sencera. El símbol  $\frac{a}{b}$  significa les parts iguals (a) en les que ha estat dividida la unitat (b). Tanmateix, cal no confondre el terme *una part* amb el terme *una porció*, ja que una part pot implicar una o més d'una porció (Lamon, 2012).

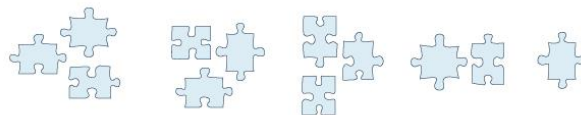


**Figura 2.1.** Exemple de representació de fracció com a part-tot. Adaptat de *Matemàtiques. Cicle mitjà 1*, de Esteve, S. i Sellas, I., 2012, p.98.

La mateixa autora afegeix que els alumnes han d'aprendre a treballar també amb conjunts d'objectes com a unitat. Per representar una fracció amb un conjunt d'objectes com a unitat, hem de tenir en compte que s'ha de dividir el conjunt d'objectes tenint en compte que, a cada part, n'hi hagi la mateixa quantitat (veure figura 2.2). Si una col·lecció d'objectes no es pot dividir en parts iguals, per exemple fer 5 parts d'una col·lecció de 12 objectes, aquella representació no es podrà fer (veure figura 2.3).



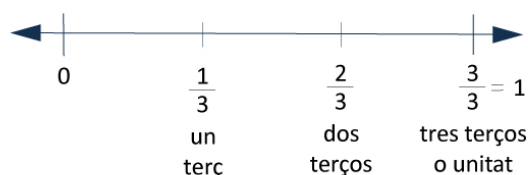
**Figura 2.2.** Exemple de fracció com a col·lecció d'objectes ( $\frac{3}{4}$ ). Extret de *Matemàtiques. Cicle mitjà 2.*, de Esteve, S. i Sellas, I., 2012, p. 91.



**Figura 2.3.** Exemple d'una col·lecció d'objectes que no es pot fraccionar en cinquens. Adaptat de *Matemàtiques. Cicle mitjà 1*, de Esteve, S. i Sellas, I., 2012, p.103.

### FRACCIÓ COM A MESURA

Lamon (2012) defineix la fracció com a mesura en el sentit de representar distàncies des de 0 fins a un punt concret segona la unitat de mesura. D'aquesta manera, una fracció sota la interpretació de mesura és una mesura assignada a un interval o a una regió dependent de si s'utilitza un model unidimensional o bidimensional. En el model unidimensional, la fracció mesura la distància des de zero fins a un punt concret. En canvi, el model bidimensional en mesura l'àrea (veure figures 2.4 i 2.5).



**Figura 2.4.** Exemple de recta numèrica representada amb el model unidimensional. Extret de *Matemàtiques. Cicle mitjà 2.*, de Esteve, S. I Sellas, I., 2012, p. 90.



**Figura 2.5.** Exemple de recta numèrica representada amb el model bidimensional.

### FRACCIÓ COM A QUOCIENT

La divisió es pot entendre com un repartiment entre parts iguals (Clarke et al., 2008). Considerant la idea de repartir 10 € entre 4 persones. Aquesta situació implica que cada persona rebrà una quarta part dels diners. La divisió sovint no és connectada amb les fraccions. Els alumnes han d'entendre i sentir-se segurs amb els següents exemples escrits:  $\frac{10}{4}$ ,  $10 \div 4$ ,  $2 \frac{2}{4}$ , i  $2 \frac{1}{2}$  (Van de Walle et al., 2013).

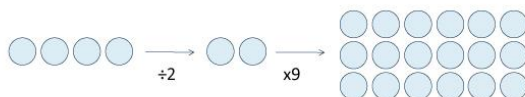
### FRACCIÓ COM A OPERADOR

La fracció com a operador representa un nombre racional com una funció que actua sobre una quantitat o regió que se li assigna una altra quantitat o regió. Els nombres racionals poden operar reduint i ampliant, escurçant o allargant, contraient o expandint o multiplicant o dividint. Un operador és un conjunt d'instruccions per dur a terme un procés. D'aquesta manera,  $\frac{a}{b} de$  és un operador que indica que cal multiplicar per  $a$  i dividir el resultat per  $b$  (Lamon, 2012).

La mateixa autora ho exemplifica amb diverses representacions, dues de les quals estan representades a les figures 2.6 i 2.7.

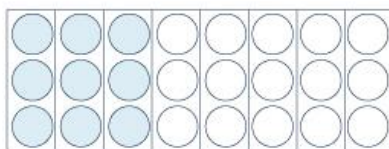


Per calcular  $\frac{9}{2}$  de 4, es pot representar amb dues operacions sobre 4 objectes. La primera operació que cal fer és dividir per 2 els 4 objectes. La segona operació és la multiplicació del resultat que s'ha obtingut a la primera operació per 9.



**Figura 2.6.** Exemple de fracció com a operador. Adaptat de *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers*, de Lamon, S., 2012, p.192.

En aquest cas, es calculen  $\frac{3}{8}$  a partir d'una col·lecció de 24 objectes. En aquest cas, dividim la col·lecció en 8 parts iguals i, tot seguit, s'agafen 3 parts de les 8 inicials.



**Figura 2.7.** Exemple de fracció com a operador. Adaptat de *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers*, de Lamon, S., 2012, p.192.

Clarke et al. (2008), afirmen que la concepció que la multiplicació “fa gran” un nombre i la divisió “el fa petit” és força comuna. La falta d'experiència en els estudiants utilitzant fraccions com a operadors pot contribuir a aquesta falsa idea. A més, a aquesta interpretació no se li dona prou èmfasi en el currículum escolar. (Usiskin, 2007 citat per Van de Walle et al., 2013, p.291).

### FRACCIÓ COM A RAÓ

Segons Flores i Torralbo (2011) un nombre racional pot expressar una raó entre dues quantitats, ja que proposa una relació entre dues magnituds. Bay-Williams et al. (2016) afirmen que la raó pot ser entre les dues parts (part-part) o entre una de les parts i la seva totalitat (part-tot). Per exemple, la raó  $\frac{4}{3}$  o  $\frac{4}{3}$  pot ser la relació entre nenes (part) i nens (part), o es pot fer la raó entre nens o nenes i el seu total ( $\frac{4}{7}$  o  $\frac{13}{7}$ ) (veure figura 2.8). Quan treballem amb les fraccions com a raó, els estudiants s'han de centrar en la part-part i la part-tot de la relació. Això requereix fixar-se molt bé en el context de la situació.

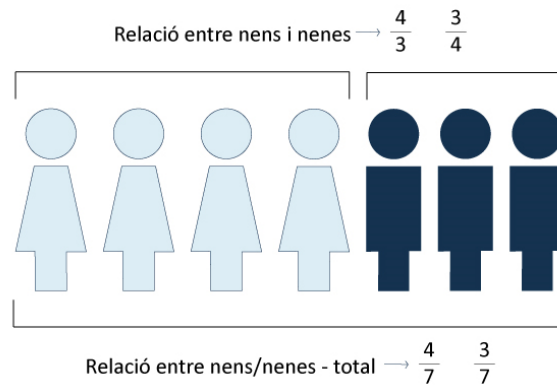


Figura 2.8. Exemple de fracció com a raó.

### 2.1.3. Concepte d'unitat

Per parlar de fraccions, és necessari partir d'una unitat. Cada fracció depèn d'una unitat concreta. Lamon (2012) posa d'exemple que, si algú ens vol donar la meitat de les seves galetes i no ens diu la quantitat que té, no podem saber quantes galetes ens donaran. En les fraccions no cal que la unitat sigui 1. En els nombres enters, 1 unitat significa 1 objecte, en canvi en les fraccions, 1 unitat pot incloure més d'un objecte.

La mateixa autora exposa que des d'educació infantil es mostra que una unitat és igual a 1 objecte. Aquest fet provoca que els estudiants puguin manifestar dificultats en l'aprenentatge de les fraccions, ja que en referència a les fraccions, una unitat pot fer referència a més d'un objecte. D'aquesta manera, apareix un nou concepte d'unitat, la qual és partida (dividida en parts iguals) i esdevé un nou nombre per fer referència a una unitat.

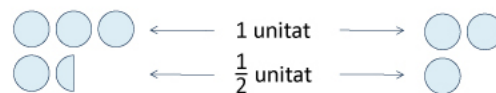


Figura 2.9. Exemple de diferents representacions d' $\frac{1}{2}$  Depenent de la unitat. Adaptat de *Teaching Fractions and ratios for understanding. Essential content knowledge and instructional Strategies for teachers*, de Lamon, S., 2012, p. 21.

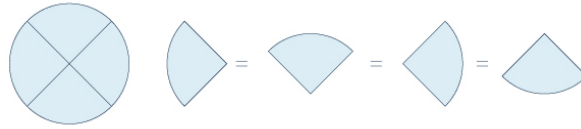
Un aspecte que cal tenir en compte és que la mateixa quantitat pot tenir diferents noms en funció de la unitat que s'hagi escollit. Per exemple,  $\frac{3}{4}$  i  $\frac{3}{8}$  poden representar la mateixa quantitat com demostra l'exemple de la figura 2.10.



Figura 2.10. Exemple de la mateixa quantitat representada amb dues fraccions diferents. Extret de *Teaching Fractions and ratios for understanding. Essential content knowledge and instructional Strategies for teachers*, de Lamon, S., 2012, p. 22.

#### 2.1.4. Procés de partició

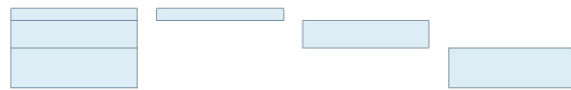
L'acció amb la qual una fracció pren sentit és el procés de partició. Aquest procés implica dividir un o més objectes en parts iguals, tenint en compte que aquestes parts no es poden superposar i que inclouen tota la superfície. Quan s'utilitza el procés de partició en les fraccions, aquest implica que les parts han de ser de la mateixa mida indiferentment de la seva forma (veure figures 2.11, 2.12, 2.13 i 2.14) (Lamon, 2012).



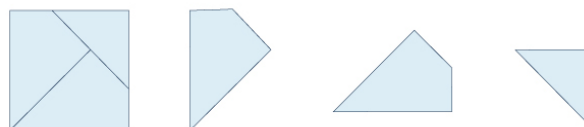
**Figura 2.11.** Exemple d'unitat dividida en quatre parts que tenen la mateixa mida i la mateixa forma, per tant podem afirmar que està dividida en parts iguals. Extret de *Matemàtiques. Cicle mitjà 1*, de Esteve, S. i Sellas, I., 2012, p.96.



**Figura 2.12.** Exemple d'unitat dividida en quatre parts que tenen la mateixa mida però formes diferents, per tant podem afirmar que està dividida en parts iguals. Extret de *Matemàtiques. Cicle mitjà 1*, de Esteve, S. i Sellas, I., 2012, p.96.



**Figura 2.13.** Exemple d'unitat dividida en tres parts que tenen la mateixa forma però mides diferents, per tant podem afirmar que no està dividida en parts iguals. Extret de *Matemàtiques. Cicle mitjà 1*, de Esteve, S. i Sellas, I., 2012, p.96.



**Figura 2.14.** Exemple d'unitat dividida en tres parts que tenen mides i formes diferents, per tant podem afirmar que no està dividida en parts iguals. Extret de *Matemàtiques. Cicle mitjà 1*, de Esteve, S. i Sellas, I., 2012, p.96

Els infants arriben a l'escola amb experiència en compartir, de manera que, tot i no tenir un bon sentit operacional sobre el procés de partició, tenen idees primitives i opinions sobre què és just i que no. Activitats utilitzant aquest procés ajuda als infants a construir experiència i ampliar el seu coneixement. Tot i tenir bones estratègies per al procés de partició, Lamon (2012) recomana fer els següents recordatoris sobre les normes generals:

- ✚ La unitat s'ha de dividir en parts iguals.
- ✚ Si la unitat està formada per més d'un element, els elements han de ser de la mateixa mida.

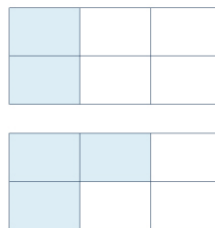
- ✚ *Igual* significa igual en quantitat, però les parts no sempre tenen el mateix nombre de trossos.
- ✚ Les parts iguals no tenen per què tenir la mateixa forma.
- ✚ Quan escollim una forma per utilitzar, per exemple, en la representació d'un pastís, anticipem el nombre de trossos que necessitarem per triar la forma que utilitzarem. A vegades és més fàcil utilitzar un pastís rectangular en comptes d'un de circular.

### 2.1.5. Comparació i equivalència de fraccions

Van de Walle et al. (2013) exposen que quan els estudiants comproven si dues o més fraccions són equivalents, les estan comparant. Si aquestes no ho són, els estudiants poden determinar quina és més gran i quina és més petita.

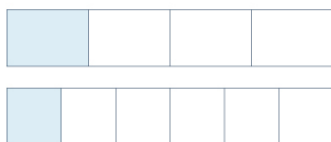
Els mateixos autors expressen que el més probable és que nosaltres mateixos hàgim après a comparar fraccions utilitzant algorismes, com ara designant denominadors comuns o utilitzant la multiplicació en creu. Aquestes normes poden ser efectives per a trobar respostes correctes però no requereixen cap pensament sobre la mida de les fraccions. Si s'ensenya als alumnes aquestes normes abans de donar-los l'oportunitat de pensar sobre la mida de les fraccions, aquests perden oportunitats per familiaritzar-se amb la mida de les fraccions.

Lamon (2012) argumenta que no és molt difícil pensar en quina de dues fraccions és més gran si aquestes tenen el mateix denominador. Per exemple, per saber si és més gran  $\frac{2}{6}$  o  $\frac{3}{6}$ , només cal preguntar-se si es tindrà més quantitat amb 2 parts o amb 3 parts de la mateixa mida (veure figura 2.15).



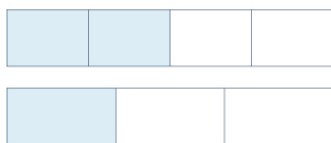
**Figura 2.15.** Exemple de dues fraccions amb els numeradors diferents i els denominadors iguals.

El segon cas és similar, però en aquest cas es tenen en compte els numeradors. D'aquesta manera, la mida de les parts esdevé l'únic element crític. Per exemple, per saber si és més gran  $\frac{1}{4}$  o  $\frac{1}{6}$ , cal tenir en compte que si dividim una unitat en 4 parts, aquestes seran més grans que si la dividim la mateixa unitat en 6 parts (veure figura 2.16).



**Figura 2.16.** Exemple de dues fraccions amb els numeradors iguals i els denominadors diferents.

L'últim cas tracta de comparar fraccions on el numerador i el denominador són diferents. Aquest és més difícil, ja que es comparen diferents quantitats de peces de mides diferents. Per exemple, si tenim 2 peces d'una unitat partida en 4 parts iguals ( $\frac{2}{4}$ ) o si tenim 1 peça de la mateixa unitat partida en 3 parts iguals ( $\frac{1}{3}$ ), ens hem de plantejar si obtenim més quantitat amb dues peces més petites o amb una de més gran.



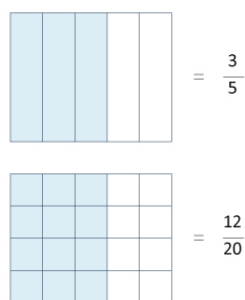
**Figura 2.17.** Exemple de dues fraccions amb els numeradors i els denominadors diferents.

Flores i Torralbo (2011) defineixen les fraccions equivalents aquelles que tot i ser diferents representen la mateixa part d'una mateixa unitat. Aquesta definició es manté en tots els significats dels nombres racionals:

- ✚ Dues fraccions com a par-tot són equivalents quan la porció que expressen és la mateixa.
- ✚ Dues fraccions expressen la mateixa mesura quan el resultat del fraccionament de la unitat és el mateix. Per exemple,  $\frac{1}{2}$  metre és una mesura que resulta de dividir 1 metre en dues parts iguals i agafar-ne 1. Aquesta mesura coincideix amb el resultat de dividir el mateix metre en 4 parts i agafar-ne 2.
- ✚ Dos quocients són equivalents quan els resultats de les dues divisions coincideix.
- ✚ Dos operadors són equivalents quan produeixen el mateix resultat quan s'apliquen a una mateixa quantitat.

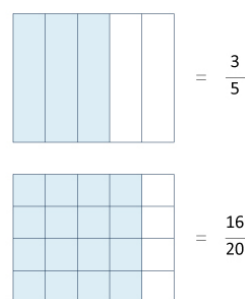
Lamon (2012) proposa el següent exemple per visualitzar dues fraccions equivalents (veure figura 2.18):

Per saber si les fraccions  $\frac{3}{5}$  i  $\frac{12}{20}$  són equivalents, primer representem  $\frac{3}{5}$  dividint un rectangle en 5 parts i ombrejant-ne 3. Tot seguit, representem  $\frac{12}{20}$  utilitzant el mateix rectangle (la mateixa àrea) però, aquesta vegada, dividint-lo en 20 parts i ombrejant-ne 12. Si comparem l'àrea que s'ha ombrejat en les dues representacions, es pot comprovar que és exactament la mateixa.



**Figura 2.18.** Exemple de fraccions equivalents. Extret de *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers.*, de Lamon, S., 2012, p.146.

Si, en lloc de  $\frac{12}{20}$  haguéssim comparat  $\frac{16}{20}$ , aquesta representació ocuparia una superfície més gran que la representada per  $\frac{3}{5}$ . En aquest cas, les fraccions no són equivalents perquè  $\frac{16}{20}$  és més gran que  $\frac{3}{5}$ .



**Figura 2.19.** Exemple de fraccions no equivalents.

### 2.1.6. Dificultats en l'aprenentatge de les fraccions

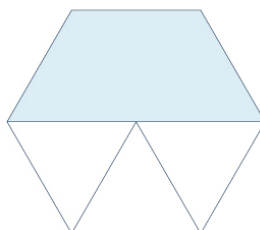
Clarke et al. (2008) citen que hi ha molts mestres que troben que les fraccions són difícils d'entendre i ensenyar (Lamon 2007) i molts estudiants que les troben difícils d'aprendre (Clarke, Roche, Mitchell i Sukenik 2006; Pearn i Stepherns 2004).

Basant-se en la recerca de Bay-Williams et al. (2016), hi ha diferents raons per les quals els estudiants tenen problemes amb les fraccions:

- ✚ Hi ha molts significats de fracció. Kilpartick, Swafford i Findell (2001) afegeixen que moltes confusions sorgeixen de les diferents representacions (construccions), de les diferents representacions (models) i de la seva forma abstracta ( $5/4$ ,  $1'25$ ,  $1 \frac{1}{4}$ ,  $125\%$ ) (citat per Clarke et al., 2008).
- ✚ La manera d'escriure les fraccions no és tan usual.
- ✚ Les instruccions no estan enfocades a una comprensió conceptual de les fraccions.
- ✚ Els estudiants generalitzen el seu coneixement sobre els nombres sencers.

La següent llista mostra diferents usos incorrectes sobre els nombres enters aplicats a les fraccions:

1. Els estudiants pensen que el numerador i el denominador són valors separats i tenen dificultat per entendre que es tracta d'un sol nombre. (Cramer i Whitney, 2010 citat per Van de Walle et al., 2013, p. 291). Situar fraccions a la recta numèrica ajuda als estudiants a desenvolupar aquesta visió.
2. Pensant en els nombres per separat, alguns estudiants pensen que  $\frac{3}{4}$  significa tres parts qualsevols, sense tenir en compte que la mida ha de ser igual. Per exemple, es pot pensar que a la figura 2.20 representa  $\frac{1}{4}$ , quan en realitat representa  $\frac{1}{2}$ .



**Figura 2.20.** Exemple de fracció representada sense tenir en compte que ha de tenir les parts iguals. Extret de *elementary and middle school mathematics: teaching developmentally*, de Van de Walle et al., 2013, p.292.

3. Els estudiants pensen que, per exemple, la fracció  $\frac{1}{5}$  és més petita que la fracció  $\frac{1}{10}$  pel fet que 5 és més petit que 10. Els exemples visuals i les situacions contextualitzades són essencials per ajudar als alumnes a entendre aquest concepte.
4. Els estudiants s'equivoquen utilitzant "normes" de càlcul pròpies dels nombres enters aplicades a les fraccions. Per exemple,  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ . Aquesta afirmació no és certa.

Els alumnes que fan aquests errors no tenen ben entès el concepte de fracció.

---

## 2.2. Aspectes generals de l'ensenyament de les matemàtiques

---






Van de Walle et al. (2013) citen tres principis dels autors *d'Adding It Up* (National Fuson, 2003) amb els quals els estudiants estan més ben acompanyats si es tenen en compte:

1. Comprendre per aprendre es basa en connectar i organitzar el coneixement al voltant de grans idees conceptuais.
2. L'aprenentatge s'ha de construir sobre el que els estudiants ja coneixen.
3. Les instruccions que es donen a l'escola haurien d'aprofitar els coneixements informals que tenen els alumnes sobre les matemàtiques.

Aquests principis s'han d'aplicar a tots els alumnes i, per tant, és essencial prendre les decisions adequades per adaptar les instruccions a les necessitats dels alumnes de forma individual. Quan es fa una modificació en les instruccions, les expectatives també baixen. Aquestes modificacions haurien de fer-se de manera que no es perdi l'origen de la tasca, de manera que recolzin els estudiants que ho necessitin.

