

Màster en innovació en didàctiques específiques

TREBALL FINAL DE MÀSTER

**COM RESOLEN SUMES MENTALMENT ELS ALUMNES DE 4t,  
5è I 6è I QUINA INFLUÈNCIA POT TENIR LA METODOLOGIA  
EMPRADA PELS DOCENTS?**

Presentat per:

Margalida Miró Font

Tutoritzat per:

Isabel Sellas Ayats

Universitat de Vic – Universitat Central de Catalunya

Setembre 2018

## RESUM

Aquest treball de fi de màster té el propòsit d'estudiar com els alumnes de 4t a 6è d'educació primària realitzen sumes mentalment i quina influència pot tenir en ells la metodologia que empren les mestres per ensenyar el càlcul mental.

Tal com afirmen diversos estudis, el càlcul mental aporta beneficis pels alumnes per desenvolupar la competència matemàtica, cosa que no succeeix quan només s'ensenya l'algoritme tradicional.

La metodologia utilitzada per realitzar l'estudi ha estat qualitativa i quantitativa. Les dades s'han obtingut a partir d'un qüestionari de sumes als alumnes, entrevistes amb les mestres de matemàtiques i observacions a les sessions de càlcul mental.

A partir de l'anàlisi dels resultats s'ha pogut observar que la majoria d'alumnes utilitzen l'algoritme tradicional per resoldre sumes mentalment i que la metodologia emprada per les mestres influeix en els resultats.

**Paraules clau:** suma, estratègies de càlcul mental, didàctica en matemàtiques, educació primària.

## ABSTRACT

This master's degree project has the purpose to study how students from 4th to 6th of primary education mentally addition and what influence the teacher's methodology can have on mental calculation.

As several studies affirm, mental calculation is beneficial for students to develop mathematical competence, something that does not happen when only the traditional algorithm is taught.

The methodology used to carry out the study has been qualitative and quantitative. The data were obtained from an addiction questionnaire to students, interviews with mathematics teachers and observations in the mental calculation lessons.

Based on the analysis of the results, it has been observed that most students use the traditional algorithm to solve mental addition and that the methodology used by teachers influences the results.

**Key words:**, addition, mental strategies, mathematical didactic, elementary school.

## Índex

|        |   |    |
|--------|---|----|
| 1.     | Introducció .....   | 4  |
| 1.1.   | Justificació de la recerca .....  | 4  |
| 1.2.   | Objectius.....  | 5  |
| 1.3.   | Estructura del treball .....  | 5  |
| 2.     | Marc teòric .....   | 7  |
| 2.1.   | El càlcul a educació primària i tipus .....   | 7  |
| 2.2.   | Aportacions o beneficis del càlcul mental vs que passa quan només ensenyam algoritmes tradicionals..... | 9  |
| 2.3.   | Evolució de l'ensenyament del càlcul mental .....   | 12 |
| 2.4.   | Estratègies de càlcul mental .....  | 14 |
| 3.     | Metodologia .....   | 17 |
| 3.1.   | Perspectiva metodològica .....  | 17 |
| 3.2.   | Context de la recerca.....  | 18 |
| 3.3.   | Descripció de la mostra.....  | 19 |
| 3.4.   | Instrument: observacions, entrevistes i qüestionaris.....   | 20 |
| 3.4.1. | Pauta per les observacions.....   | 20 |
| 3.4.2. | Entrevista.....   | 20 |
| 3.4.3. | Qüestionari de sumes .....  | 21 |
| 3.5.   | Recollida de dades .....  | 22 |
| 3.6.   | Procés d'anàlisi de dades .....   | 24 |
| 3.6.1. | Procés d'anàlisi de les observacions de les sessions de càlcul mental. ....                             | 24 |
| 3.6.2. | Procés d'anàlisi de les entrevistes a les mestres .....   | 24 |
| 3.6.3. | Procés d'anàlisi dels resultats dels qüestionaris de sumes de càlcul mental als alumnes.....            | 25 |
| 4.     | Anàlisi i resultats .....   | 27 |
| 4.1.   | Anàlisi i resultats de les observacions a les sessions de càlcul mental .....                           | 27 |
| 4.2.   | Anàlisi i resultats de les entrevistes a les mestres.....   | 35 |
| 4.3.   | Anàlisi i resultats de les sumes .....  | 38 |
| 4.3.1. | Anàlisi i resultats de la suma $78 + 35$ .....  | 38 |