## 2.3. Les fraccions al currículum d'educació primària

Els continguts de l'àrea de matemàtiques dins el currículum d'educació primària estan organitzats en cinc grans blocs:

-  Numeració i càlcul
-  Relacions i canvi
-  Espai i forma
-  Mesura
-  Estadística i atzar

La immensa majoria dels continguts que fan referència a les fraccions es troben dins el bloc de numeració i càlcul. Aquest bloc pretén potenciar la comprensió dels nombres, dels seus usos diversos, de les seves formes de representació i del sistema de numeració en el qual s'expressen. D'altra banda, també té la finalitat que els alumnes compreguin els significats de les operacions i de les relacions que hi ha entre unes i altres, i la comprensió de la funcionalitat del càlcul i l'estimació. Una petita part dels continguts sobre fraccions que trobem al currículum es troben dins el bloc de mesura i d'estadística i atzar.

Si fem un cop d'un a la taula 2.1, podem observar com, a cada cicle, s'incrementen els continguts que calen treballar sobre les fraccions. A cicle inicial, dins el bloc de numeració i càlcul, només hi consta un contingut a treballar. En aquest cicle es fa una presentació de les fraccions treballant amb les més bàsiques, com són  $\frac{1}{2}$  i  $\frac{1}{4}$ .

Quan els alumnes passen a cicle mitjà, s'incrementen el continguts sobre aquest tema i es comença a treballar amb elles. En aquest cicle es comencen a presentar diferents maneres per a representar les fraccions, com ara la fracció com a part-tot i com a mesura, i es comença a operar amb elles, realitzant sumes i restes senzilles amb l'ajuda de representacions gràfiques que faciliten la seva comprensió.

Finalment, a cicle superior, es treballen les fraccions de manera més completa. Una de les coses que es poden observar és que augmenten el nivell de les operacions amb fraccions, ja que s'afegeix també la resolució aritmètica d'aquestes. Es comença a comparar i ordenar fraccions i, aquest fet, fa que s'introdueixi el concepte de fraccions equivalents. Finalment, un dels processos al que se li dona molta importància en aquest cicle és el de les connexions. Això queda reflectit a la quantitat de continguts que fan referència a la relació entre les fraccions i els nombres decimals, els percentatges i els nombres naturals.

Cicle	Bloc	Contingut
Inicial	Numeració i càlcul	Ús de les fraccions un mig i un quart en contextos significatius.
Mitjà		Reconeixement de la fracció com a part d'una unitat i d'una col·lecció.



	Numeració i càlcul	Ús de diferents models de representació de les fraccions. Situació dels nombres naturals i fraccionaris més comuns ( $1/2$ , $1/3$ , $1/4$ ) sobre la recta numèrica.
		Ús i relació dels decimals i fraccions com a nombres que aproximen més la mesura.
	Mesura	Realització de sumes i restes amb fraccions senzilles acompanyades de diferents formes de representació gràfica.
Superior	Numeració i càlcul	Ús dels decimals i fraccions com a nombres que permeten aproximar una mesura.
		Ús i comprensió de les fraccions i dels decimals per mesurar quantitats contínues en contextos significatius. Descripció oral, gràfica i escrita dels processos de comprensió dels diferents conjunts numèrics i del càlcul.
		Reconeixement i ús de les relacions entre fraccions, decimals i percentatges en casos senzills ( $0,5$ , $1/2$ , $50\%$ ; $0,25$ , $1/4$ , $25\%$ ; $0,1$ , $1/10$ , $10\%$ ). Analogia entre el sistema de numeració decimal i el sistema internacional de mesura.
		Ús i contrast de diferents models per representar les relacions entre decimals, fraccions i percentatges.
		Reconeixement i cerca de fraccions equivalents seguint camins diversos.
		Relació dels nombres fraccionaris amb el càlcul de probabilitats.
		Ús de diferents models per comparar i ordenar fraccions i decimals.
		Situació dels nombres decimals, fraccionaris i percentatges sobre la recta numèrica. Aproximació dels nombres decimals. Comprensió i ús dels nombres decimals i fraccionaris en l'aproximació de la mesura.
		Interpretació dels nombres naturals, decimals i fraccionaris en taules i gràfics. Elaboració de gràfics i taules a partir del comptatge i la mesura. Creació de codis numèrics.
		Comprensió i ús de la suma i la resta de fraccions mitjançant representacions gràfiques i aritmètiques.
	Desenvolupament d'estratègies de càlcul mental amb nombres naturals, fraccionaris i decimals. Establiment d'analogies entre nombres naturals i nombres decimals.	
Estimació raonable dels resultats de les operacions amb nombres naturals, decimals i fraccionaris. Descripció coherent del procés d'estimació.		
Mesura	Ús dels nombres decimals i fraccionaris en l'aproximació de la mesura.	
Estadística i atzar	Relació dels nombres fraccionaris amb el càlcul de probabilitats.	

**Taula 2.1.** Continguts relacionats amb les fraccions dins el currículum d'educació primària (2009).

### 3. MARC METODOLÒGIC

En aquest apartat hi ha descrita la part pràctica de la recerca educativa realitzada estructurada en 3 blocs. En el primer es descriu quin és l'enfocament metodològic de la recerca, és a dir, el paradigma i la modalitat de la investigació i el tipus d'investigació. Al segon bloc es contextualitza l'obtenció de dades. Dins d'aquest bloc s'hi troba on es va realitzar la investigació i com és l'ensenyament de les fraccions a aquesta escola i quins van ser els seus participants i com van ser seleccionats. Finalment, es descriuen les dues eines utilitzades per a la recollida d'informació necessària per a dur a terme la investigació.

---

## 3.1 Enfocament metodològic

---

Aquest estudi s'emmarca en el paradigma interpretatiu, ja que es pretén analitzar com influeix la metodologia emprada per una escola per ensenyar el concepte de fracció i de fracció equivalent en l'aprenentatge dels seus alumnes. Aquest estudi es realitza a través d'una recerca que es desenvolupa en el seu context natural i en un moment únic a partir d'un qüestionari. L'estudi a través d'aquest paradigma es centra en la descripció i interpretació de la realitat educativa dels alumnes fixant-se en els coneixements adquirits durant tota l'educació primària sobre els dos conceptes esmentats anteriorment. Per la naturalesa d'aquest estudi, la metodologia és qualitativa i el mètode emprat és l'estudi de casos, que resulta d'una recerca centrada en una única escola.

L'estudi no té una finalitat pràctica ni pretén donar solució a possibles problemes, sinó que es centra en l'explicació i l'anàlisi de la metodologia emprada a l'escola partint dels resultats dels qüestionaris realitzats pels alumnes.

---

## 3.2 Context de l'obtenció de dades

---

Aquest estudi té lloc al centre on vaig realitzar les Pràctiques III del Grau en Mestra d'Educació Primària des del mes de gener fins al mes de març de 2020. Es tracta d'una escola concertada d'educació infantil, primària i secundària de la comarca del Gironès. Aprofitant la meva estada, vaig passar un qüestionari als alumnes de 6è de primària i, més endavant, vaig dur a terme dues entrevistes a dues mestres de matemàtiques que han tingut els mateixos alumnes al llarg de l'educació primària. A causa del moment d'excepció que estem vivint, les entrevistes s'han hagut de realitzar a partir d'un formulari de Google.

Els resultats obtinguts a partir dels qüestionaris i les entrevistes han estat utilitzats posteriorment per elaborar aquest estudi.

### 3.2.1. L'ensenyament de les fraccions a l'escola

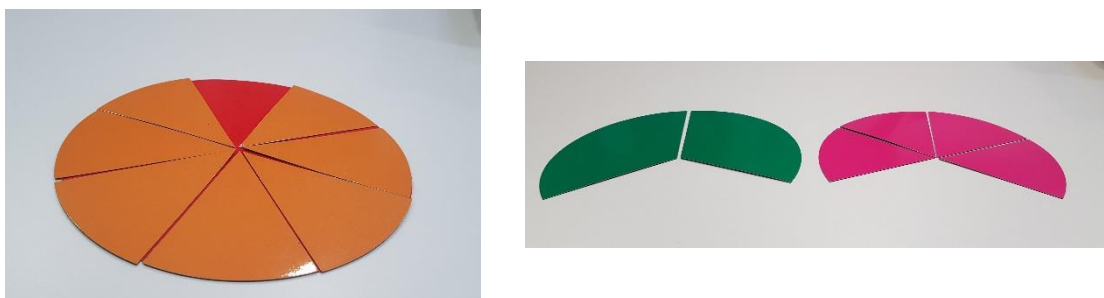
Gràcies a les entrevistes a les mestres ens podem fer una idea de com treballen les fraccions a l'escola.

Durant els cursos 2014-2015 i 2016-2017 es va realitzar un assessorament en l'àrea de les matemàtiques a l'escola a càrrec de la Universitat de Vic. En aquest curs van tractar diversos temes referents a les matemàtiques, incloses també les fraccions. Sobre el tema que ens interessa en aquest cas, les fraccions, se'ls va explicar aspectes importants com per exemple:

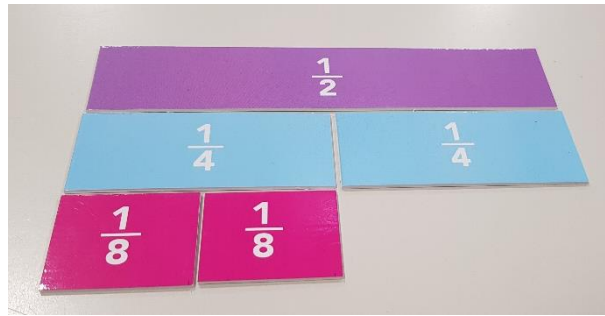
- ✚ Representar fraccions
- ✚ Concepte d'unitat
- ✚ Diferents maneres d'interpretar les fraccions (comparació part-tot, mesura, quocient, operador i raó)
- ✚ Com representar una fracció (símbols escrits, verbals, gràfics, materials manipulatiu, contextos reals...)
- ✚ Com comparar i ordenar fraccions utilitzant diferents estratègies
- ✚ Fraccions equivalents.

Pel que fa a l'ensenyament de les matemàtiques a dins l'aula, les mestres utilitzen el llibre de text com a guia i afegeixen altres activitats relacionades amb els temes que treballen. Les fraccions es comencen a introduir a cicle inicial, presentant fraccions senzilles com  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$  o  $\frac{1}{2}$  i introduint el concepte d'unitat. A cicle mitjà es reforça tot el que s'ha treballat fins el moment i s'introdueixen les fraccions equivalents. Finalment, a cicle superior, segueixen treballant amb les fraccions equivalents i comencen a operar amb sumes i restes.

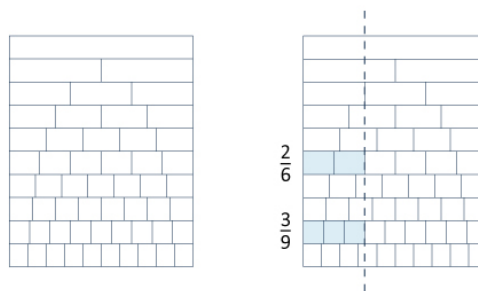
Tot aquest procés l'acompanyen amb material manipulatiu amb la finalitat que els infants puguin veure i entendre millor el que estan treballant. Els materials que més utilitzen són: sectors circulars imantats (veure figura 3.1), tires de fraccions equivalents (veure figura 3.2) i el diagrama de fraccions (veure figura 3.3).



**Figura 3.1.** Sectors circulars imantats. Representació de  $\frac{7}{8}$  sobre una unitat (esquerra) i representació de dues fraccions equivalents (dreta).



**Figura 3.2.** Tires de fraccions equivalents. Comparació de les fraccions  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$  i  $\frac{1}{8}$ .



**Figura 3.3.** Exemple de dues fraccions equivalents trobades a partir del diagrama de fraccions.

Extret de *Matemáticas para maestros de educación primaria*, de I. Segovia i L. Rico, 2011, p. 201.

Les tasques que es realitzen a l'aula per a treballar les fraccions són exercicis que resolen amb el material que s'acaba de presentar. Aquests exercicis, primer tenen una resolució tancada i, un cop tenen més clars els conceptes, tenen una resolució oberta. Amb aquests exercicis treballen tots els continguts que marca el currículum (veure punt 2.2 *Les fraccions al currículum d'educació primària*).

### 3.2.2. Selecció dels participants

Com s'ha explicat en el punt 1.1. *Objectius, pregunta i hipòtesi de recerca*, l'estudi està enfocat a analitzar la relació que hi ha entre el mètode d'ensenyament de les fraccions i el grau de comprensió d'aquest concepte en l'alumnat de 6è de primària d'aquesta escola. Per ajustar l'estudi a la realitat al màxim, he cregut convenient eliminar els qüestionaris d'aquells alumnes que han arribat a l'escola durant l'educació primària. D'aquesta manera s'evita que hi hagi influències d'altres escoles en aquesta anàlisi. Tot i així, el qüestionari l'han respost els 26 alumnes de 6è de primària amb la finalitat de no marcar diferències entre ells. Per saber quins d'aquests qüestionaris són vàlids tenint en compte el criteri esmentat anteriorment, a la primera pregunta es demanava als infants que diguessin a quin curs havien arribat a l'escola. D'aquesta manera ha sigut molt fàcil separar els qüestionaris que s'utilitzaran per realitzar l'estudi. Un cop classificats, han quedat 19 qüestionaris per analitzar.

## 3.3 Eines de recollida de dades

Tal com s'ha exposat anteriorment, per dur a terme aquest estudi s'han utilitzat dues eines diferents: una entrevista per a les mestres i un qüestionari per als alumnes. A continuació es detallen aquestes dues.

### 3.3.1. L'entrevista

L'entrevista que es va enviar a les mestres consta de 5 blocs. Aquests blocs són:

#### PRESENTACIÓ DE L'ENTREVISTA

És el bloc més curt de tots, i la seva finalitat és només la presentació de l'entrevista, ja que es presenta amb una frase curta el tema sobre el que tracta. Tot seguit es demana un correu electrònic per poder accedir a la resta de preguntes. No vaig necessitar posar una gran presentació de l'entrevista perquè en principi havia de ser en persona i, per aquest motiu, les mestres ja havien estat informades sobre els temes que se'ls preguntaria.

#### PRESENTACIÓ DE LA MESTRA

Aquest bloc serveix per a situar a la mestra en el context educatiu dins i fora de l'escola. Després de demanar el nom i cognom de l'entrevistada les preguntes que s'hi troben són:

Curs o cursos en els quals vas tenir als alumnes que actualment cursen 6è.

- 1r
- 2n
- 3r
- 4t
- 5è
- 6è

**Figura 3.4.** Primera pregunta del bloc *Presentació de la mestra*.

Amb la pregunta que es mostra a la figura 3.4, es vol situar a cada mestra en el moment en què va influir en l'aprenentatge dels alumnes que realitzen el qüestionari. D'aquesta manera es pot veure com han treballat a cada curs els conceptes que es volen estudiar.

Tens alguna formació específica en l'àrea matemàtica?

- Sí
- No

En cas afirmatiu, digues quina (Màster, cursos...). Durant el màster, curs... què se't va presentar en referència a l'ensenyament-aprenentatge de les fraccions?

Què utilitzes del que vas aprendre durant aquesta formació específica?

**Figura 3.5.** Preguntes relacionades amb la formació de les mestres entrevistades. Dins el bloc *Presentació de la mestra*.

Amb les preguntes mostrades a la figura 3.5 es pretén conèixer si les mestres tenen o no una formació específica en l'àrea matemàtica i, en cas afirmatiu, quina és aquesta formació. A més a més, també serveixen per saber si la mestra va realitzar el curs a càrrec de la Universitat de Vic sobre l'ensenyament de les matemàtiques que es va impartir a l'escola els cursos 2014-2015 i 2016-2017.

#### CONEXIMENTS MATEMÀTICS

A la figura 3.6 es mostren les dues preguntes que es realitzen en aquest bloc.

Què entens per fracció?

Què entens per fraccions equivalents?

**Figura 3.6.** Preguntes del bloc *Coneixements matemàtics*.

Amb aquestes preguntes es vol descobrir quins són els coneixements de les mestres en relació amb els dos conceptes que s'estudien. D'aquesta manera es podrà relacionar el coneixement dels alumnes amb el de les mestres.

#### LES FRACCIONS A L'AULA

Aquest bloc ens permet tenir una noció de com ensenya cada mestra les matemàtiques als seus alumnes.

Fas servir llibre de text?

- Sí
- No

En cas afirmatiu: Quin/s llibre/s utilitzes? Com ho fas? (el segueixes estrictament, li incorpores activitats complementàries, com a guia...)

En cas negatiu: Com fas les classes? (pre pares el teu propi material, quin tipus de material fas servir, etc.)

**Figura 3.7.** Preguntes referents al llibre de text. Dins del bloc *Les fraccions a l'aula*.

A la figura 3.7 es mostren les primeres preguntes d'aquest bloc. Es comença amb dues preguntes generals sobre les matemàtiques a l'aula, és a dir, no fa referència a l'ensenyament de les fraccions sinó a l'àmbit matemàtic. El que es vol conèixer amb aquestes preguntes és quin o quins llibres utilitzes i com els utilitzen. D'aquesta manera ens podem fer una idea de si l'ensenyament de les matemàtiques és més conceptual o més manipulatiu. Tot seguit es feien les preguntes que es mostren a la figura 3.8.

Com introdueixes les fraccions? De quin nivell parteixes?

Com lligues el concepte de fraccions equivalents amb el concepte de fracció treballat prèviament?

**Figura 3.8.** Preguntes centrades en l'ensenyament de les fraccions a l'aula. Dins del bloc *Les fraccions a l'aula*.

Aquestes preguntes són les primeres que centren l'atenció a l'ensenyament de les fraccions a l'aula. Amb elles es vol conèixer com presenten els dos temes que s'estudiaran i com els relacionen entre ells. A continuació demana a les mestres que diguin, per una banda, si treballen aquests conceptes amb materials o no i, en cas afirmatiu, amb quins materials treballen i, per altra banda, quines tasques plantegen als seus alumnes. Aquestes preguntes, mostrades a les figures 3.9 i 3.10 respectivament, ens permeten seguir comprovant si l'ensenyament de les matemàtiques és més conceptual o manipulatiu.

Utilitzes algun tipus de material manipulatiu per explicar les fraccions?

- Sí
- No

En cas afirmatiu: Quin o quins materials fas servir? Com els utilitzes?

Utilitzes algun tipus de material manipulatiu per explicar les fraccions equivalents?

- Sí
- No

En cas afirmatiu: Quin o quins materials fas servir? Com els utilitzes?

**Figura 3.9.** Preguntes referents al material utilitzat a l'aula. Dins del bloc *Les fraccions a l'aula*.

Quin tipus de tasques planteges als alumnes per treballar el concepte de fracció? (exercicis tancats/oberts, materials manipulatius, fitxes...)

Quin tipus de tasques planteges als alumnes per treballar el concepte de fraccions equivalents? (exercicis tancats/oberts, materials manipulatius, fitxes...)

**Figura 3.10.** Preguntes referents a les tasques realitzades a l'aula. Dins del bloc *Les fraccions a l'aula*.

### CONTINGUTS I OBJECTIUS

L'últim bloc de l'entrevista fa referència, com el seu nom indica, als continguts i objectius que es treballen. Amb aquestes preguntes es vol saber quin és el nivell que han d'assolir els infants al final de cada cicle i quins continguts treballen per aconseguir arribar a aquests objectius. A la figura 3.11 es mostren les quatre preguntes d'aquest bloc.



Quins objectius han d'assolir els alumnes en relació al concepte de fracció?
Quins objectius han d'assolir els alumnes en relació al concepte de fraccions equivalents?
Quins continguts treballen els alumnes en relació al concepte de fracció?
Quins continguts treballen els alumnes en relació al concepte de fraccions equivalents?

**Figura 3.11.** Preguntes del bloc *Continguts i objectius*.

### 3.3.2. El qüestionari

El qüestionari utilitzat per a realitzar aquest estudi està extret de la Tesi Doctoral *Els coneixements dels estudiants de mestre sobre les fraccions i el seu ensenyament*, d'Isabel Sellas. Vaig decidir escollir aquest qüestionari perquè, per dur a terme el meu estudi, necessitava preguntes que ajudessin a veure si els alumnes havien entès allò que se'ls havia explicat i havien treballat, evitant preguntes teòriques que es poguessin respondre per memorització. Aquest qüestionari complia aquest requisit. De totes maneres, el qüestionari que s'utilitza en aquest estudi és lleugerament.

El primer que vaig fer un cop vaig disposar del qüestionari va ser mirar detingudament les parts que es centraven en els conceptes que volia estudiar en aquell moment: el concepte de fracció, el de fraccions equivalents i el de suma de fraccions. Tot seguit, vaig marcar les preguntes que creia que em serien més útils per realitzar el meu estudi. Tot i ser un qüestionari validat, la mateixa autora em va recomanar posar a prova el qüestionari que havia decidit fer, amb la finalitat de veure quines de les preguntes em donaven més informació, si hi havia alguna pregunta que no s'acabava d'entendre pels alumnes, quant temps durava el qüestionari, etc. Per aquest motiu, vaig demanar a tres nenes d'altres escoles i del mateix curs que em responguessin el qüestionari. A partir d'aquí, va sortir el qüestionari quasi definitiu.

Quan vaig parlar amb una de les mestres de l'escola per explicar-li de què tractava el meu Treball de Final de Grau em va comentar que la suma de fraccions la comencen a treballar a 6è de primària i que encara no hi havia arribat. Per aquest motiu, aquest concepte va quedar descartat de l'estudi. Traient aquesta última part del qüestionari que havia provat amb les tres nenes, va sortir el qüestionari definitiu que es troba detallat a continuació.

#### SELECCIÓ DELS PARTICIPANTS

La taula 3.1 mostra la primera pregunta del qüestionari. Es tracta d'una pregunta de control, la qual permet classificar quins dels qüestionaris són vàlids per l'estudi i quins no ho són.

## Preguntes del qüestionari en relació a la selecció dels participants

1. A quin curs vas arribar a aquesta escola? \_\_\_\_\_

**Taula 3.1** Pregunta de control per a la selecció dels participants.

Tots els alumnes que vam respondre: P3, P4 o P5 en aquesta pregunta, eren aptes per a l'estudi. Tots aquells que van posar cursos de 1r a 6è de primària van ser descartats.

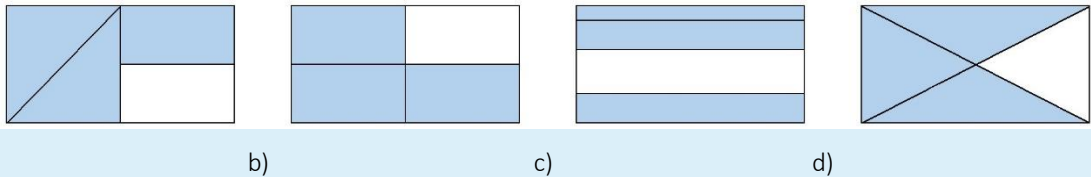
### PREGUNTES REFERENTS AL CONCEPTE DE FRACCIÓ

El concepte de fracció és el primer concepte central d'aquest estudi. Amb les preguntes mostrades a la taula 3.2 es vol conèixer què entenen els alumnes per fracció. Aquest concepte és bàsic per a poder seguir construint coneixement sobre les fraccions. Per aquest motiu, la majoria de les preguntes del qüestionari fan referència a aquest concepte.

## Preguntes del qüestionari en relació al concepte de fracció

2. Què és una fracció?

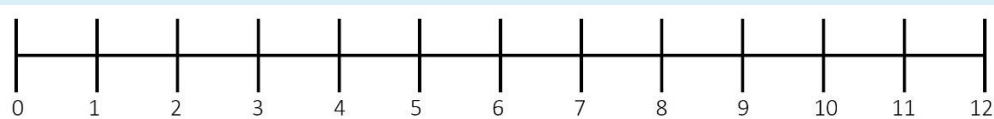
3. Digues quines de les imatges següents representen  $\frac{3}{4}$ . Explica per què ho representen o per què no:



4. Assenyal·la les  $\frac{2}{5}$  parts d'aquest conjunt i explica com ho has fet.



6. Col·loca la fracció  $\frac{12}{5}$  a la recta numèrica següent i explica com ho has fet:

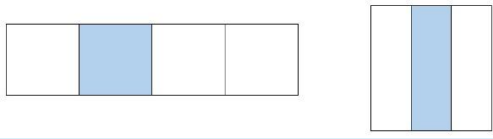


7. Digues quines de les següents situacions es poden representar amb una fracció i, en aquest cas, quina fracció correspon a la situació:

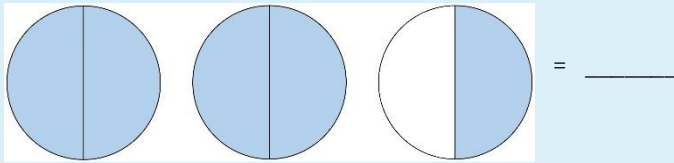
- La Maria i en Martí fan l'operació següent:  $8 \div 3$ .
- Tinc 3 monedes i me n'han donat 2 més.
- La Marta diu que es menjarà cinc sisens dels 36 caramels que té.
- D'aquí tres quarts d'hora hem d'anar a dinar.
- M'he comprat uns pantalons que els han rebaixat un 25%.
- A la meua classe hi ha 13 nens i 12 nenes.

g. He tret un 6,7 de l'examen de matemàtiques.

8. Quina fracció representa una quantitat més gran? Explica-ho.



10. Digues quina fracció hi ha representada a la imatge següent. Digues què representa el numerador i el denominador:



Numerador:

Denominador:

Taula 3.2. Preguntes del qüestionari en relació al concepte de fracció.

A continuació s'explica i s'argumenta el perquè de cadascuna una de les preguntes d'aquest bloc.

#### Pregunta 2

La pregunta 2 del qüestionari està col·locada al principi de tot perquè la resta de preguntes no influeixin en la seva resposta. Amb aquesta pregunta es pot saber quina idea tenen els alumnes sobre què és una fracció.

#### Pregunta 3

La pregunta 3 del qüestionari permet saber quin coneixement tenen els alumnes sobre el significat de fracció com a comparació de part-tot. Els alumnes han d'escollir quina de les quatre opcions representa la fracció  $\frac{3}{4}$  i justificar-ne la resposta. Això permet veure què entenen els alumnes per *parts iguals*.

Les opcions correctes d'aquesta pregunta són la a), la b) i la d). La pregunta és interessant, ja que s'ha optat per una representació en què s'ha dividit la unitat en quatre regions que fossin de la mateixa forma i amb la mateixa àrea (opció b), i dues altres que tenen diferent forma però la mateixa àrea (opcions a i d). L'opció c), que no és correcte, mostra una representació amb on la regió està dividida en quatre parts amb la mateixa forma però amb àrees diferents. Aquestes opcions permeten veure amb facilitat si els alumnes tenen clar que les parts d'una regió han de tenir la mateixa àrea.

#### Pregunta 4

La pregunta 4 del qüestionari ens ajuda a saber quin és el grau de comprensió del significat de col·lecció d'objectes. Aquesta pregunta va ser modificada respecte a la pregunta original del qüestionari esmentat. La pregunta original comptava amb un conjunt de 15 cercles. En aquest cas, s'ha simplificat de manera que la col·lecció d'objectes consta de 10 cercles i també es demana quin procés s'ha seguit per arribar a la resposta. L'única resposta correcta d'aquesta pregunta és assenyalar 4 cercles.

#### Pregunta 6

La pregunta 6 del qüestionari permet valorar la capacitat de situar una fracció a la recta numèrica. La fracció que s'ha de situar és  $\frac{12}{5}$  en una recta segmentada en 12 parts. Aquesta pregunta té alguna dificultat, com ara que és una fracció més gran que 1 i que tenim una recta numèrica de 12 segments. Aquest segon fet posa a prova si saben diferenciar el numerador i el denominador. Es pot resoldre aquesta pregunta de diverses maneres, com ara: segmentant cada unitat en 5 parts i marcar la fracció  $\frac{12}{5}$  a la dotzena regió, o bé fer la divisió  $12 \div 5$  i col·locar el resultat (2,4) a la recta.

#### Pregunta 7

La pregunta 7 del qüestionari ajuda a conèixer el grau de comprensió dels alumnes sobre el significat de fracció, ja que s'han d'identificar quines situacions poden representar-se amb una fracció i, si és possible, escriure la fracció corresponent. A continuació es detalla cada opció:

a. La Maria i en Martí fan l'operació següent:  $8 \div 3$ .

La divisió  $8 \div 3$  es pot representar amb la fracció  $\frac{8}{3}$ .

b. Tinc 3 monedes i me n'han donat 2 més.

Aquesta situació no es pot representar amb una fracció, sinó amb la suma  $3 + 2$ .

c. La Marta diu que es menjarà cinc sisens dels 36 caramels que té.

La situació es pot representar amb la fracció  $\frac{5}{6}$  de 36 o bé  $\frac{5}{6}$ .

d. D'aquí tres quarts d'hora hem d'anar a dinar.

Aquesta situació es pot representar amb la fracció  $\frac{3}{4}$ .

e. M'he comprat uns pantalons que els han rebaixat un 25%.

Els percentatges també es poden representar amb una fracció, en aquest cas amb la fracció  $\frac{25}{100}$ .

f. A la meua classe hi ha 13 nens i 12 nenes.

Amb aquesta situació podem representar la fracció com a raó. Es pot representar amb les fraccions  $\frac{13}{12}$  i  $\frac{12}{13}$  si es representa la relació entre nens i nenes, o bé amb les fraccions  $\frac{13}{25}$  i  $\frac{12}{25}$  si es representa la relació entre nens i nenes sobre el total d'alumnes de la classe respectivament.

g. He tret un 6,7 de l'examen de matemàtiques.

Les notes dels exàmens també es poden representar amb una fracció, en aquest cas  $\frac{67}{10}$ .

#### Pregunta 8

La pregunta 8 del qüestionari té com a finalitat saber si els estudiants saben que no es poden comparar dues fraccions amb una unitat de referència diferent. Numèricament, la fracció  $\frac{1}{3}$  és més gran que la fracció  $\frac{1}{4}$ , però en aquest cas no és possible comparar les dues fraccions, ja que les unitats de referència que hi ha representades no són les mateixes.

#### Pregunta 10

La pregunta 10 del qüestionari, com la pregunta anterior, permet valorar la comprensió dels alumnes amb relació al significat de fracció més gran que 1. Les respostes correctes a aquesta pregunta poden ser  $\frac{5}{2}$  (2 i  $\frac{1}{2}$ ) o  $\frac{5}{6}$ . La resposta dependrà de si l'alumne interpreta que 1 cercle equival a 1 unitat, o bé si interpreta que el conjunt dels tres cercles equivalen a 1 unitat, respectivament.

#### PREGUNTES REFERENTS AL CONCEPTE DE FRACCIONS EQUIVALENTS

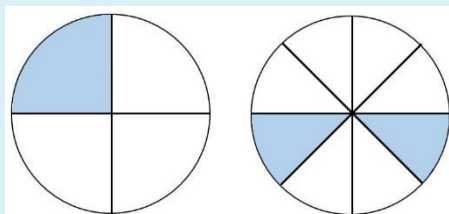
El segon concepte que s'estudia és el de fraccions equivalent. Amb les preguntes que es mostren a la taula 3.3 es vol conèixer què entenen els alumnes per fraccions equivalents.

#### Preguntes del qüestionari en relació al concepte de fraccions equivalents

5. Les imatges següents representen la mateixa fracció?

- Sí
- No

- Explica per què si o per què no:



9. Explica què vol dir que dues fraccions són equivalents? Dibuixa'n un exemple i explica com ho has fet.

11. Com pots explicar amb un dibuix que  $\frac{4}{8}$  i  $\frac{6}{12}$  són equivalents?

Taula 3.3. Preguntes del qüestionari en relació al concepte de fraccions equivalents.

#### Pregunta 5

La pregunta 5 del qüestionari té com a finalitat conèixer la comprensió de l'equivalència de fraccions a partir de la comparació de dues representacions gràfiques. A la pregunta es donen dues opcions de resposta: sí i no, i a continuació s'ha d'exposar el perquè de la seva elecció.

#### Pregunta 9

La pregunta 9 del qüestionari té com a finalitat conèixer que entenen els alumnes per fraccions equivalents demanant directament que expliquin què vol dir. Aquesta pregunta té una resposta oberta, on es podrà veure quines idees tenen els alumnes respecte al concepte de fraccions equivalents. També es demana un exemple per a completar la definició. En el qüestionari original es demanava que es posés un exemple que podia ser tant gràfic com numèric. En aquest cas, es demana que es dibuixi un exemple, per tant, aquest ha de ser gràfic.

#### Pregunta 11

La pregunta 11 del qüestionari té com a finalitat conèixer quina idea tenen els alumnes sobre les fraccions equivalents representades de forma gràfica.

## 4. RESULTATS DE LA CERCA

En aquest apartat es presenta l'anàlisi de dades en relació amb el segon objectiu. Està organitzat en dos subapartats, un per a cada concepte estudiat: concepte de fracció i concepte de fraccions equivalents, i en cada un s'expliquen els resultats obtinguts per cada pregunta, tot exposant quines categories s'han obtingut, presentant els resultats i els arguments donats.

## 4.1 Anàlisi de dades del qüestionari en relació al concepte de fracció

En aquest subapartat es presenta l'anàlisi de dades de les preguntes del qüestionari que fan referència al concepte de fracció.

### 4.1.1. Anàlisi de la pregunta 2

A la figura 4.1 es mostra la pregunta 2, on els alumnes havien d'explicar què és una fracció.

2. Què és una fracció

Figura 4.1. Pregunta 2 del qüestionari.

Tots els alumnes van respondre aquesta pregunta i, totes les respostes estan classificades en tres categories, segons les definicions que han donat: Part o parts d'una unitat, representació de quantitat i divisió. Hi ha hagut tres alumnes que han utilitzat dues categories per explicar el concepte de fracció. A la 4.1 es mostra la quantitat de respostes obtingudes per a cada categoria.

Categoria	Quantitat d'alumnes
Part o parts d'una unitat	13
Representació de quantitat	1
Divisió	2
Part o parts d'una unitat + Divisió	3

Taula 4.1. Classificació de les respostes segons les categories de les definicions.

A continuació s'explica de forma detallada cada una d'aquestes categories juntament amb exemples de les definicions que han donat els alumnes.

#### PART O PARTS D'UNA UNITAT

Aquesta és la categoria més nombrosa. En ella s'hi classifiquen aquelles respostes on els alumnes han expressat que una fracció representa una part "d'alguna cosa". Quatre d'aquests alumnes expliquen que una fracció és un nombre dividit en parts iguals. Un d'ells, especifica que, d'aquestes parts iguals, se n'agafa un tros. Tres alumnes més, indiquen que les fraccions signifiquen fer parts d'alguna cosa, sense especificar que aquestes parts siguin iguals. Un d'ells, igual que un altre alumne, afegeix que "A baix hi diu les parts amb les que està repartit i a dalt les parts que tenim o necessitem" i que "les parts han de ser iguals". Un únic alumne diu que les fraccions són les parts que representen un nombre enter o decimal. Els altres



alumnes d'aquest grup, expliquen què és una fracció a partir d'exemples, com ara que "és una manera de dir que ha passat un quart. Pot representar moltes coses: pastissos, l'hora, etc."

#### REPRESENTACIÓ DE QUANTITAT

Només un alumne expressa que les fraccions són una manera de representar quantitats.

#### DIVISIÓ

Diferents alumnes apunten que la fracció és una divisió, però en aquesta categoria només hi trobem un alumne perquè la resta ha acompanyat aquesta idea amb alguna altra de les altres categories. Aquest alumne acompanya la seva explicació d'un exemple: "Una fracció és un nombre com 12 que es pot dividir per la meitat, en un quart..."

#### PART O PARTS D'UNA UNITAT + DIVISIÓ

Els alumnes que trobem dins d'aquesta categoria afirmen que una fracció és una divisió que ajuda a fer parts iguals. Un d'ells s'ajuda d'un exemple per explicar què representa el numerador i què representa el denominador. Un altre, té el concepte d'unitat com a forma geomètrica, ja que afirma que "és una manera per dividir o dir en quantes parts està repartida una forma geomètrica".

### 4.1.2. Anàlisi de la pregunta 3

A la figura 4.2 es mostra la pregunta 3, on els alumnes han dit si les representacions gràfiques que es presenten representen la fracció  $\frac{3}{4}$  o no. A més a més s'ha demanat la justificació de la resposta. Les opcions que representen la fracció  $\frac{3}{4}$  són la a), la b) i la d). L'opció c) no representa  $\frac{3}{4}$  perquè les seves parts no tenen la mateixa superfície.

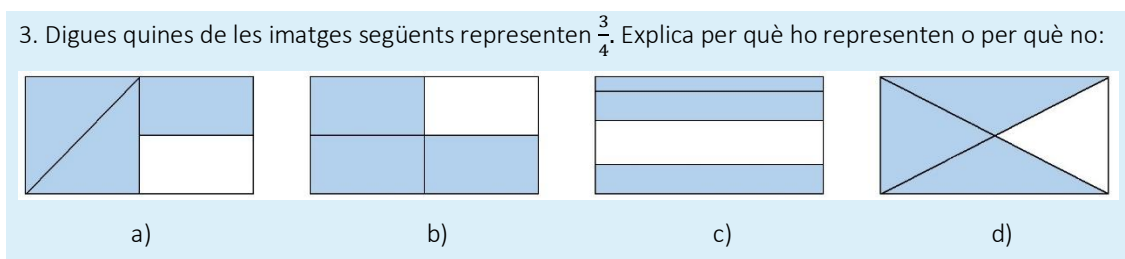
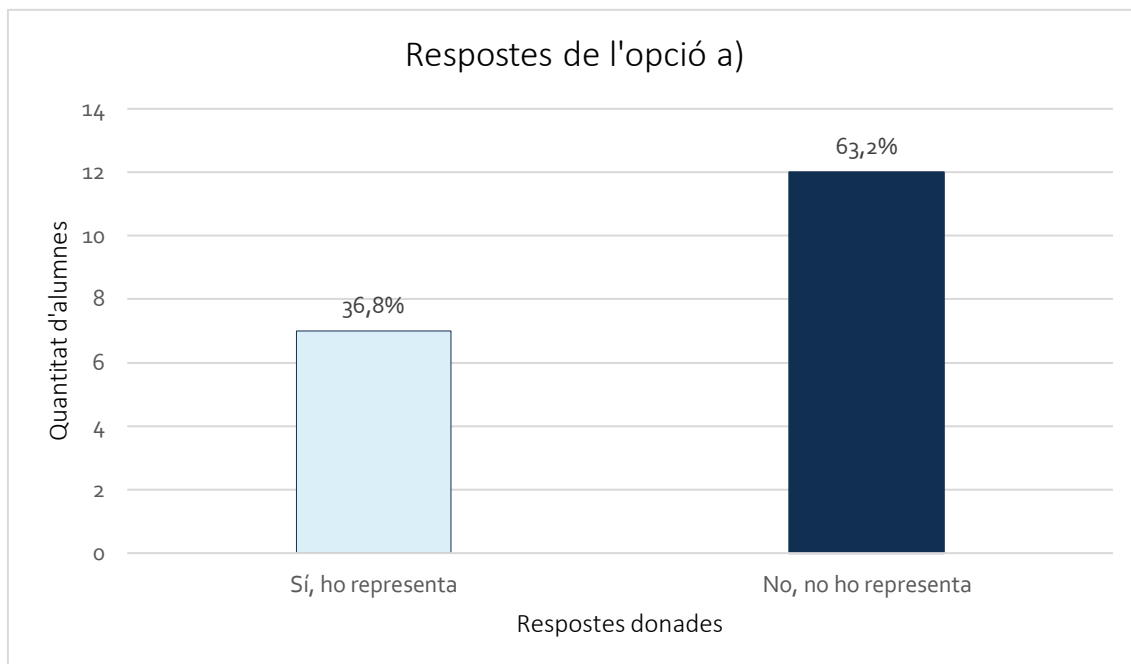


Figura 4.2. Pregunta 3 del qüestionari.

Les respostes d'aquesta pregunta s'analitzaran per opcions.

#### OPCIÓ A

Només 7 dels alumnes han respost correctament que l'opció a) representa la fracció  $\frac{3}{4}$ . Els altres 12 alumnes han respost de forma errònia que aquesta opció no ho representa.



**Figura 4.3.** Quantitat de respostes correctes i incorrectes de l'opció a) de la pregunta 3. A l'esquerra la quantitat de respostes correctes i a la dreta les incorrectes.

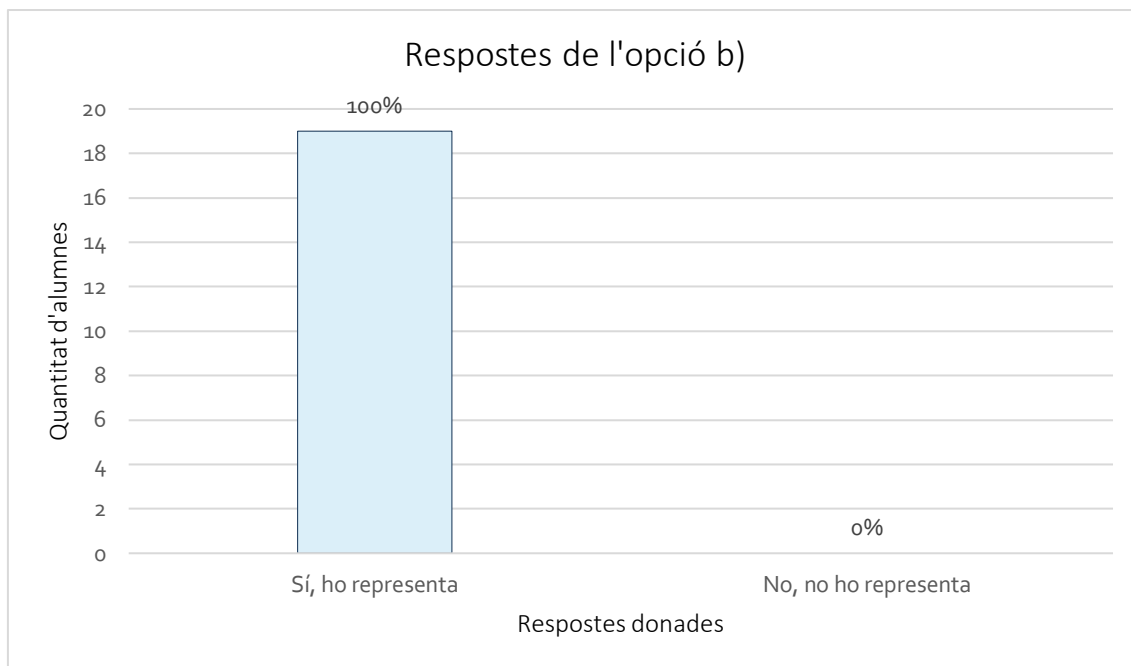
Indiferentment del que han respost, la majoria dels alumnes ha justificat la resposta fent referència a les parts amb les quals està dividit el rectangle, afirmant que les parts eren o no eren iguals. Altres arguments que s'han donat s'han basat en la forma, en la part ombrejada o en l'àrea de les parts en les quals està dividida la figura (veure taula 4.2).