|          |  |    |
|----------|--|----|
| 4.3.1.1. | Anàlisi i resultats de la suma $78 + 35$ a 4t.....                           | 38 |
| 4.3.1.2. | Anàlisi i resultats de la suma $78 + 35$ a 5è.....                           | 40 |
| 4.3.1.3. | Anàlisi i resultats de la suma $78 + 35$ a 6è.....                           | 43 |
| 4.3.1.4. | Anàlisi i resultats de la suma $78 + 35$ a tots els cursos analitzats.....   | 45 |
| 4.3.2.   | Anàlisi i resultats de la suma $48 + 49$ .....                               | 48 |
| 4.3.2.1. | Anàlisi i resultats de la suma $48 + 49$ a 4t.....                           | 48 |
| 4.3.2.2. | Anàlisi i resultats de la suma $48 + 49$ a 5è.....                           | 50 |
| 4.3.2.3. | Anàlisi i resultats de la suma $48 + 49$ a 6è.....                           | 52 |
| 4.3.2.4. | Anàlisi i resultats de la suma $48 + 49$ a tots els cursos analitzats.....   | 54 |
| 4.3.3.   | Anàlisi i resultats de la suma $156 + 48$ .....                              | 56 |
| 4.3.3.1. | Anàlisi i resultats de la suma $156 + 48$ a 4t.....                          | 56 |
| 4.3.3.2. | Anàlisi i resultats de la suma $156 + 48$ a 5è.....                          | 58 |
| 4.3.3.3. | Anàlisi i resultats de la suma $156 + 48$ a 6è.....                          | 60 |
| 4.3.3.4. | Anàlisi i resultats de la suma $156 + 48$ a tots els cursos analitzats.....  | 62 |
| 5.       | Conclusions.....   | 65 |
| 5.1.     | Conclusions per l'objectiu 1.....  | 65 |
| 5.2.     | Conclusions per l'objectiu 2.....  | 67 |
| 5.3.     | Conclusions per l'objectiu 3.....  | 69 |
| 5.4.     | Conclusions per l'objectiu 4.....  | 71 |
| 6.       | Limitacions de la recerca, perspectives de futur i implicacions educatives.. | 73 |
| 7.       | Bibliografia.....  | 76 |

## 1. Introducció

El treball que es presenta a continuació és el Treball de Fi de Màster en Innovació en Didàctiques Específiques en Matemàtiques. Amb aquest treball es vol fer una investigació per saber quines diferències hi ha entre els alumnes de 4t, 5è i 6è, de la mateixa escola, en les estratègies del càlcul mental i com influeix la metodologia de l'ensenyament del càlcul mental en el resultat de les operacions i en les estratègies que fan servir els alumnes.

La investigació es va dur a terme al CEIP Guillem Ballester i Cerdó, una escola pública d'educació infantil i primària de Mallorca, en concret de Muro, un poble situat al nord de l'illa.

### 1.1. Justificació de la recerca

Des de sempre m'han cridat molt l'atenció les matemàtiques i des de que vaig fer el Grau d'Educació Primària em vaig adonar que els alumnes tenen moltes dificultats en aquesta assignatura. Les dificultats més destacables són: la resolució de problemes, la realització d'operacions mitjançant l'algoritme tradicional, resoldre operacions mentalment i la falta de sentit numèric. A partir de les dificultats que havia detectat durant els diferents períodes de pràctiques durant el Grau, vaig decidir que seria interessant fer un estudi sobre el càlcul mental.