Respostes de l'opció a)	Justificació	Quantitat d'alumnes
Sí, ho representa	Les parts són iguals	1
	Ombrejat	1
	Forma diferent	1
	Les parts són iguals + Ombrejat	3
	Àrea + Ombrejat	1
No, no ho representa	Les parts no són iguals	9
	No hi ha 4 parts	1
	Les parts no són iguals + Ombrejat	2

**Taula 4.2.** Justificacions dels alumnes a la opció a) de la pregunta 3.

#### OPCIÓ B

Tots els alumnes han dit correctament que l'opció b) representa la fracció  $\frac{3}{4}$ .



**Figura 4.4.** Quantitat de respostes correctes i incorrectes de l'opció b) de la pregunta 3. A l'esquerra la quantitat de respostes correctes i a la dreta les incorrectes.

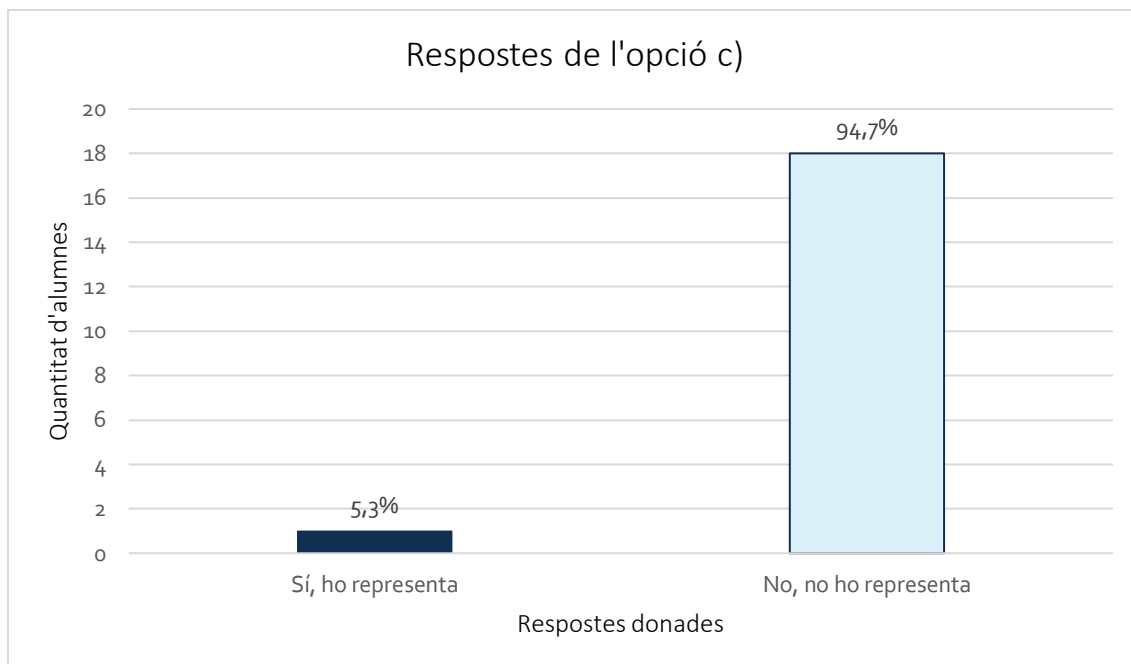
La majoria de les justificacions utilitzades fan referència a les parts de la figura i el seu ombrejat. De totes maneres, hi ha hagut molts alumnes que només han utilitzat una d'aquestes dues justificacions. Altres respostes que han sortit fan referència a l'àrea i a la mida de les parts de la figura. A la taula 4.3 es mostra la quantitat d'alumnes que ha fet cada justificació.

Respostes de l'opció b)	Justificació	Quantitat d'alumnes
Sí, ho representa	Les parts són iguals	5
	Ombrejat	5
	Les parts són iguals + Ombrejat	7
	Mida + Ombrejat	1
	Àrea + Ombrejat	1
No, no ho representa		0

**Taula 4.3.** Justificacions dels alumnes a l'opció b) de la pregunta 3.

### OPCIÓ C

Gairebé tots els alumnes han respost correctament que l'opció c) representa la fracció  $\frac{3}{4}$ . Només 1 dels alumnes creu que aquesta opció sí que ho representa.



**Figura 4.5.** Quantitat de respostes correctes i incorrectes de l'opció c) de la pregunta 3. A l'esquerra la quantitat de respostes incorrectes i a la dreta les correctes.

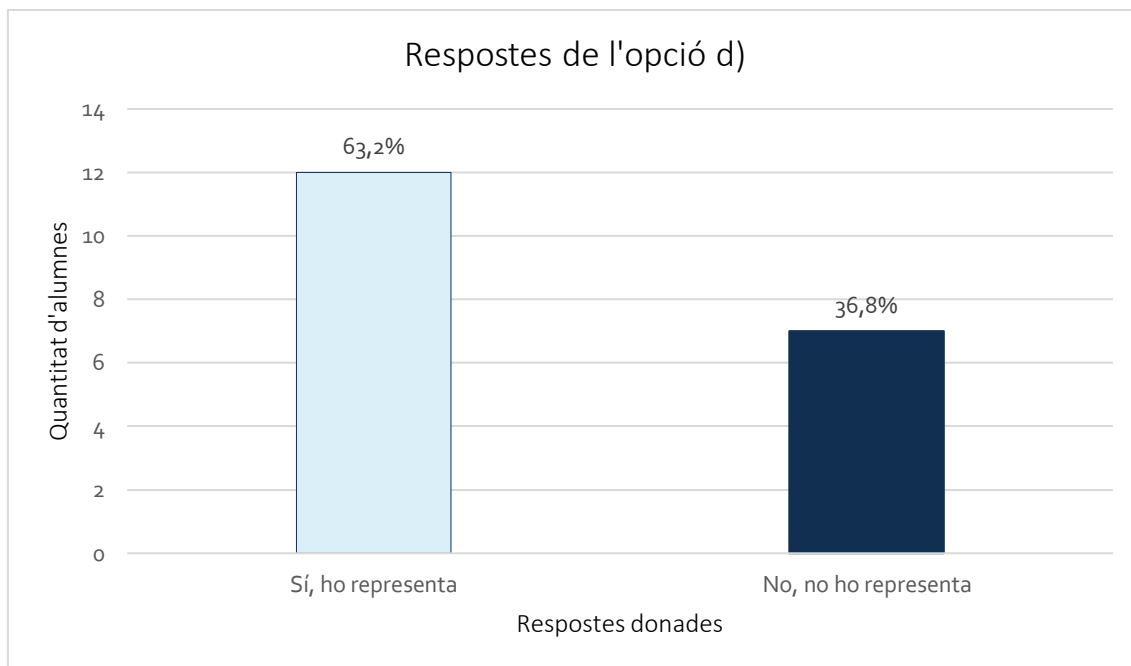
Hi ha hagut diferents raonaments sobre aquesta opció. Les més utilitzades han sigut que les parts amb les quals està dividida no són iguals o que no són de la mateixa mida. També han aparegut referències a l'ombrejat. En aquest cas, els quatre alumnes que han utilitzat aquesta justificació han explicat que, encara hi hagi pintades 3 de les 4 parts de la figura, el fet que les parts no siguin iguals, provoca que no representi  $\frac{3}{4}$ . Finalment, una de les respostes és contradictòria, ja que l'alumne diu que no ho representa perquè una de les quatre parts no està pintada. Si aquest alumne ha tingut en compte les parts que estan ombrejades i les que no, amb aquest criteri sí que ho representaria. A la taula 4.4 es mostra la quantitat d'alumnes que ha fet cada justificació.

Respostes de l'opció c)	Justificació	Quantitat d'alumnes
Sí, ho representa	Formes diferents + Ombrejat	1
No, no ho representa	Les parts no són iguals	8
	Mida	5
	Les parts no són iguals + Ombrejat	3
	Àrees diferents + Ombrejat	1
	Contradictòria	1

**Taula 4.4.** Justificacions dels alumnes a l'opció c) de la pregunta 3.

#### OPCIÓ D

Una tercera part dels alumnes han respost correctament que l'opció d) representa la fracció  $\frac{3}{4}$ .



**Figura 4.6.** Quantitat de respostes correctes i incorrectes de l'opció d) de la pregunta 3. A l'esquerra la quantitat de respostes correctes i a la dreta les incorrectes.

Les justificacions més donades en aquesta opció són, igual que en els altres casos, les parts iguals o desiguals (segons si creuen que ho representa o no), l'ombrejat i la mida. Tot i així, en aquesta opció apareix una justificació que no donen a les altres opcions. Tres dels alumnes que creuen que l'opció d) no representa  $\frac{3}{4}$ , manifesten que la figura està dividida en quatre parts que són iguals dos a dos però diferents entre elles. A la taula 4.5 es mostra la quantitat d'alumnes que ha fet cada justificació.

Respostes de l'opció d)	Justificació	Quantitat d'alumnes
Sí, ho representa	Les parts són iguals	3
	Ombrejat	2
	Les parts són iguals + ombrejat	5
	Mateixa àrea + Ombrejat	1
	Sense justificació	1
No, no ho representa	Les parts no són iguals	3
	Forma diferent	1
	Iguals dos a dos, diferents entre elles	3

**Taula 4.5.** Justificacions dels alumnes a l'opció d) de la pregunta 3.

### 4.1.3. Anàlisi de la pregunta 4

A la figura 4.7 es mostra la pregunta 4, on els alumnes han hagut d'assenyalar les  $\frac{2}{5}$  parts d'un conjunt de 10 cercles.

4. Assenyala les  $\frac{2}{5}$  parts d'aquest conjunt i explica com ho has fet.



Figura 4.7. Pregunta 4 del qüestionari.

Un terç dels alumnes han representat correctament  $\frac{2}{5}$  del conjunt format per 10 cercles, un d'ells no ha respost la pregunta i la resta han representat fraccions diferents de la que es demanava.

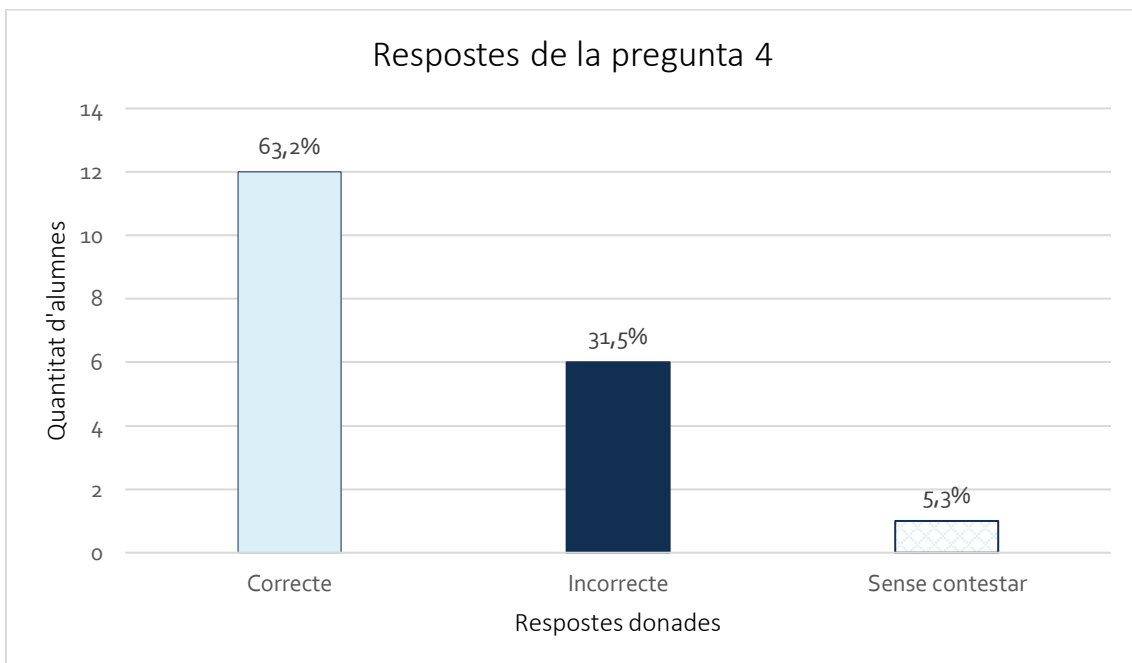


Figura 4.8. Quantitat de respostes correctes i incorrectes de la pregunta 4. A l'esquerra la quantitat de respostes correctes, al centre les incorrectes i a la dreta les no contestades.

La immensa majoria dels alumnes que han representat correctament la fracció  $\frac{2}{5}$  han utilitzat el càlcul per respondre aquesta pregunta. S'han utilitzat dues maneres diferents per calcular com representar aquesta fracció:

1. Sis dels alumnes s'han fixat en el fet que hi ha el doble de cercles que de parts en les quals han d'estar dividits. Per tant, "si  $\frac{2}{5}$  és per cada 5 cercles, com que en tenim 10, hem de pintar-ne 4 perquè és el doble de 2" (veure figura 4.9).
2. Quatre dels alumnes han utilitzat una divisió i una multiplicació per saber quants cercles havien de pintar per representar-ne les dues cinques parts. La primera operació que han fet és dividir el total de cercles (10) per la quantitat de parts en les quals els havien de dividir (5). Tot seguit,

han multiplicat el resultat (2) per les parts que havien d'agafar (2). El final d'aquest procés els ha donat 4, que són la quantitat de cercles que havien de pintar per representar  $\frac{2}{5}$  (veure figura 4.10).

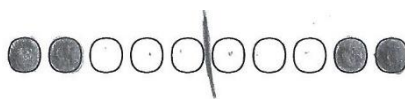


Figura 4.9. Exemple 1 de resposta correcta de la pregunta 4



Figura 4.10. Exemple 2 de resposta correcta de la pregunta 4

Dels altres dos alumnes que van respondre correctament aquesta pregunta, un d'ells explica que ho ha representat a ull i l'altre no en dona cap justificació.

Categoria	Quantitat d'alumnes
Càlcul	4
Dues vegades $\frac{2}{5}$	6
A ull	1
Sense justificació	1

Taula 4.6. Justificacions de les respostes correctes de la pregunta 4.

Casualment, de les 6 respostes incorrectes la meitat han representat  $\frac{2}{10}$  i l'altra meitat  $\frac{5}{10}$ . Només dos d'ells han justificat la seva resposta. Un diu que  $\frac{2}{5}$  vol dir que és fer la meitat de 10 i l'altra explica que per representar  $\frac{2}{5}$  dels 10 cercles, primer se n'agafen 5 i, d'aquests, se n'agafen 2 (veure figura 4.11).



Figura 4.11. Exemple de resposta incorrecte de la pregunta 4

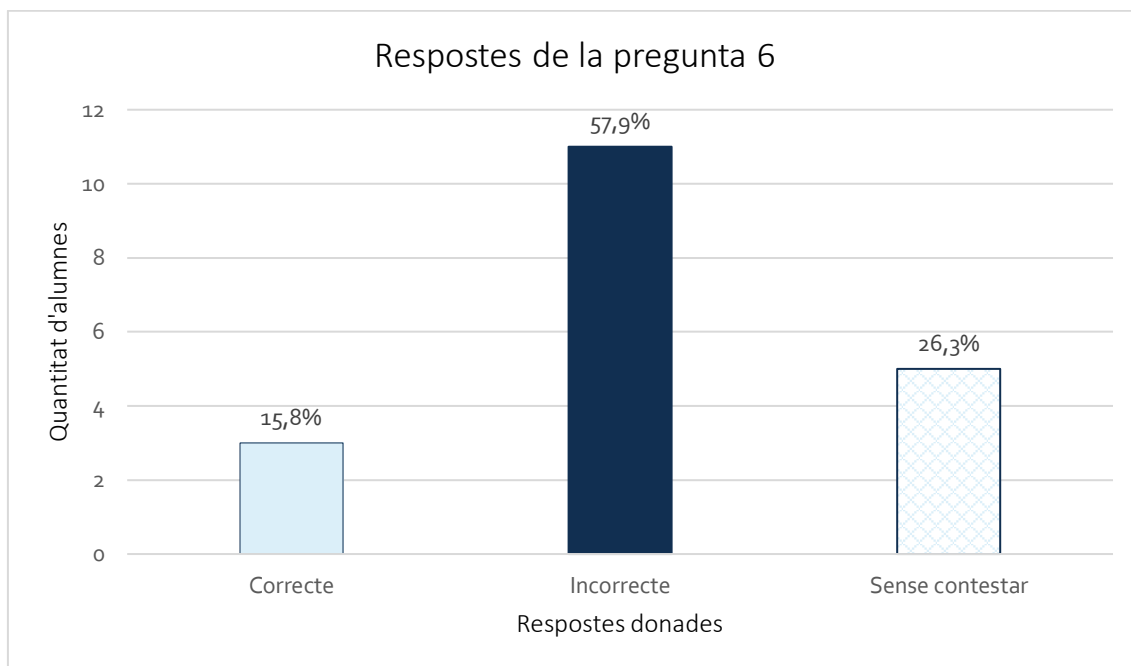
#### 4.1.4. Anàlisi de la pregunta 6

A la figura 4.12 es mostra la pregunta 6, on els alumnes han hagut de situar la fracció a la recta numèrica on hi ha situades 12 unitats.

6. Col·loca la fracció  $\frac{12}{5}$  a la recta numèrica següent i explica com ho has fet:

Figura 4.12. Pregunta 6 del qüestionari.

Només 3 dels alumnes han sabut col·locar correctament a fracció  $\frac{12}{5}$  a la recta numèrica. Dels altres alumnes, 11 l'han col·locat de forma errònia i 5 l'han deixat en blanc.



**Figura 4.13.** Quantitat de respostes correctes i incorrectes de la pregunta 6. A l'esquerra la quantitat de respostes correctes, al centre les incorrectes i a la dreta les no contestades.

Els tres alumnes que han col·locat correctament la fracció que es demanava en el punt correcte han utilitzat la mateixa estratègia. Han dividit cada unitat en cinc parts i han agafat 12 d'aquestes parts (veure figura 4.14).



**Figura 4.14.** Exemple de resposta correcta de la pregunta 6.

Els alumnes que no han col·locat correctament la fracció han utilitzat estratègies molt variades i no tots han justificat la seva resposta. Aquests alumnes han marcat que la fracció  $\frac{12}{5}$  es trobava a: 2, 5, 7, 8'5, 11'5, 15 i tot el tram de l'1 al 5. Les justificacions que s'han donat han sigut les següents:

- 🚩 Col·loca la fracció al número 5 perquè "abans de 5 hi ha 5 parts i en total n'hi ha 12". En aquest cas, aquest alumne ha confós el numerador i el denominador.
- 🚩 Un segon alumne ha col·locat la fracció de l'1 al 5 perquè "com que 12 és més gran que 5, només hem de marcar les 5 primeres parts". En aquest cas, l'alumne també confon el numerador i el denominador, però a més a més, marca tota la zona de l'1 al 5 en lloc de marcar un punt concret.
- 🚩 Un altre alumne ha fet una resta per saber on havia de col·locar la fracció. D'aquesta manera ha restat  $12-5$  i l'ha col·locat en el número 7.



- Finalment, un dels alumnes que col·loca la fracció al número 12 explicant que “hauríem de fer 3 fraccions per poder fer el resultat” acompanyat del dibuix que es veu a la figura 4.15. A més a més, aquest l'alumne confon 3 fraccions per 3 unitats.

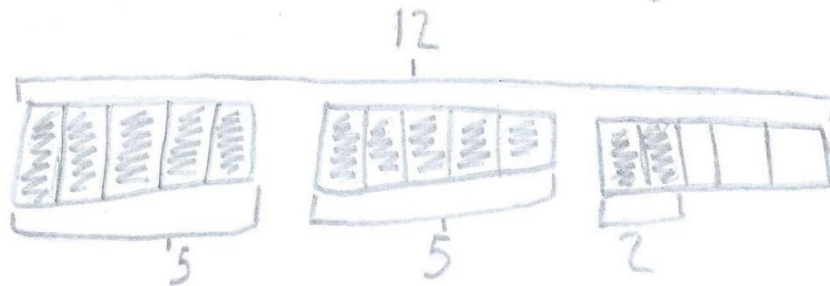


Figura 4.15. Dibuix que acompanya l'explicació d'un alumne que col·loca la fracció  $\frac{12}{5}$  en el número 12.

#### 4.1.5. Anàlisi de la pregunta 7

A la figura 4.16 es mostra la pregunta 7, on es presenten diferents situacions de la vida quotidiana que els alumnes han hagut de marcar si es poden representar amb una fracció o no, i si és que sí, a quina fracció correspon.

7. Digues quines de les següents situacions es poden representar amb una fracció i, en aquest cas, quina fracció correspon a la situació:
- La Maria i en Martí fan l'operació següent:  $8 \div 3$ .
  - Tinc 3 monedes i me n'han donat 2 més.
  - La Marta diu que es menjarà cinc sisens dels 36 caramels que té.
  - D'aquí tres quarts d'hora hem d'anar a dinar.
  - M'he comprat uns pantalons que els han rebaixat un 25%.
  - A la meua classe hi ha 13 nens i 12 nenes.
  - He tret un 6,7 de l'examen de matemàtiques.

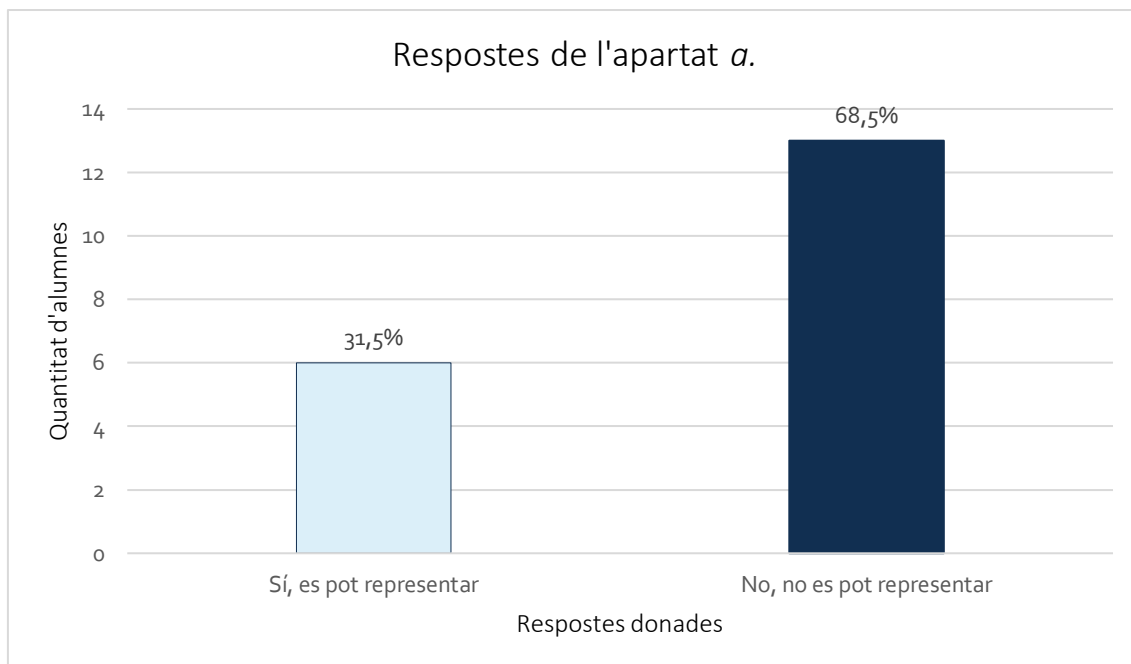
Figura 4.16. Pregunta 7 del qüestionari.

Les respostes d'aquesta pregunta s'analitzaran per apartats.

##### APARTAT A

Només la meitat dels alumnes que han contestat correctament que l'apartat *a*. es pot representar amb una fracció, han fet una proposta. D'aquestes tres, una d'elles és errònia. La divisió  $8 \div 3$  que es proposa es pot representar amb la fracció  $\frac{8}{3}$ , i no  $\frac{3}{8}$  com ha proposat aquest alumne.

Els altres 13 alumnes no creuen que aquesta situació es pugui representar amb una fracció.

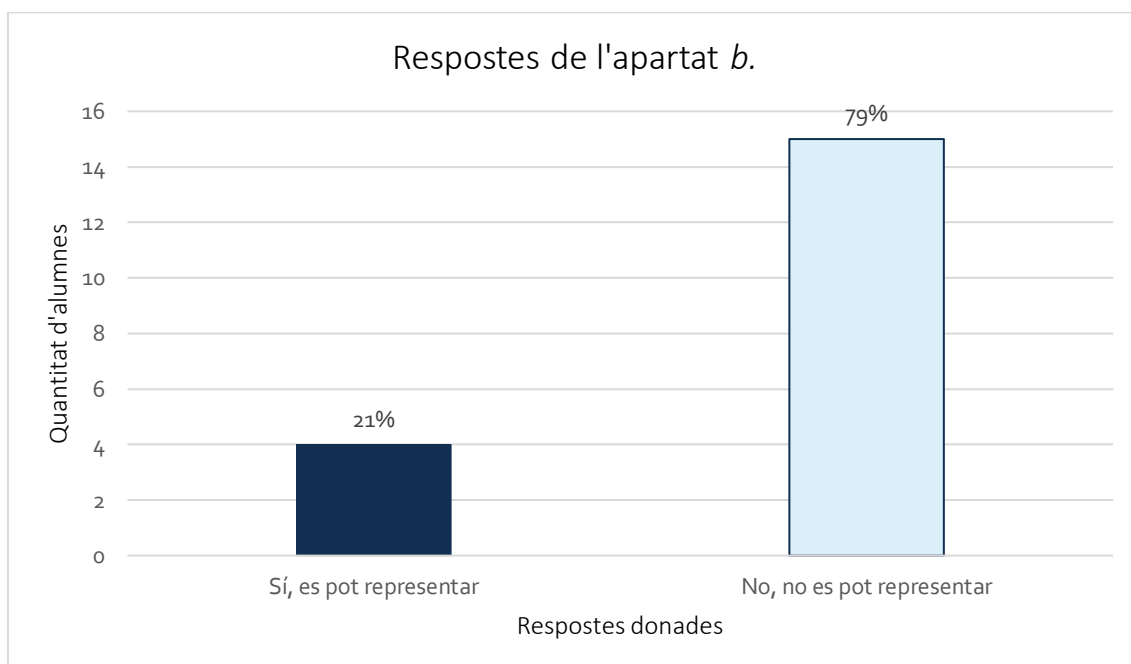


**Figura 4.17.** Quantitat de respostes correctes i incorrectes de l'apartat a. de la pregunta 7. A l'esquerra la quantitat de respostes correctes i a la dreta les incorrectes.

#### APARTAT B

La majoria dels alumnes ha respost correctament que aquesta situació no es pot representar amb una fracció. Només 4 alumnes han respost que sí que es pot representar i només dos d'ells han fet una proposta.

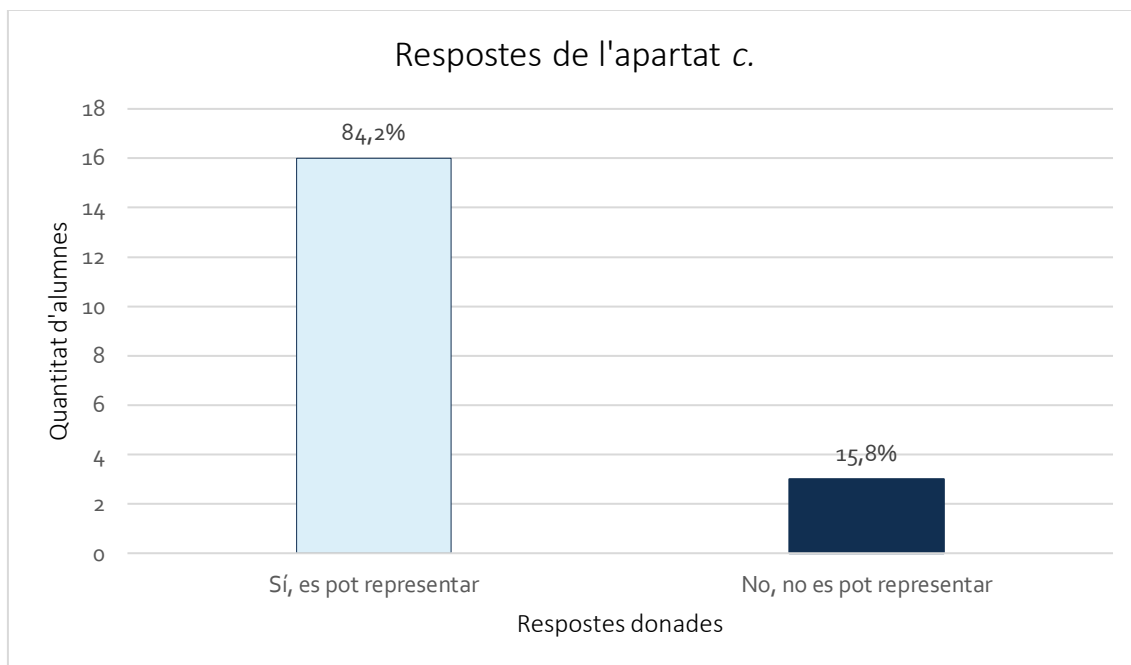
Aquestes propostes són  $\frac{2}{3}$  i  $\frac{3}{4}$ .



**Figura 4.18.** Quantitat de respostes correctes i incorrectes de la opció b. de la pregunta 7. A l'esquerra la quantitat de respostes incorrectes i a la dreta les correctes.

### APARTAT C

Excepte 3 estudiants, tots han respost correctament que aquesta situació es pot representar amb una fracció. Tot i així, no tots els alumnes han fet una proposta de fracció ni totes les fraccions proposades són correctes.



**Figura 4.19.** Quantitat de respostes correctes i incorrectes de l'apartat c. de la pregunta 7. A l'esquerra la quantitat de respostes correctes i a la dreta les incorrectes.

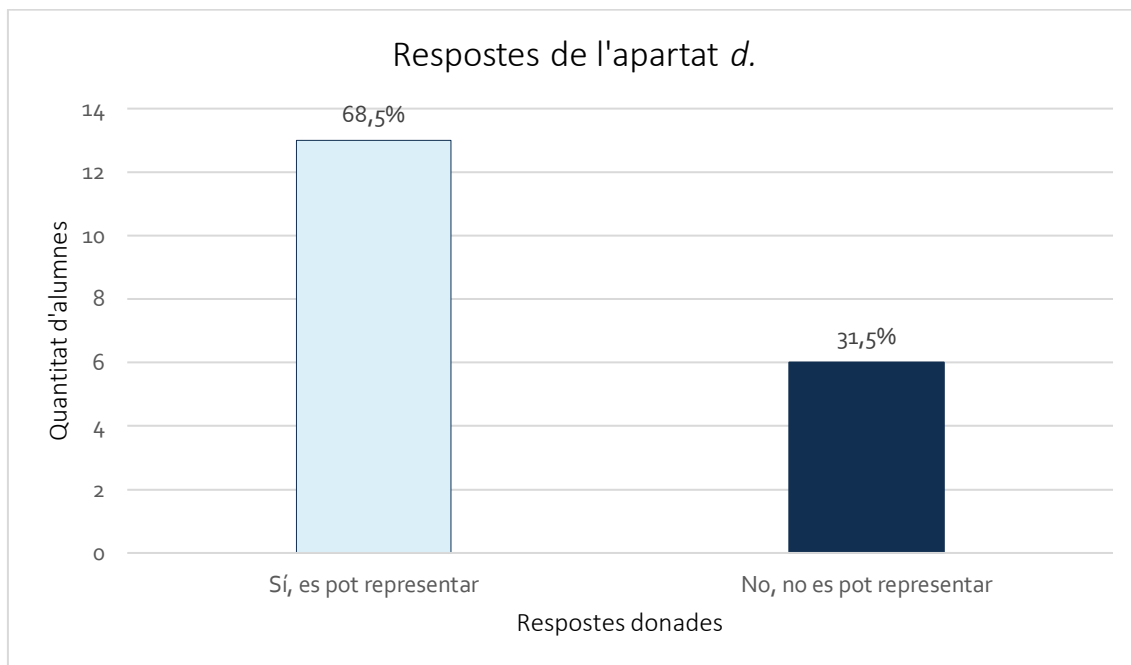
Aquesta situació es pot representar amb la fracció  $\frac{5}{6}$  o  $\frac{5}{6}$  de 36. La meitat de respostes proposades són correctes. De l'altra meitat, n'hi ha 3 que han barrejat la fracció  $\frac{5}{6}$  amb el total de caramels i han proposat fraccions com  $\frac{5}{36}$  o  $\frac{6}{36}$ . Una altra resposta errònia que s'ha donat és  $\frac{30}{36}$ , on s'ha barrejat el resultat de fer  $\frac{5}{6}$  amb el total de caramels.

Fraccions proposades per l'apartat c.	Justificació	Quantitat d'alumnes
Respostes correctes	$\frac{5}{6}$ de 36	4
	$\frac{5}{6}$	4
	No s'especifica la fracció	4
Respostes incorrectes	$\frac{30}{36}$	1
	$\frac{5}{36}$	1
	$\frac{6}{36}$	2

**Taula 4.7.** Fraccions proposades per l'apartat c. de la pregunta 7.

#### APARTAT D

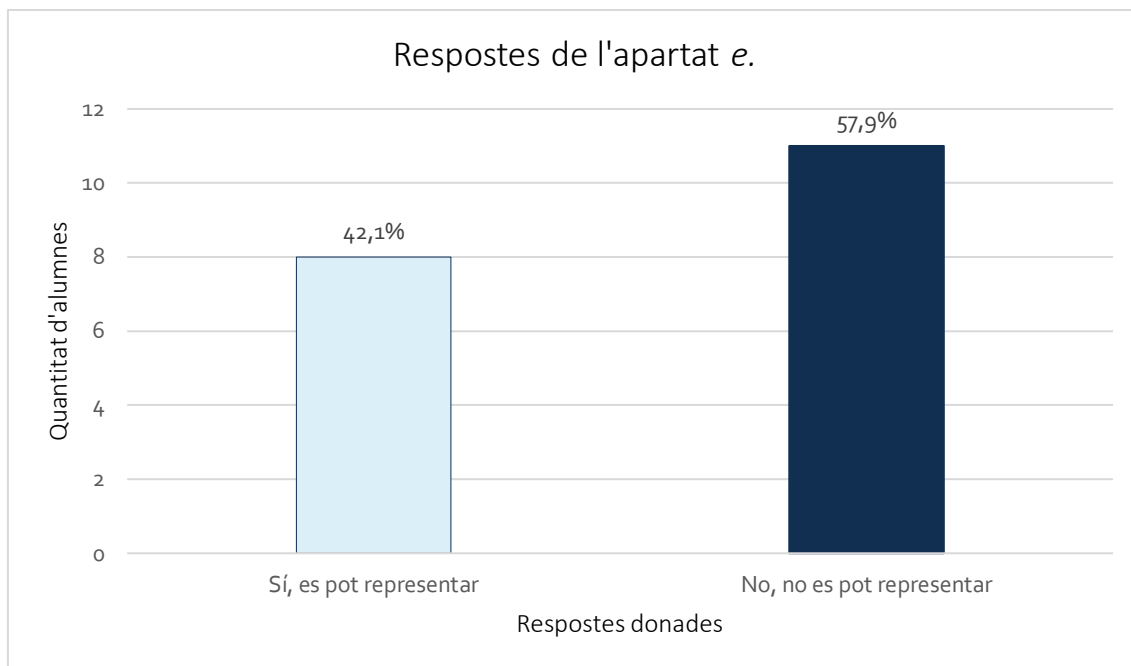
Més de la meitat dels alumnes han respost correctament que l'apartat d. es pot representar amb una fracció. Tres alumnes no han proposat cap fracció i els altres 10 han proposat la fracció  $\frac{3}{4}$ , dels quals dos d'ells han especificat  $\frac{3}{4}$  d'hora i  $\frac{3}{4}$  de 60 minuts.



**Figura 4.20.** Quantitat de respostes correctes i incorrectes de l'apartat d. de la pregunta 7. A l'esquerra la quantitat de respostes correctes i a la dreta les incorrectes.

#### APARTAT E

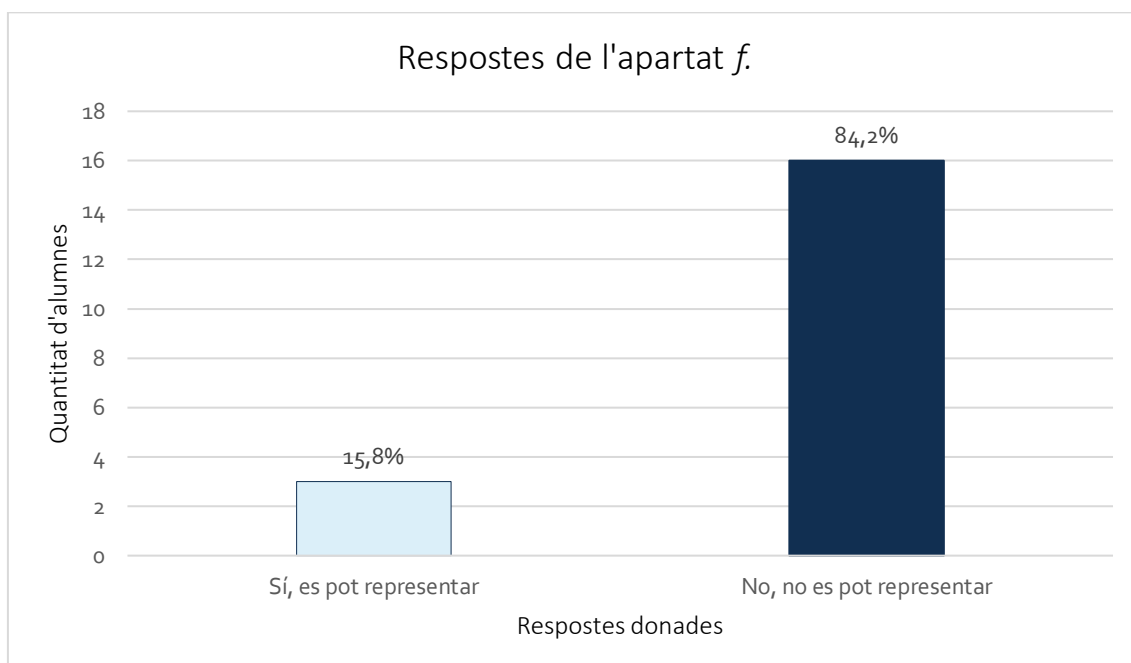
Poc menys de la meitat dels alumnes han contestat correctament que la situació de l'apartat e. es pot representar amb una fracció. D'aquests alumnes, tres no han proposat cap fracció, un ha fet una proposta errònia i els altres quatre han proposat correctament la fracció  $\frac{25}{100}$ .



**Figura 4.21.** Quantitat de respostes correctes i incorrectes de l'apartat e. de la pregunta 7. A l'esquerra la quantitat de respostes correctes i a la dreta les incorrectes.

#### APARTAT F

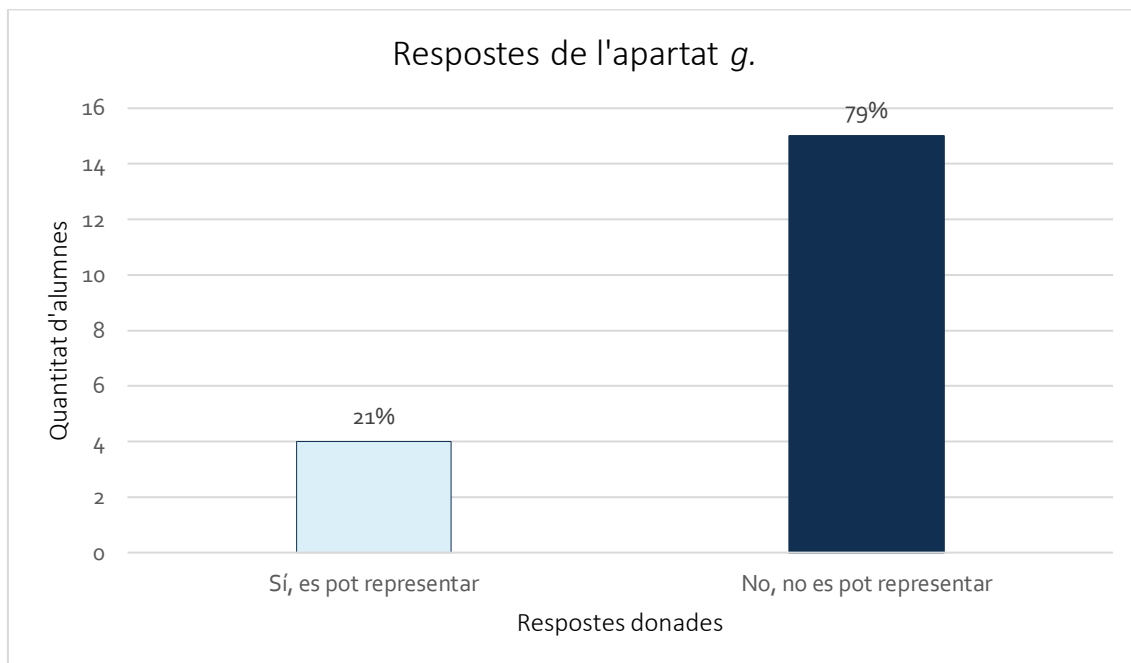
Només 3 alumnes han contestat que la situació de l'apartat f. es pot representar amb una fracció. D'aquest tres alumnes, només dos han fet una proposta i, cada un d'ells s'ha basat en una relació diferent. El primer ha proposat la fracció  $\frac{13}{12}$  basant-se en la relació entre nens i nenes. El segon ha proposat les fraccions  $\frac{13}{25}$  i  $\frac{12}{25}$  basant-se en la relació entre nens i nenes sobre el total d'alumnes.



**Figura 4.22.** Quantitat de respostes correctes i incorrectes de l'apartat f. de la pregunta 7. A l'esquerra la quantitat de respostes correctes i a la dreta les incorrectes.

#### APARTAT G

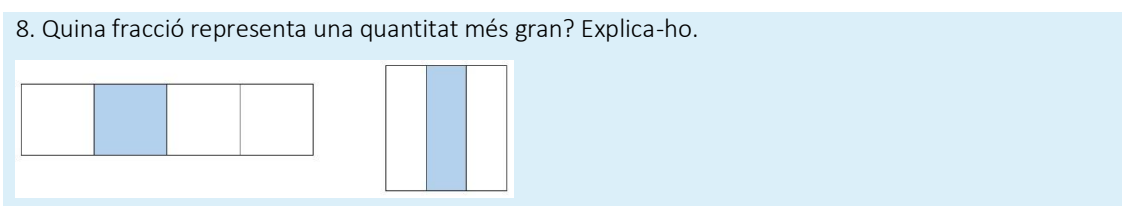
Només 4 alumnes han respost correctament que la situació de l'apartat g. es pot representar amb una fracció. Tot i així, només dos han fet una proposta de fracció i cap d'elles és correcta. Les fraccions proposades són fraccions  $\frac{6}{7}$  i  $\frac{6,7}{10}$ . Cap de les dues dona com a resultat 6,7.