He elegit fer el Treball de Fi de Màster sobre el càlcul mental perquè havia observat que els alumnes per resoldre operacions molt simples necessitaven resoldre-les per escrit i mitjançant l'algoritme tradicional o també utilitzen els dits per contar. Per aquest motiu, volia conèixer de primera mà la metodologia que fan servir els docents per ensenyar el càlcul mental a les aules, si es fa especial èmfasi en l'ensenyament de les estratègies de càlcul mental i si hi ha diferències notable entre els alumnes de diferents edats.

Els resultats d'aquest estudi poden fer reflexionar als docents de la importància que té el càlcul mental en l'ensenyament de les matemàtiques i adonar-se que el càlcul mental és més que fer càlculs sense la utilització de llapis i paper. El càlcul mental permet establir estratègies de càlcul, potenciar el sentit numèric, entendre les relacions numèriques i les relacions que hi pugui haver en les diferents operacions bàsiques (sumes, restes, multiplicacions i divisions). Si es fessin canvis en l'ensenyament del

càlcul mental, tal volta, hi hauria una millora en la competència matemàtica dels alumnes.

Després de diversos estudis s'ha determinat que el càlcul mental és molt beneficiós pels alumnes, com per exemple: Kamii i Dominick (2010) defensen que la utilització de l'algoritme no només no són útils per a l'aprenentatge de l'aritmètica, sinó que també retarden i dificulten el desenvolupament del raonament numèric dels alumnes. Seguint amb aquesta idea, Bracho-López (2013) afirma que molts dels problemes dels alumnes en el càlcul són derivats de la utilització de l'algoritme tradicional. Com a solució a aquesta problemàtica, autors defensen que l'ensenyament del càlcul mental pot ser molt útil per desenvolupar el sentit numèric, és a dir, a comprendre els nombres, les seves relacions, l'efecte dels nombres en les operacions i l'estimació.

Per aquests motius vaig pensar que seria molt interessant estudiar de primera mà com els alumnes de 4t, 5è i 6è fan càlcul mental i observar com les seues mestres els ho ensenyen.

## **1.2. Objectius**

La pregunta de recerca que s'ha plantejat per aquest treball és la següent:

“Com resolen sumes mentalment els alumnes de 4t, 5è i 6è i quina influència pot tenir la metodologia emprada pels docents?”

Els objectius que s'han marcat per aquest TFM són els següents:

- Analitzar les estratègies que utilitzen els alumnes de 4t, 5è i 6è per fer les sumes.
- Comparar i analitzar els resultats de càlcul mental dels alumnes de 4t a 6è d'educació primària.
- Analitzar la metodologia del mestre alhora d'ensenyar càlcul mental.
- Contrastar els resultats de càlcul mental dels alumnes amb la metodologia que empra el docent per ensenyar càlcul mental.

## **1.3. Estructura del treball**

Aquest treball està estructurat de la següent manera:

- El primer apartat que trobem és el marc teòric on s'expliquen els tipus de càlcul a l'educació primària, què s'entén per càlcul mental, els beneficis que té

l'ensenyament del càlcul mental als alumnes i com ha evolucionat l'ensenyament del càlcul mental.

- Seguidament s'explica la metodologia que s'ha seguit per la realització d'aquest treball, on hi ha detallat la perspectiva metodològica, el context de la recerca, la mostra que ha participat a l'estudi, les eines que s'han fet servir per l'obtenció de dades i el procés que s'ha seguit per fer l'anàlisi de les dades.
- A continuació hi podem trobar l'anàlisi i els resultats de les observacions, de les entrevistes i de les diferents sumes del qüestionari realitzades pels alumnes. Els resultats estan estructurats en taules de dades i en gràfics de barres amb el seu corresponent anàlisi.
- Seguidament podem trobar les conclusions en relació als objectius de la recerca i amb les limitacions que presenta la recerca, amb les perspectives de futur i la implicació educativa que presenta aquest estudi.
- El següent apartat és la bibliografia, on hi trobem les referències bibliogràfiques dels articles utilitzats per la realització del treball.
- Finalment trobem els annexos. En ells hi ha les transcripcions de les observacions de les sessions i els materials que s'utilitzaren a aquestes sessions, també hi ha la transcripció de l'entrevista a les mestres, les graelles amb les dades del qüestionari de les sumes i les taules de dades que es van elaborar per crear els gràfics de barres.