**Figura 4.23.** Quantitat de respostes correctes i incorrectes de l'apartat g. de la pregunta 7. A l'esquerra la quantitat de respostes correctes i a la dreta les incorrectes.

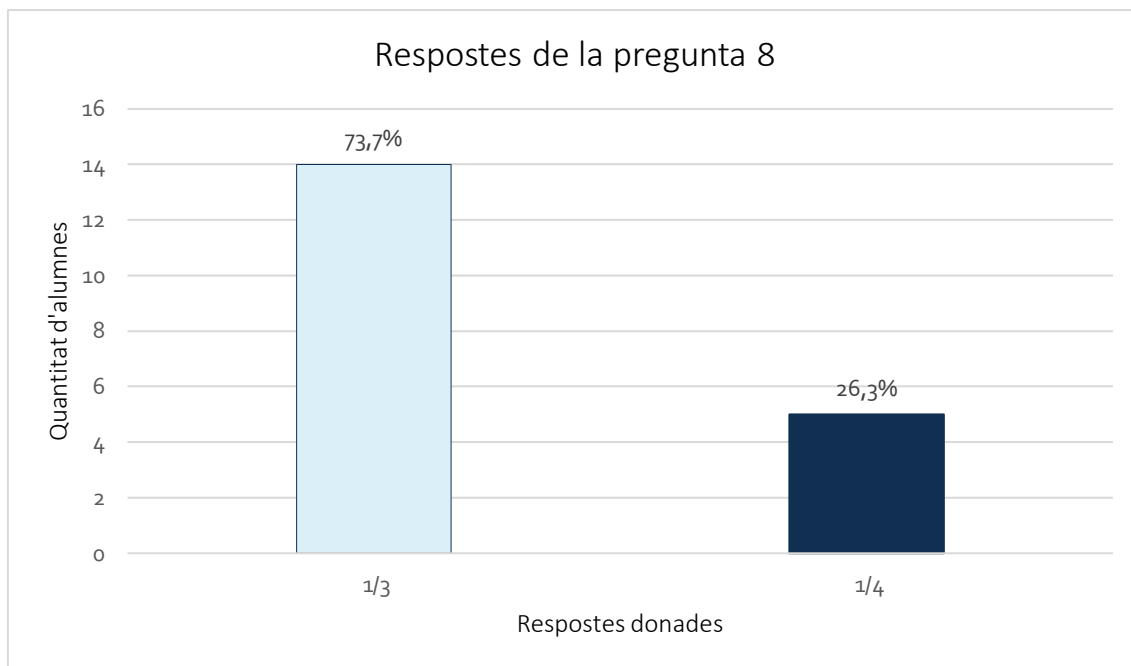
#### 4.1.6. Anàlisi de la pregunta 8

A la figura 4.24 es mostra la pregunta 8, on els alumnes han hagut de decidir quina de les dues fraccions que es mostren representa una quantitat més gran.



**Figura 4.24.** Pregunta 8 del qüestionari.

La quantitat d'alumnes que ha escollit cada opció es mostra a la figura 4.25. No hi ha hagut cap alumne que no respongués aquesta pregunta i la majoria han optat per la fracció  $\frac{1}{3}$ .



**Figura 4.25.** Quantitat de respostes de la pregunta 8.

Només dos alumnes han tingut en compte les dues representacions que es donen a la pregunta 8. Tots dos proposen la fracció  $\frac{1}{4}$  com la més gran perquè “encara que estigui repartida en més parts, el requadre és més gran” i perquè es necessita més d' $\frac{1}{3}$  per ocupar  $\frac{1}{4}$ . (veure taula 4.8).

La resta d'alumnes no han tingut en compte les representacions, o bé, no han justificat la resposta. Un d'ells explica que la fracció  $\frac{1}{3}$  és més petita perquè el numerador és més gran. En aquest cas, l'alumne es guia pels denominadors per escollir quina de les dues és més gran, però confon el numerador pel denominador. La resta d'alumnes fan referència a la quantitat, als trossos o a les dues coses. Tots 12, excepte 1, justifiquen que la fracció més gran és  $\frac{1}{3}$  perquè, en estar dividida en menys trossos la quantitat és més gran. L'alumne que ha proposat la fracció  $\frac{1}{4}$  justifica de forma errònia que “està repartida en més quantitat”.

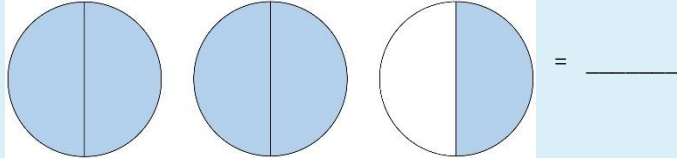
Justificació	Quantitat d'alumnes
Mida	2
Denominadors	1
Menys trossos	3
Quantitat	7
Menys trossos + Quantitat	2
Sense justificació	3

**Taula 4.8.** Justificacions de la pregunta 8.

#### 4.1.7. Anàlisi de la pregunta 10

A la figura 4.26 es mostra la pregunta 10, on els alumnes han hagut de dir quina fracció hi ha representada a la imatge i dir què representa el numerador i el denominador.

10. Digueu quina fracció hi ha representada a la imatge següent. Digueu què representa el numerador i el denominador:



Numerador:

Denominador:

Figura 4.26. Pregunta 10 del qüestionari.

Tots els alumnes han contestat aquesta pregunta. La majoria han proposat una fracció correcta i només 5 una d'incorrecte.

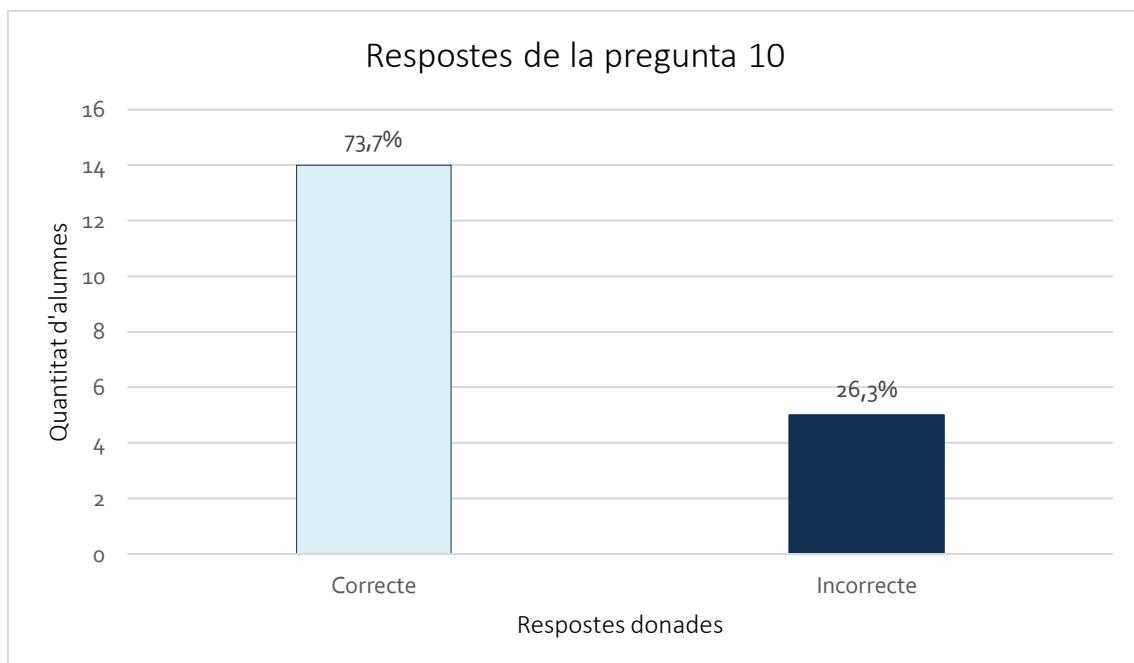
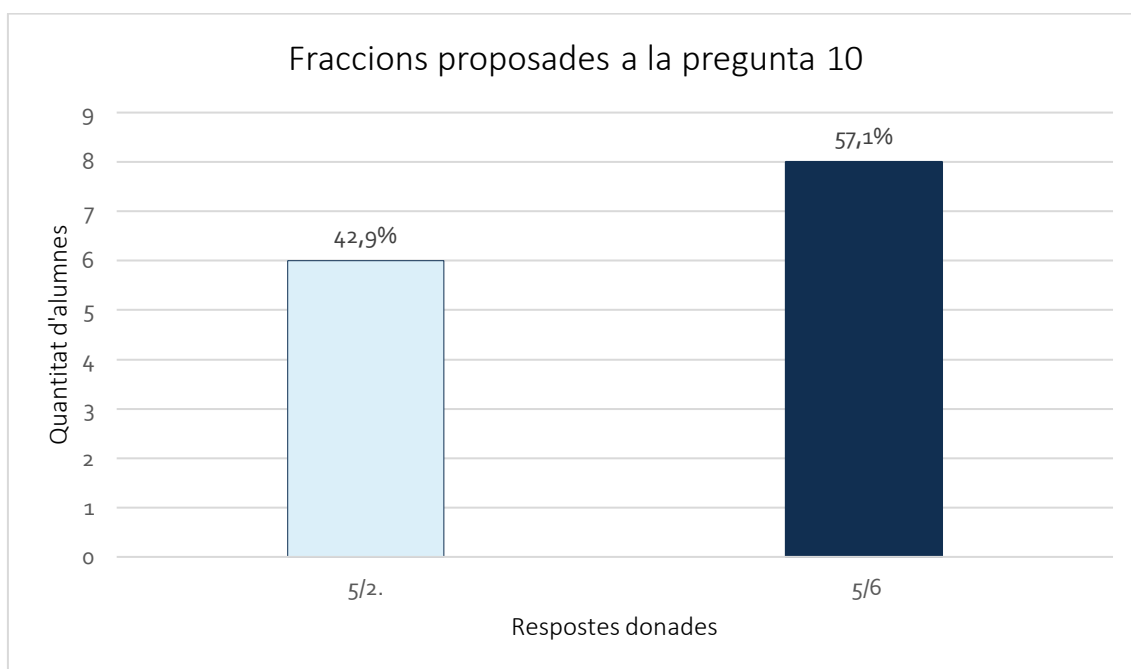


Figura 4.27. Quantitat de respostes correctes i incorrectes de la pregunta 10 (fraccions proposades). A l'esquerra la quantitat de respostes correctes i a la dreta les incorrectes.



Les dues respostes vàlides per aquesta pregunta són les fraccions  $\frac{5}{2}$  o  $\frac{5}{6}$  i han estat proposades gairebé en un 50% (veure figura 4.28). La decisió de proposar-ne una o l'altra depèn de la unitat que hagin decidit agafar els alumnes. Si han agafat com a referència que la unitat és 1 dels cercles, la fracció que han proposat és  $\frac{5}{2}$  i, si han agafat com a referència que la unitat són els 3 cercles, la fracció proposada és  $\frac{5}{6}$ .

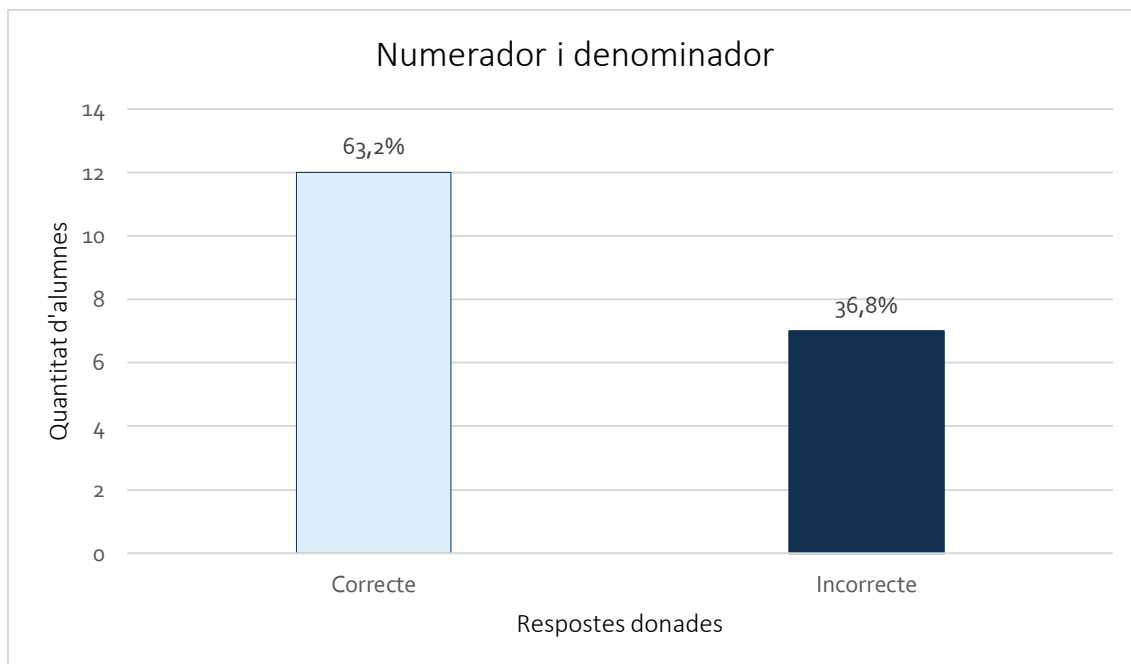
Les cinc respostes errònies han sigut:  $\frac{1}{5}$ ,  $\frac{3}{2}$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{6}{1}$  i 2'5.



**Figura 4.28.** Quantitat d'alumnes que han proposat una resposta correcta. A l'esquerra, els que han proposat  $\frac{5}{2}$  i a la dreta els que han proposat  $\frac{5}{6}$ .

Dos terços dels alumnes han dit correctament que el numerador són "les parts que agafes". Un d'ells, directament ha dit que el numerador és 5. Gairebé tots aquests alumnes diuen correctament que el denominador són "les parts que hi ha" o que és 2, en el cas de l'alumne que ho ha escrit numèricament. Un únic alumne, explica que el denominador "a vegades és el nombre més gran" sense especificar quin és en aquest cas.

Sis alumnes han confós en numerador pel denominador, girant així les seves definicions. L'alumne que ha proposat que la fracció representada és 2'5, explica que el numerador és 2 i el denominador és 0'5.



**Figura 4.29.** Quantitat de respostes correctes i incorrectes de la pregunta 10 (numerador i denominador). A l'esquerra la quantitat de respostes correctes i a la dreta les incorrectes.

## 4.2 Anàlisi de dades del qüestionari en relació al concepte de fraccions equivalents

En aquest subapartat es presenta l'anàlisi de dades de les preguntes del qüestionari que fan referència al concepte de fraccions equivalents.

### 4.2.1. Anàlisi de la pregunta 5

A la figura 4.30 es mostra la pregunta 5, on els alumnes han hagut de decidir si les dues fraccions que hi ha dibuixades representen la mateixa fracció tot justificant la seva resposta.

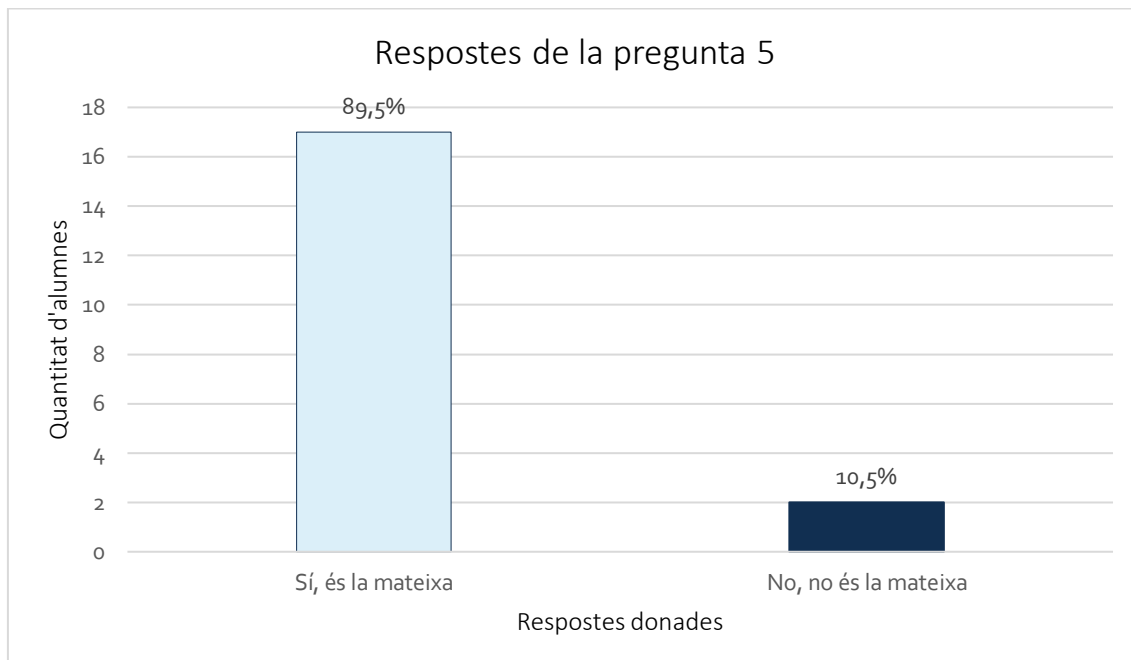
5. Les imatges següents representen la mateixa fracció?

- Sí
- No

- Explica per què si o per què no:

**Figura 4.30.** Pregunta 5 del qüestionari.

Gairebé tots els alumnes han respost correctament que les dues figures representen la mateixa fracció. Hi ha hagut tres raonaments molt igualats en quantitat d'alumnes. Només dos d'ells han respost que no són la mateixa fracció perquè està dividit en parts diferents i perquè una representa  $\frac{1}{4}$  i l'altre  $\frac{2}{8}$  i per tant, no són la mateixa fracció.



**Figura 4.31.** Quantitat de respostes correctes i incorrectes de la pregunta 5. A l'esquerra la quantitat de respostes correctes i a la dreta les incorrectes.

Dels alumnes que han respost correctament la pregunta, sis han utilitzat el càlcul per raonar-la. Quatre d'aquests alumnes han fet una multiplicació en creu per demostrar que la fracció és equivalent, dient que si multipliquem el numerador d'una fracció pel denominador de l'altre i viceversa, en els dos casos obtenim 8. Un d'ells ha fet referència al fet que 8 és múltiple de 4 i 2 és múltiple d'1, i per tant que  $\frac{1}{4}$  i que  $\frac{2}{8}$  són equivalents. L'últim alumne dins d'aquesta categoria justifica de forma errònia que  $\frac{2}{8}$  és el doble d' $\frac{1}{4}$ .

Quatre alumnes han justificat la seva resposta comparant les regions ombrejades i manifestant que ocupen la mateixa superfície.

Tres alumnes fan la seva justificació de forma conceptual, dient que les dues fraccions representen  $\frac{1}{4}$  de la figura o que  $\frac{1}{4}$  és el mateix que  $\frac{2}{8}$ . Un d'ells, expressa de forma errònia que les dues fraccions representen  $\frac{3}{4}$ .

Quatre alumnes han utilitzat dues d'aquestes justificacions que s'acaben d'explicar. Aquests alumnes han comparat les regions per justificar que sí que representen la mateixa fracció i, a més a més, han utilitzat un càlcul per demostrar-ho.

Respostes de la pregunta 5	Justificació	Quantitat d'alumnes
Sí, és la mateixa	Càlcul	6
	Comparació de regions	4
	Conceptual	3
	Càlcul + Comparació de regions	4
No, no és la mateixa	Fraccions diferents	1
	Quantitat de parts	1

Taula 4.9. Justificacions de la pregunta 5.

#### 4.2.2. Anàlisi de la pregunta 9

A la figura 4.32 es mostra la pregunta 9, on els alumnes han hagut d'explicar què són les fraccions equivalents i dibuixar-ne un exemple.

9. Explica què vol dir que dues fraccions són equivalents? Dibuixa'n un exemple i explica com ho has fet.

Figura 4.32. Pregunta 9 del qüestionari.

La majoria d'alumnes han respost correctament la pregunta 9, però dos d'aquests alumnes han utilitzat un dibuix erroni com el que es mostra a la figura 4.34.