## 2. Marc teòric

Al marc teòric podem trobar conceptes teòrics referents als tipus de càlculs a educació primària, com es pot ensenyar el càlcul mental a educació primària, les aportacions del càlcul mental als alumnes, alguns estudis que s'han fet recentment de càlcul mental i quines estratègies de càlcul mental es poden utilitzar per la resolució de sumes.

### 2.1. El càlcul a educació primària i tipus

Bracho-López (2013), afirma que a les escoles s'estan demanant canvis metodològics relatius al domini de càlcul en els primers anys de l'aprenentatge de les matemàtiques. Fa més de 40 anys, Ablewhite (1971), citat a l'article de Bracho-López (2013), advertia dels problemes que es derivaven de l'aprenentatge de les operacions bàsiques. Anys després de l'aparició de les calculadores es va començar a qüestionar-se l'ensenyament dels algorismes tradicionals i del seu paper a les escoles. A partir d'aquest moment, hi ha hagut diversos autors que han escrit sobre el poc sentit pedagògic dels algorismes tradicionals que tenen a l'actualitat.

Però quins tipus de càlcul podem trobar en l'ensenyament de les matemàtiques a educació primària?

#### - El càlcul escrit

Tal com afirma Cantero (2011), el càlcul mental o el càlcul en llapis i paper té les característiques de ser escrit, abreviat, automàtic (no cal ser comprès per ser executat), simbòlic, analític (les xifres es manipulen separatament) i fiable (sempre s'utilitza el mateix algoritme per al mateix tipus d'exercicis). En les escoles es treballa més amb càlculs escrits que amb càlculs mentals i menys amb càlculs estimats encara que diàriament s'apliquen en diverses situacions.

#### - El càlcul estimat

Segons el National Council of Teachers of Mathematics (2000), el càlcul estimat és un bon company del càlcul. Constitueix un instrument per jutjar de forma raonada els càlculs realitzats amb calculadora, mentalment o en llapis i paper.

Tal com explica González (2008), el càlcul estimat es realitza amb dades que procedeixen d'un judici o valoració, solen ser nombres rodons, acabats en zero, per aprofitar els avantatges del nostre sistema de numeració.



Van de Walle, J. A., Karp, S. K. i Bay-Williams, J. M. (2008), afirmen que el càlcul estimat és determinar un nombre que és una aproximació d'un càlcul que no podem o no volem determinar exactament. No hem de confondre que la idea d'estimació significa endevinar ja que l'estimació implica raonament.

#### - **El càlcul amb calculadora**

Segons el National Council of Teachers of Mathematics (2000), exposa que la calculadora avui en dia és una eina de càlcul que es fa servir fora de les aules, però l'aula hauria de reflectir la realitat.

La calculadora pot ser una eina essencial per ensenyar, aprendre i fer matemàtiques. És una manera de fer càlculs amb eficàcia i exactitud. La calculadora pot ajudar als estudiants a aprendre matemàtiques ja que mitjançant la calculadora els alumnes poden fer els càlculs i així poden formular i explorar conjectures fàcilment. La capacitat de càlcul de la calculadora pot fer ampliar la quantitat de problemes assequibles pels alumnes i els capacita per executar procediments rutinaris amb rapidesa i seguretat, d'aquesta manera els alumnes disposen de més temps per desenvolupar conceptes i fer raonaments. A més, es pot fer servir la calculadora per aprendre mitjançant la retroacció dels càlculs realitzats.

#### - **Càlcul mental**

Segons diversos autors, el càlcul mental és:

Tal com ens explica Gómez (2005):

*“El cálculo mental se caracteriza por el uso de métodos de cálculo alternativos a los de columnas. Estos métodos encuentran su fundamento en las propiedades de las operaciones y en las propiedades de los números derivadas de los principios del sistema de numeración de base diez.”* (p.18)

Una altra idea que exposa Gómez (2005), és que el càlcul mental no s'ha de confondre amb el càlcul estimat ni amb el càlcul aproximat. Les diferències entre aquests tres tipus de càlcul és que en el càlcul mental els resultats són exactes i en els altres dos els resultats no ho són.

Segons Ortega i Ortíz (2002 a), el càlcul mental és una forma de calcular dades exactes que es caracteritza per no tenir ajuda externa, només es fa servir la menta. Dins el càlcul mental es poden distingir dos tipus:

- El càlcul mecànic o d'estímul-resposta: es caracteritza per la utilització d'una tècnica automàtica, hi ha el risc de quan no s'utilitza tendeix a oblidar-se. Per exemple: la memorització de les taules de multiplicar.
- Càlcul reflexiu o pensat: es caracteritza per la utilització d'estratègies que implica la reflexió per prendre decisions i elegir l'estratègia més adequada. Per aquest tipus de càlcul es necessiten certes habilitats, com per exemple: recomptes, recol·locacions, compensacions o descomposicions que serveixen per alterar les dades inicials i d'aquesta manera es treballa més còmodament amb uns altres nombres més fàcils de calcular.

En definitiva, el càlcul mental és una forma de càlcul exacte que es caracteritza per no tenir cap ajuda externa, només s'utilitza la ment i s'han de tenir en compte els principis de numeració de base 10.

## **2.2. Aportacions o beneficis del càlcul mental vs que passa quan només ensenyem algoritmes tradicionals**

Ortega i Ortiz (2002 b), diuen que hi ha molts d'autors que denuncien l'abandonament del càlcul mental a les aules d'educació primària i secundària ja que les escoles donen molta importància al càlcul algorítmic estàndard, els mestres afirmen que falta temps per fer càlcul mental perquè hi ha altres continguts més importants per tractar, altres mestres diuen que es senten insegurs amb el càlcul mental o que el càlcul mental no apareix als llibres de text i, per tant, no es treballa.

Tal com ens diuen Gálvex, Cosmelli, Cubillos, Leger, Mena et al. (2011), un altre motiu pel qual el càlcul mental no es treballa a l'aula és perquè ha perdut importància per l'arribada de les calculadores, els ordinadors i telèfons mòbils.

Com es pot veure, el càlcul mental està en retrocés i de cada vegada es treballa menys a les aules, perquè és important que es treballi el càlcul mental a les aules?

Tal com ens explica (Lethielleux, 2005, p. 17-18), citat a l'article de Gálvex, Cosmelli, Cubillos, Leger, Mena et al. (2011), "el càlcul mental és un mitjà molt adequat per afavorir el desenvolupament de l'atenció, concentració i memòria dels alumnes, per familiaritzar-se progressivament amb els nombres, expressar-los de diverses maneres segons els context de càlcul i aprofitar les propietats de les operacions".

Segons Sellas, Vila, Jurado, Esteve (2016) aprendre càlcul mental de forma raonada ajuda a desenvolupar el sentit numèric, és a dir, a comprendre els nombres, les seves relacions, l'efecte dels nombres en les operacions i l'estimació.

Gómez (1994), citat per Ortega i Ortiz (2002,a), diu que treballar el càlcul mental a les aules ajuda a conèixer les concepcions que tenen els alumnes sobre els procediments de càlcul, també proporciona versatilitat, independència de procediments i proporciona confiança en el càlcul aritmètic.

Per una altra banda, Bracho-López (2013), afirma que en els darrers anys s'han fet treballs on s'expliquen les complicacions i disfuncions que deriven de la utilització dels algorismes de càlcul tradicionals, uns procediments mecànics que no tenen significat pels estudiants.