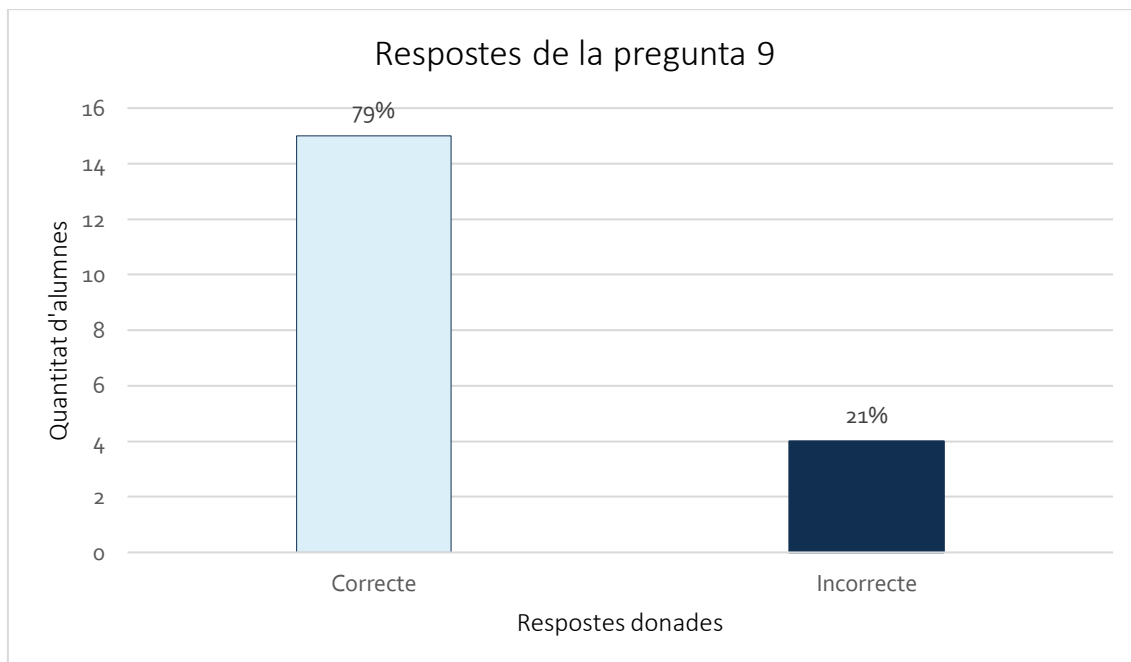


Figura 4.33. Quantitat de respostes correctes i incorrectes de la pregunta 9. A l'esquerra la quantitat de respostes correctes i a la dreta les incorrectes.

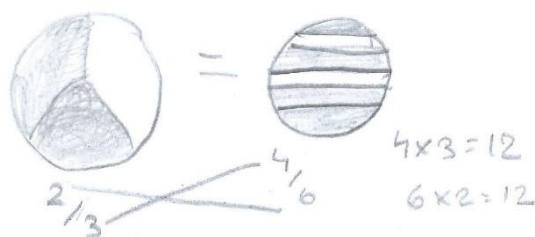


Figura 4.34. Exemple de representació errònia de la pregunta 9.

Els alumnes que han contestat correctament aquesta pregunta han seguit diferents procediments per arribar a la resposta. La majoria d'ells han utilitzat el càlcul, tant multiplicant en creu com multiplicant el numerador i el denominador pel mateix nombre per crear una fracció equivalent d'una prèvia que han plantejat. Una altra manera que han utilitzat per justificar la seva resposta ha sigut la comparació de regions, dibuixant dues fraccions i especificant que les parts ombrejades de les dues representacions ocupen la mateixa part. Altres han argumentat que les fraccions equivalents són aquelles que tenen el mateix resultat i ho han acompanyat d'un dibuix. Dos alumnes afirmen que les fraccions equivalents són aquelles que representen el mateix sense donar-ne més detalls. Finalment, un alumne ha justificat que són aquelles que tenen la mateixa quantitat. A la figura 4.35 es pot veure un exemple d'un dibuix apte per explicar què són les fraccions equivalents.



Figura 4.35. Exemple de representació correcta de la pregunta 9.

Justificacions de les respostes correctes	Quantitat d'alumnes
Càlcul	6
Comparació de regions	3
Resultat	3
Representa el mateix (sense especificar el perquè)	2
Quantitat	1

Taula 4.10. Justificacions correctes de la pregunta 9.

Els 4 alumnes que no han representat correctament les fraccions equivalents han donat justificacions diferents.

- ✚ Les fraccions equivalents són les que tenen el numerador i el denominador igual.
- ✚ La representació gràfica té una forma diferent però les dues representacions són la mateixa fracció.

- Les fraccions que tenen com a denominador el doble del numerador. Per exemple  $\frac{2}{4}$  és una fracció equivalent.
- L'últim alumne no ha justificat la seva resposta.

### 4.2.3. Anàlisi de la pregunta 11

A la figura 4.36 es mostra la pregunta 11, on els alumnes han hagut d'explicar a partir d'un dibuix perquè les fraccions  $\frac{4}{8}$  i  $\frac{6}{12}$  són equivalents.

11. Com pots explicar amb un dibuix que  $\frac{4}{8}$  i  $\frac{6}{12}$  són equivalents?

Figura 4.36. Pregunta 11 del qüestionari.

Més de la meitat dels alumnes han contestat correctament aquesta pregunta. Dotze alumnes han explicat correctament perquè les fraccions  $\frac{4}{8}$  i  $\frac{6}{12}$  són equivalents utilitzant diferents justificacions. Un únic alumne ha deixat la pregunta en blanc i 6 no responen correctament la pregunta.

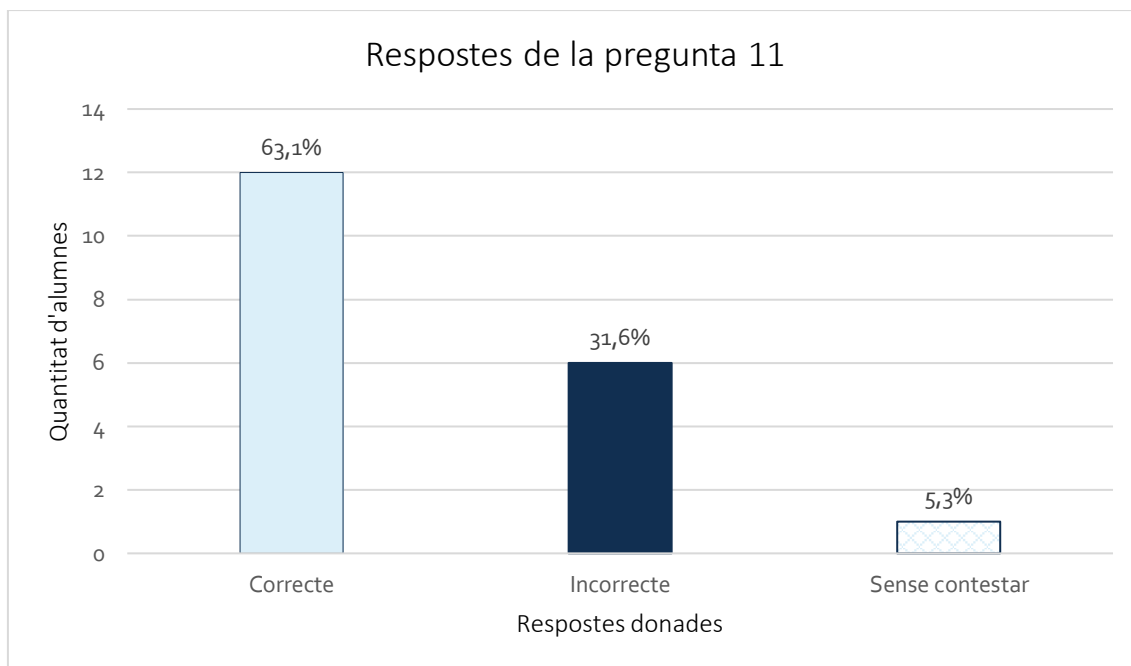
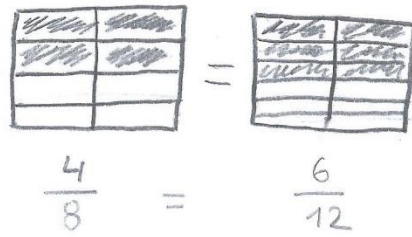


Figura 4.37. Quantitat de respostes correctes i incorrectes de la pregunta 11. A l'esquerra la quantitat de respostes correctes, al centre les incorrectes i a la dreta les no contestades.

Els alumnes han utilitzat dues maneres diferents per explicar-se o bé ha utilitzat les dues. Hi ha hagut 2 alumnes que han utilitzat el càlcul en creu per a demostrar l'equivalència de les dues fraccions. La majoria dels alumnes, 7 en concret, han comparat les regions de les dues fraccions comprovant que ocupaven la mateixa superfície. Els altres tres alumnes, han utilitzat les dues justificacions per a demostrar l'equivalència de les fraccions  $\frac{4}{8}$  i  $\frac{6}{12}$ .



**Figura 4.38.** Exemple de representació correcta de la pregunta 11.

Justificacions de les respostes correctes	Quantitat d'alumnes
Càlcul	2
Comparació de regions	7
Càlcul + Comparació de regions	3

**Taula 4.11.** Justificacions correctes de la pregunta 11.

Els alumnes que no han respost correctament la pregunta, només han dibuixat dues fraccions amb unitats de diferents mides i/o formes i no han donat cap justificació més enllà de  $\frac{4}{8} = \frac{6}{12}$ .

## 5. CONCLUSIONS



En aquest apartat s'exposen les conclusions de la recerca. Aquest està estructurat en quatre subapartats. En el primer, es presenten les conclusions relacionades amb els objectius i la pregunta de recerca. En el segon, queden reflectides les limitacions amb les quals m'he trobat al final d'aquest procés. El tercer centra la seva atenció en una futura recerca relacionada amb la que es presenta en aquest Treball de Final de Grau. I, en l'últim, queda reflectida la valoració del procés d'aquest estudi.

## 5.1 Conclusions sobre els resultats de la recerca

La figura 5.1 mostra la pregunta de recerca plantejada inicialment.

Quina és l'efectivitat de la metodologia emprada per una escola en relació amb l'ensenyament de les fraccions respecte al grau de comprensió d'aquest concepte en el seu alumnat de 6è de primària?

**Figura 5.1.** Pregunta de recerca

Les conclusions estan classificades de la següent manera. S'explicarà quina és la conclusió dels conceptes tractats en el marc metodològic tenint en compte les respostes de les preguntes del qüestionari que hi fan referència. El grau de comprensió dels alumnes es classifica en cinc nivells tenint en compte el percentatge de respostes correctes i incorrectes obtingudes en els resultats de la recerca. Aquests nivells estan representats en la taula 5.1.

	Percentatge	Nivell
Correcte	81% - 100%	5
	61% - 80%	4
Incorrecte	41% - 60%	3
	21% - 40%	2
	0% - 20%	1

**Taula 5.1.** Relació del nivell de comprensió amb el percentatge de respostes correctes i incorrectes.

A continuació s'exposen totes les conclusions explicades amb detall.

### 1. Gairebé tots s'han basat en la interpretació de la fracció com a comparació part-tot sense tenir en compte que una fracció és un nombre.

Quan els alumnes expliquen què és una fracció, tretze d'ells s'han basat en la interpretació de la fracció com a comparació part-tot. Com descriu Lamon (2012), la comparació part-tot designa un nombre de parts iguals a una unitat. Un dels alumnes es basa en la fracció com una representació de quantitats que també queda inclosa com a interpretació com a comparació part-tot. Dos alumnes la defineixen com una divisió i, els tres alumnes restants utilitzen les dues definicions.

Pel que fa a l'explicació de numerador i denominador dos terços dels alumnes tenen clar que el nombre que es troba a la part superior de la fracció és el numerador i representa "les parts que agafem" i que el de la part inferior és el denominador i representa "les parts totals que hi ha". De totes maneres, hi ha sis alumnes que saben què representen aquests dos nombres però en giren la seva ubicació explicant que el numerador és el de la part inferior i el denominador el de la part superior.

Tenint en compte aquests arguments i els percentatges de les respostes correctes en el qüestionari, es classifica el nivell de comprensió del concepte de fracció dins el nivell 3.

## **2. La majoria dels alumnes entén i sap representar les fraccions com a comparació part-tot**

Com s'ha exposat en el punt anterior, les fraccions com a comparació part-tot designen un nombre de parts iguals a una unitat. Aquesta interpretació queda clara entre els alumnes. Això queda reflectit en alguna de les situacions en les quals han de proposar quina fracció la representa i en el moment que es demana que marquin les dues cinquenes parts d'un conjunt de 10 cercles. Deu dels dotze alumnes que van saber interpretar correctament aquesta fracció dins el conjunt, van utilitzar un procediment de càlcul. Sis van representar directament dues vegades  $\frac{2}{5}$  en el conjunt d'objectes, ja que es van fixar que hi havia el doble de cercles que de parts a dividir i els altres quatre van utilitzar el procés que explica Lamon (2012), dividint primer els objectes en les parts iguals necessàries i agafant després les parts que es demanaven.

Tenint en compte aquests arguments i els percentatges de les respostes correctes en el qüestionari, es classifica el nivell de comprensió de la interpretació de fracció com a part-tot dins el nivell 3.

## **3. Els alumnes tenen moltes dificultats per a situar fraccions a la recta numèrica i per interpretar les fraccions com a raó i com a nombres decimals.**

Pel que fa a la fracció com a mesura, es pot observar com la immensa majoria dels alumnes té problemes per a situar fraccions a la recta numèrica, ja que només tres dels alumnes l'han sabut situar correctament. Les fraccions sota aquesta interpretació, són mesures assignades a un interval, en aquest cas, o a una regió. Els tres alumnes han utilitzat la mateixa estratègia per a situar la fracció que es demanava a la recta, segmentat cada unitat en les parts que es demanava i marcant la fracció a la recta en el punt on situaven el nombre de parts que havien de situar.

La fracció com a mesura, juntament amb la fracció com a raó són, mirant els percentatges, els conceptes menys assolits que tenen els alumnes. Les fraccions, com diuen Flores i Torralbo (2011), es poden expressar en una raó entre dues quantitats. Només tres alumnes han tingut aquest fet en compte. Un d'ells no proposa cap fracció per la situació que es presenta, però manifesta que sí que es pot representar amb una fracció. Els altres utilitzen una relació diferent entre els dos nombres. El primer es basa en la relació entre les dues parts (part-part) i el segon es basa en la relació entre part-tot oferint les dues fraccions possibles per a representar-ho.

Finalment, també es mostra una baixa comprensió de les fraccions com a nombres decimals, tot i que no tan baixa com les que s'acaben d'anomenar (segons percentatges). Només dos dels quatre alumnes que manifesten que la situació que es dona es pot representar amb una fracció en fa una proposta i cap d'aquestes és correcte.

Tenint en compte aquests arguments i els percentatges de les respostes correctes en el qüestionari, es classifica el nivell de comprensió de la interpretació de fracció com a mesura, com a raó i com a nombre decimal dins el nivell 1.

#### **4. Només un terç dels alumnes relacionen la divisió com una interpretació de les fraccions.**

Segons Van de Walle et al. (2013), els alumnes han d'entendre que la divisió és una representació de les fraccions i haurien de sentir-se segurs amb diferents exemples escrits, com ara:  $\frac{10}{4}$ ,  $10 \div 4$ ,  $2 \frac{2}{4}$ , i  $2 \frac{1}{2}$ . En aquest cas, quan es presenta una situació real on hi ha una divisió escrita, més de la meitat dels alumnes no són capaços de trobar-hi una relació amb les fraccions. A més a més, de les propostes que donen els alumnes per a representar la situació, una d'elles és errònia perquè l'alumne ha girat l'ordre dels nombres.

Tenint en compte aquests arguments i els percentatges de les respostes correctes en el qüestionari, es classifica el nivell de comprensió de la interpretació de fracció com a quocient dins el nivell 2.

#### **5. La majoria dels alumnes tenen clar que les fraccions poden actuar com a operador sobre una quantitat.**

La gran majoria dels alumnes té clar que les fraccions funcionen com a operador quan aquesta actua sobre una quantitat, en aquest cas, o una regió. Tot i així, tres d'aquests alumnes han proposat fraccions que no són correctes. Un d'aquests casos ha calculat el resultat de la fracció sobre la quantitat que es donava però, a l'hora de proposar la fracció no ho ha sabut reflectir, de manera que ha proposat una fracció amb el resultat com a numerador i el nombre amb el qual partia com a denominador. Els altres dos, en canvi, no han tingut en compte els passos a seguir per aconseguir el resultat i han proposat fraccions amb el nombre amb el qual es parteix a la situació en el denominador i un dels nombres de la fracció que s'havia d'aplicar en el numerador.

Tenint en compte aquests arguments i els percentatges de les respostes correctes en el qüestionari, es classifica el nivell de comprensió de la interpretació de fracció com a operador dins el nivell 5.

#### **6. Gairebé la meitat dels alumnes relacionen els percentatges amb les fraccions però molt pocs les saben representar.**

Quan els alumnes es troben amb una situació on hi ha un percentatge, la gran majoria tenen clar que aquest es pot representar amb una fracció. Tot i així, només quatre dels alumnes han proposat una fracció correcta per la situació que es proposava.

Tenint en compte aquests arguments i els percentatges de les respostes correctes en el qüestionari, es classifica el nivell de comprensió de la interpretació de fracció com a percentatge dins el nivell 3.

- 7. Els alumnes són capaços de representar situacions reals amb una fracció que hi fa referència. De totes maneres, les interpretacions de les fraccions com a mesura, com a raó i com a nombre decimal són les que menys quantitat d'alumnes han sabut representar.**

Tenint en compte totes les conclusions que fan referència a la interpretació de fraccions (de la 2 a la 7), podem classificar el nivell de comprensió de les interpretacions de les fraccions dins el nivell 3.

- 8. La majoria dels alumnes tenen en compte que les fraccions depenen d'una unitat i la saben utilitzar per a escriure una fracció.**

En el qüestionari es demana als alumnes que escriguin quina fracció interpreta la figura que hi ha representada. En aquest cas, els alumnes podien escollir quina de les dues possibles fraccions, ja que no s'especificava quina era la unitat de la figura. La majoria dels alumnes va proposar una de les dues fraccions possibles tenint en compte si agafaven com a referència una unitat o una altra. En aquest cas, podien proposar una fracció que tingués com a unitat un cercle o tres. Curiosament, la quantitat d'alumnes que es van basar en un cercle com a unitat i els que es van basar en els tres cercles com a unitat, queden repartits gairebé en un 50%-50%.

Tenint en compte aquests arguments i els percentatges de les respostes correctes en el qüestionari, es classifica el nivell de comprensió de la interpretació del concepte d'unitat dins el nivell 4.

- 9. Tots els alumnes tenen clar que una unitat està dividida en parts iguals quan les parts tenen la mateixa mida i la mateixa forma, però només dues terceres parts creuen que una unitat també està dividida en parts iguals si les parts tenen la mateixa mida i formes diferents.**

Lamon (2012) argumenta que el procés de partició implica que les parts han de ser de la mateixa mida indiferentment de la seva forma. Els alumnes tenen molt clar si una figura representa o no una fracció quan les parts d'aquesta tenen la mateixa forma i la mateixa mida. Tot i així, un dels alumnes, davant d'una figura dividida en formes iguals però amb mides diferents, manifesta que és correcta. Pel que fa a les figures que estan dividides en formes iguals però de la mateixa mida, un terç dels alumnes no veuen aquestes parts siguin iguals.

Tenint en compte aquests arguments i els percentatges de les respostes correctes en el qüestionari, es classifica el nivell de comprensió de la interpretació del procés de partició dins el nivell 4.

- 10. La immensa majoria d'alumnes no ha tingut en compte que les representacions gràfiques d' $\frac{1}{3}$  i d' $\frac{1}{4}$  tenen unitats de diferent àrea a l'hora de comparar-les.**

Van de Walle et al. (2013) expressen que, utilitzant algorismes per a comparar fraccions, no es requereix cap pensament sobre la mida de les fraccions. En aquest cas, es donaven dues representacions de dues fraccions diferents que s'havien de comparar. El fet d'utilitzar algorismes per a comparar-les, ha provocat que només dos alumnes tinguessin en compte aquestes representacions. De totes maneres, si no hi hagués hagut cap representació i el qüestionari s'hagués limitat a preguntar quina de les dues és més gran, la majoria d'alumnes hagués contestat correctament aquesta pregunta. Lamon (2012) comenta que no és molt difícil comparar fraccions que comparteixen el numerador, ja que només cal preguntar-se amb quina de les dues s'obindrà una part més gran i amb quina una part més petita. Seguint aquest procediment, la majoria dels alumnes han justificat la seva elecció fent referència a la quantitat de parts que es fan a cada representació i la mida que tenen aquests. De totes maneres, una de les dificultats d'aprenentatge que exposen Van de Walle et al. (2013) és precisament que els alumnes poden pensar que  $\frac{1}{3}$  és més petit que  $\frac{1}{4}$  perquè 3 és més petit que 4.

Tenint en compte aquests arguments i els percentatges de les respostes correctes en el qüestionari, es classificaria el nivell de comprensió de la comparació de fraccions entre el nivell 1 i el nivell 4. Per aquest motiu, s'opta per fer-ne la mitjana i classificar-la finalment en el nivell 3.

#### **11. Gairebé tots els alumnes utilitzen algorismes per definir i representar les fraccions equivalents.**

Lamon (2012) proposa representar les fraccions que volem comparar de manera que la unitat sigui la mateixa i es pugui veure si les dues fraccions ocupen la mateixa superfície o no. Els alumnes, en canvi, opten pels algorismes quan se'ls demana què són les fraccions equivalents o quan es demana que en posin un exemple o que el justifiquin. Els càlculs que utilitzen són el càlcul en creu o la multiplicació de numerador i denominador d'una fracció pel mateix nombre per obtenir una nova fracció. Aproximadament un terç dels alumnes, fan referència també a la comparació de regions tal com proposa Lamon (2012).

Tenint en compte aquests arguments i els percentatges de les respostes correctes en el qüestionari, es classifica el nivell de comprensió de la interpretació de les fraccions equivalents dins el nivell 4.

#### **12. Tenint en compte la pregunta de recerca plantejada, podem afirmar que la metodologia que utilitza aquesta escola mostra una efectivitat mitja-alta en els seus alumnes.**

A la figura 5.2 queden reflectits els nivells de tots els conceptes que s'han classificat. En ell es pot veure com la majoria dels conceptes estudiats estan entre el tercer i el cinquè nivell. Els únics conceptes que estan per sota del nivell tres, que equivaldria al nivell mitjà, són diferents interpretacions de les fraccions. D'aquesta manera, caldria potenciar les diferents representacions de les fraccions d'alguna manera, ja sigui utilitzant altres estratègies o parant-hi més atenció. De totes maneres, la mitjana dels nivells de totes les interpretacions les situa en el nivell 3, és a dir que, en general no es troba per sota del nivell mitjà.

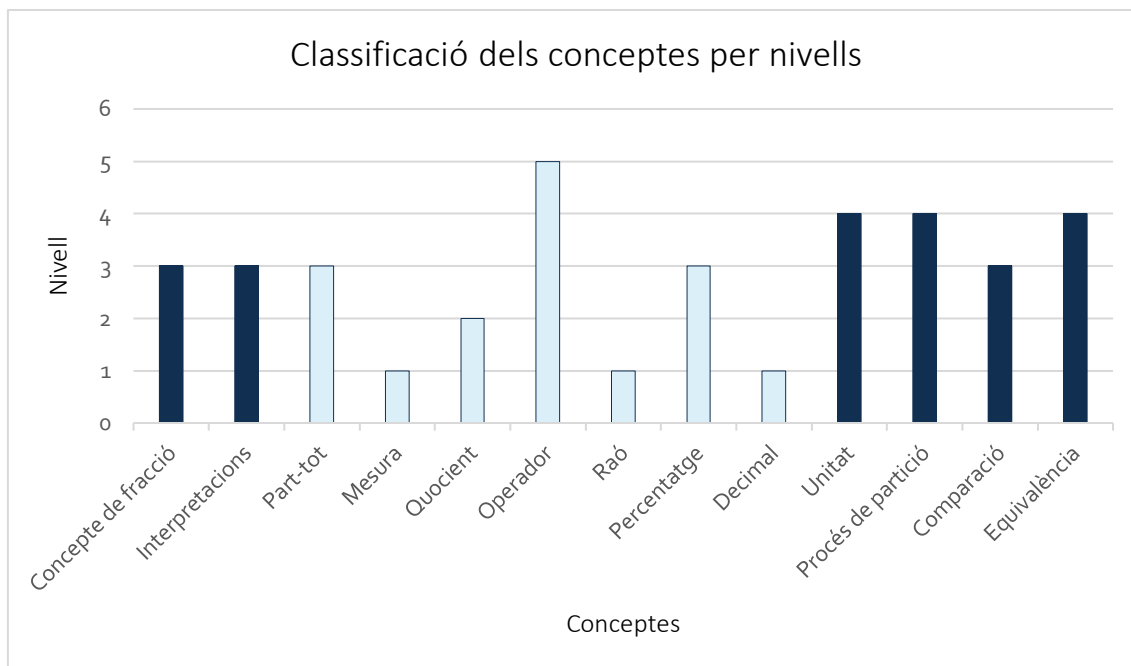


Figura 5.2. Classificació dels conceptes per nivells

## 5.2 Limitacions

És evident que estem vivint un moment excepcional. Hi ha maneres i maneres d'afrontar situacions estranyes i, per a molts, aquestes situacions poden ser difícils. Malauradament, aquestes circumstàncies m'han sobrepassat més del que voldria i hi ha hagut molts dies que he sigut incapaç de treballar en aquest estudi i d'altres que m'hi he passat hores i hores i no he avançat gens perquè la concentració després de tants dies tancada a casa no és la mateixa. Tinc la sensació que, tot i haver gaudit durant tot el procés d'aquest Treball de Final de Grau, en situacions normals, l'hagués viscut d'una altra manera.

De totes maneres, aquesta situació no ha afectat gaire a la creació d'aquest estudi, ja que havia recopilat gairebé tota la informació necessària abans que tot això comencés. Quan es va decretar l'estat d'alarma ja tenia tots els qüestionaris contestats i només em faltaven les entrevistes. Aquest punt sí que ha sigut més flux del que m'havia plantejat en un principi. La idea era explicar d'una manera més detallada com treballen els conceptes estudiats a l'escola. Una entrevista cara a cara m'hagués ajudat a treure molta més informació de la que he aconseguit amb les entrevistes via formulari de Google.

Tot i així, cal dir que estic molt contenta amb el resultat i més tenint en compte en la situació en la qual ens hem trobat durant aquests últims mesos.

---

## 5.3 Futures recerques

---

L'anàlisi que s'ha realitzat en aquest estudi s'ha centrat en el concepte de fracció i les fraccions equivalents. Les fraccions no s'acaben amb aquests dos conceptes, així que se m'acut un possible estudi que podria tenir continuïtat en una nova investigació. Es tracta de centrar l'estudi en l'ensenyament de les operacions amb fraccions. Aquest estudi tant es podria centrar en una de les operacions o en més d'una, per exemple la suma i la resta. Aquest nou estudi es podria realitzar seguint el mateix procediment que s'ha seguit per a realitzar aquest.

---

## 5.4 Valoració del procés

---

Portar a terme aquest estudi ha sigut un camí llarg i intens, però a la vegada molt gratificant. D'entrada em preocupava una mica que el tema del meu estudi no acabés de convèncer a l'escola, ja que l'estudi consisteix en valorar la metodologia que estan utilitzant i podrien no sentir-se còmodes. Al contrari del que jo pensava, quan vaig presentar el tema a la directora de l'escola es va mostrar molt motivada i de seguida em va donar llum verda i em va demanar si li podria enviar una còpia quan el tingués acabat. Un punt de motivació afegida que he tingut és que l'escola on he realitzat aquest estudi és la mateixa on vaig anar jo quan era petita, amb la diferència que han anat innovant la metodologia i avui en dia, no té res a veure al que jo recordo.

Tornant al procés d'aquest estudi, m'ha servit molt per aprendre a mirar les respostes dels infants d'una altra manera; més enllà de si la resposta és correcta o no. Quan redactava els resultats de la cerca i les conclusions d'aquests resultats, em preguntava quina idea tenien els alumnes sobre cada concepte i, en cas que no fos del tot correcte, intentava buscar què era el que podria haver fallat en el seu aprenentatge i com es podria reforçar. Aquest fet crec que ha sigut molt positiu de cara al meu futur com a professional per no perdre mai de vista el meu objectiu: que els infants aprenguin.

## 6. BIBLIOGRAFIA



- Clarke, D. M., Roche, A. i Mitchell, A. (2008). 10 Practical tips for making fractions come alive and make sense. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 13(7), 373-380.
- Departament d'Educació. Servei d'Ordenació Curricular (2009). *Currículum Educació Primària*. Consultat 12 febrer 2020, des de <http://ensenyament.gencat.cat/ca/departament/publicacions/colleccions/curriculum/curriculum-ed-primaria/>
- Esteve, S. i Sellas, I. (2012). Unitat 6: Fraccions. Dins Esteve, S. i Sellas, I. (ed.), *Matemàtiques. Cicle mitjà 1*. (p. 95-110). Vic: Eumo Editorial
- Esteve, S. i Sellas, I. (2012). Unitat 6: Fraccions. Dins Esteve, S. i Sellas, I. (ed.), *Matemàtiques. Cicle mitjà 2*. (p. 87-104). Vic: Eumo Editorial
- Flores, P. i Torralbo, M (2011). Números racionales. Dins I. Segovia i L. Rico (Coords.), *Matemáticas para maestros de Educación Primaria* (p. 189-218). Madrid: Ediciones Pirámide.
- Lamon, S. J. (2012). *Teaching fractions and ratios for understanding. Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. New York, NY: Taylor & Francis.
- Sellas, I. (2015). *Els coneixements dels estudiants de mestre sobre les fraccions i el seu ensenyament*. (Tesi doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona, Catalunya). Recuperat de <https://www.tdx.cat/handle/10803/394011>
- Van de Walle, J.A., Karp, K.S. i Bay-Williams, J. M. (2013). Teaching Mathematics Equitably to All Children. Dins Van de Walle, J.A., Karp, K.S. i Bay-Williams, J. M., *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally* (P. 94-112). Upper Saddle River: Pearson
- Van de Walle, J.A., Karp, K.S. i Bay-Williams, J. M. (2013). Developing Fraction Concepts. Dins Van de Walle, J.A., Karp, K.S. i Bay-Williams, J. M., *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally* (P. 290-314). Upper Saddle River: Pearson

## 7. ÍNDEX DE TAULES

<b>Taula 2.1.</b> Continguts relacionats amb les fraccions dins el currículum d'educació primària (2009).	22
<b>Taula 3.1</b> Pregunta de control per a la selecció dels participants.	32
<b>Taula 3.2.</b> Preguntes del qüestionari en relació al concepte de fracció.	32
<b>Taula 3.3.</b> Preguntes del qüestionari en relació al concepte de fraccions equivalents.	35
<b>Taula 4.1.</b> Classificació de les respostes segons les categories de les definicions.	38
<b>Taula 4.2.</b> Justificacions dels alumnes a l'opció a) de la pregunta 3.	40
<b>Taula 4.3.</b> Justificacions dels alumnes a l'opció b) de la pregunta 3.	41
<b>Taula 4.4.</b> Justificacions dels alumnes a l'opció c) de la pregunta 3.	42
<b>Taula 4.5.</b> Justificacions dels alumnes a l'opció d) de la pregunta 3.	43
<b>Taula 4.6.</b> Justificacions de les respostes correctes de la pregunta 4.	45
<b>Taula 4.7.</b> Fraccions proposades per l'apartat c. de la pregunta 7.	49
<b>Taula 4.8.</b> Justificacions de la pregunta 8.	53
<b>Taula 4.9.</b> Justificacions de la pregunta 5.	58
<b>Taula 4.10.</b> Justificacions correctes de la pregunta 9.	59
<b>Taula 4.11.</b> Justificacions correctes de la pregunta 11.	61
<b>Taula 5.1.</b> Relació del nivell de comprensió amb el percentatge de respostes correctes i incorrectes.	63

## 8. INDEX DE FIGURES

<b>Figura 2.1.</b> Exemple de representació de fracció com a part-tot. Adaptat de <i>Matemàtiques. Cicle mitjà 1</i> , de Esteve, S. i Sellas, I., 2012, p.98.	13
<b>Figura 2.2.</b> Exemple de fracció com a col·lecció d'objectes ( $\frac{1}{4}$ ). Extret de <i>Matemàtiques. Cicle mitjà 2.</i> , de Esteve, S. i Sellas, I., 2012, p. 91.	13
<b>Figura 2.3.</b> Exemple d'una col·lecció d'objectes que no es pot fraccionar en cinquens. Adaptat de <i>Matemàtiques. Cicle mitjà 1</i> , de Esteve, S. i Sellas, I., 2012, p.103.	13
<b>Figura 2.4.</b> Exemple de recta numèrica representada amb el model unidimensional. Extret de <i>Matemàtiques. Cicle mitjà 2.</i> , de Esteve, S. i Sellas, I., 2012, p. 90.	14
<b>Figura 2.5.</b> Exemple de recta numèrica representada amb el model bidimensional.	14
<b>Figura 2.6.</b> Exemple de fracció com a operador. Adaptat de <i>Teaching fractions and ratios for understanding: Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers</i> , de Lamon, S., 2012, p.192.	15
<b>Figura 2.7.</b> Exemple de fracció com a operador. Adaptat de <i>Teaching fractions and ratios for understanding: Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers</i> , de Lamon, S., 2012, p.193.	15
<b>Figura 2.8.</b> Exemple de fracció com a raó.	16
<b>Figura 2.9.</b> Exemple de diferents representacions d' $\frac{1}{2}$ Depenent de la unitat. Adaptat de <i>Teaching Fractions and ratios for understanding. Essential content knowledge and instructional Strategies for teachers</i> , de Lamon, S., 2012, p. 21.	16
<b>Figura 2.10.</b> Exemple de la mateixa quantitat representada amb dues fraccions diferents. Extret de <i>Teaching Fractions and ratios for understanding. Essential content knowledge and instructional Strategies for teachers</i> , de Lamon, S., 2012, p. 22.	16
<b>Figura 2.11.</b> Exemple d'unitat dividida en quatre parts que tenen la mateixa mida i la mateixa forma, per tant podem afirmar que està dividida en parts iguals. Extret de <i>Matemàtiques. Cicle mitjà 1</i> , de Esteve, S. i Sellas, I., 2012, p.96.	17
<b>Figura 2.12.</b> Exemple d'unitat dividida en quatre parts que tenen la mateixa mida però formes diferents, per tant podem afirmar que està dividida en parts iguals. Extret de <i>Matemàtiques. Cicle mitjà 1</i> , de Esteve, S. i Sellas, I., 2012, p.96.	17
<b>Figura 2.13.</b> Exemple d'unitat dividida en tres parts que tenen la mateixa forma però mides diferents, per tant podem afirmar que no està dividida en parts iguals. Extret de <i>Matemàtiques. Cicle mitjà 1</i> , de Esteve, S. i Sellas, I., 2012, p.96.	17
<b>Figura 2.14.</b> Exemple d'unitat dividida en tres parts que tenen mides i formes diferents, per tant podem afirmar que no està dividida en parts iguals. Extret de <i>Matemàtiques. Cicle mitjà 1</i> , de Esteve, S. i Sellas, I., 2012, p.96	17
<b>Figura 2.15.</b> Exemple de dues fraccions amb els numeradors diferents i els denominadors iguals.	18
<b>Figura 2.16.</b> Exemple de dues fraccions amb els numeradors iguals i els denominadors diferents.	19
<b>Figura 2.17.</b> Exemple de dues fraccions amb els numeradors i els denominadors diferents.	19

<b>Figura 2.18.</b> Exemple de fraccions equivalents. Extret de <i>Teaching fractions and ratios for understanding: Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers.</i> , de Lamon, S., 2012, p.146.	20
<b>Figura 2.19.</b> Exemple de fraccions no equivalents.	20
<b>Figura 2.20.</b> Exemple de fracció representada sense tenir en compte que ha de tenir les parts iguals. Extret de <i>elementary and middle school mathematics: teaching developmentally</i> , de Bay-Williams et al., 2016, p.292.	21
<b>Figura 3.1.</b> Sectors circulars imantats. Representació de $\frac{7}{8}$ sobre una unitat (esquerra) i representació de dues fraccions equivalents (dreta).	26
<b>Figura 3.2.</b> Tires de fraccions equivalents. Comparació de les fraccions $\frac{1}{2}$ , $\frac{1}{4}$ i $\frac{1}{8}$ .	27
<b>Figura 3.3.</b> Exemple de dues fraccions equivalents trobades a partir del diagrama de fraccions. Extret de <i>Matemáticas para maestros de educación primaria</i> , de I. Segovia i L. Rico, 2011, p. 201.	27
<b>Figura 3.4.</b> Primera pregunta del bloc <i>Presentació de la mestra</i> .	28
<b>Figura 3.5.</b> Preguntes relacionades amb la formació de les mestres entrevistades. Dins el bloc <i>Presentació de la mestra</i> .	28
<b>Figura 3.6.</b> Preguntes del bloc <i>Coneixements matemàtics</i> .	29
<b>Figura 3.7.</b> Preguntes referents al llibre de text. Dins del bloc <i>Les fraccions a l'aula</i> .	29
<b>Figura 3.8.</b> Preguntes centrades en l'ensenyament de les fraccions a l'aula. Dins del bloc <i>Les fraccions a l'aula</i> .	30
<b>Figura 3.9.</b> Preguntes referents al material utilitzat a l'aula. Dins del bloc <i>Les fraccions a l'aula</i> .	30
<b>Figura 3.10.</b> Preguntes referents a les tasques realitzades a l'aula. Dins del bloc <i>Les fraccions a l'aula</i> .	30
<b>Figura 3.11.</b> Preguntes del bloc <i>Continguts i objectius</i> .	30
<b>Figura 4.1.</b> Pregunta 2 del qüestionari.	38
<b>Figura 4.2.</b> Pregunta 3 del qüestionari.	39
<b>Figura 4.3.</b> Quantitat de respostes correctes i incorrectes de l'opció a) de la pregunta 3. A l'esquerra la quantitat de respostes correctes i a la dreta les incorrectes.	40
<b>Figura 4.4.</b> Quantitat de respostes correctes i incorrectes de l'opció b) de la pregunta 3. A l'esquerra la quantitat de respostes correctes i a la dreta les incorrectes.	41
<b>Figura 4.5.</b> Quantitat de respostes correctes i incorrectes de l'opció c) de la pregunta 3. A l'esquerra la quantitat de respostes incorrectes i a la dreta les correctes.	42
<b>Figura 4.6.</b> Quantitat de respostes correctes i incorrectes de l'opció d) de la pregunta 3. A l'esquerra la quantitat de respostes correctes i a la dreta les incorrectes.	43

<b>Figura 4.7.</b> Pregunta 4 del qüestionari.	44
<b>Figura 4.8.</b> Quantitat de respostes correctes i incorrectes de la pregunta 4. A l'esquerra la quantitat de respostes correctes, al centre les incorrectes i a la dreta les no contestades.	44
<b>Figura 4.9.</b> Exemple 1 de resposta correcta de la pregunta 4	45
<b>Figura 4.10.</b> Exemple 2 de resposta correcta de la pregunta 4	45
<b>Figura 4.11.</b> Exemple de resposta incorrecte de la pregunta 4	45
<b>Figura 4.12.</b> Pregunta 6 del qüestionari.	45
<b>Figura 4.13.</b> Quantitat de respostes correctes i incorrectes de la pregunta 6. A l'esquerra la quantitat de respostes correctes, al centre les incorrectes i a la dreta les no contestades.	46
<b>Figura 4.14.</b> Exemple de resposta correcte de la pregunta 6.	46
<b>Figura 4.15.</b> Dibuix que acompanya l'explicació d'un alumne que col·loca la fracció $\frac{12}{5}$ en el número 12.	47
<b>Figura 4.16.</b> Pregunta 7 del qüestionari.	47
<b>Figura 4.17.</b> Quantitat de respostes correctes i incorrectes de l'apartat <i>a.</i> de la pregunta 7. A l'esquerra la quantitat de respostes correctes i a la dreta les incorrectes.	48
<b>Figura 4.18.</b> Quantitat de respostes correctes i incorrectes de la opció <i>b.</i> de la pregunta 7. A l'esquerra la quantitat de respostes incorrectes i a la dreta les correctes.	48
<b>Figura 4.19.</b> Quantitat de respostes correctes i incorrectes de l'apartat <i>c.</i> de la pregunta 7. A l'esquerra la quantitat de respostes correctes i a la dreta les incorrectes.	49
<b>Figura 4.20.</b> Quantitat de respostes correctes i incorrectes de l'apartat <i>d.</i> de la pregunta 7. A l'esquerra la quantitat de respostes correctes i a la dreta les incorrectes.	50
<b>Figura 4.21.</b> Quantitat de respostes correctes i incorrectes de l'apartat <i>e.</i> de la pregunta 7. A l'esquerra la quantitat de respostes correctes i a la dreta les incorrectes.	51
<b>Figura 4.22.</b> Quantitat de respostes correctes i incorrectes de l'apartat <i>f.</i> de la pregunta 7. A l'esquerra la quantitat de respostes correctes i a la dreta les incorrectes.	51
<b>Figura 4.23.</b> Quantitat de respostes correctes i incorrectes de l'apartat <i>g.</i> de la pregunta 7. A l'esquerra la quantitat de respostes correctes i a la dreta les incorrectes.	52
<b>Figura 4.24.</b> Pregunta 8 del qüestionari.	52
<b>Figura 4.25.</b> Quantitat de respostes de la pregunta 8.	53
<b>Figura 4.26.</b> Pregunta 10 del qüestionari.	54
<b>Figura 4.27.</b> Quantitat de respostes correctes i incorrectes de la pregunta 10 (fraccions proposades). A l'esquerra la quantitat de respostes correctes i a la dreta les incorrectes.	54
<b>Figura 4.28.</b> Quantitat d'alumnes que han proposat una resposta correcta. A l'esquerra, els que han proposat $\frac{5}{2}$ i a la dreta els que han proposat $\frac{5}{6}$ .	55

<b>Figura 4.29.</b> Quantitat de respostes correctes i incorrectes de la pregunta 10 (numerador i denominador). A l'esquerra la quantitat de respostes correctes i a la dreta les incorrectes.	56
<b>Figura 4.30.</b> Pregunta 5 del qüestionari.	56
<b>Figura 4.31.</b> Quantitat de respostes correctes i incorrectes de la pregunta 5. A l'esquerra la quantitat de respostes correctes i a la dreta les incorrectes.	57
<b>Figura 4.32.</b> Pregunta 9 del qüestionari.	58
<b>Figura 4.33.</b> Quantitat de respostes correctes i incorrectes de la pregunta 9. A l'esquerra la quantitat de respostes correctes i a la dreta les incorrectes.	58
<b>Figura 4.34.</b> Exemple de representació errònia de la pregunta 9.	59
<b>Figura 4.35.</b> Exemple de representació correcta de la pregunta 9.	59
<b>Figura 4.36.</b> Pregunta 11 del qüestionari.	60
<b>Figura 4. 37.</b> Quantitat de respostes correctes i incorrectes de la pregunta 11. A l'esquerra la quantitat de respostes correctes, al centre les incorrectes i a la dreta les no contestades.	60
<b>Figura 4.38.</b> Exemple de representació correcta de la pregunta 11.	61
<b>Figura 5.1.</b> Pregunta de recerca	63
<b>Figura 5.2.</b> Classificació dels conceptes per nivells	67