Tal com ens diuen Kamii i Dominick (2010), els algorismes tradicionals són perjudicials pels alumnes perquè promouen a que els alumnes renunciïn el seu propi pensament i no ensenyen el valor posicional dels nombres, desvirtuant el desenvolupament del significat numèric dels alumnes. A partir d'un estudi que varen realitzar, varen demostrar que els alumnes que tenien el coneixement del valor posicional, tenen més confiança i la velocitat o el seu ritme intel·lectual és molt més bo.

Kamii i Dominick (2010), expliquen que segons les investigacions basades amb el constructivisme de Jean Piaget, diuen que ensenyar matemàtiques a través dels algorismes tradicionals no ajuda al coneixement lògic-matemàtic.

El coneixement lògic-matemàtic consisteix en relacions mentals, i la font essencial d'aquestes relacions és l'acció mental de cada persona. Per exemple, quan el nen sap que una quantitat combinada amb una altra resulta en una quantitat més gran això és el resultat de la seva pròpia acció mental sobre les relacions. Qualsevol altra persona pot explicar aquesta relació, però la mateixa no es converteix en coneixement de l'infant fins que aquest estableix la relació. De la mateixa manera, un adult pot explicar a un nen l'algoritme per a la suma de nombres de dos dígitos. No obstant això, escoltar l'explicació de la mestra no assegura que el nen realitzi o estableixi la relació mental sobre com combinar les dues quantitats.

Una característica del coneixement lògic -matemàtic és que no hi ha res arbitrari en ell. Per exemple, sumar 356 i 278 té com a solució 634 en totes les cultures. La regla social convencional, o algoritme, que estableix que un ha de sumar primer les unitats, després

les desenes i després les centenes és arbitrària. L'ensenyament dels algoritmes està basat en la suposició errònia que les matemàtiques són una herència cultural que ha de ser transmesa a la propera generació.

El constructivisme de Piaget van dur a Kamii a establir la següent hipòtesi: Els nens en educació primària haurien de ser capaços d'inventar la seva pròpia aritmètica sense la instrucció que ara reben de llibres de text i quaderns de treball.

A partir de les aportacions teòriques de diferents autors, podem observar que el càlcul mental té beneficis pels alumnes i que és molt interessant que es treballi a les aules. Amb els algoritmes tradicionals no succeeix el mateix i a més no permeten treballar el coneixement lògic-matemàtic, per tant, seria interessant no malgastar tant de temps en ensenyar aquests algoritmes i treballar en més profunditat el càlcul mental.

És molt important utilitzar una metodologia adequada per l'ensenyament del càlcul mental perquè pugui aportar els beneficis esmentats anteriorment als alumnes. No és adequat, tal com ens diuen Sellas, Vila, Jurado i Esteve (2016), que el càlcul mental s'ensenyi de forma mecànica, sense comprensió i prioritant la rapidesa en front del descobriment d'estratègies de càlcul i del raonament matemàtic. Sinó que s'han de tenir en compte alguns aspectes com deixar temps, respectar les opinions de tot l'alumnat, compartir les idees matemàtiques, tractar l'error com a font d'aprenentatge, potenciar la comunicació d'idees matemàtiques i el raonament; d'aquesta manera s'obtindrà una cultura social d'aula adequada i es podrà atendre a la diversitat de l'alumnat.

També és molt important facilitar als alumnes estratègies per poder resoldre operacions de càlcul mental. Sellas, Vila, Jurado i Esteve (2016) exposen que cal que *“tinguem molt clar quines estratègies volem ensenyar, quins continguts, relacions i propietats numèriques calen per aprendre aquestes estratègies i quines activitats i recursos podem proposar perquè aprenguin aquests continguts, propietats i, per tant, les estratègies de càlcul”* (p. 2).

Si els alumnes arriben a interioritzar les estratègies, segons Parrish (2010), es podrà aconseguir que els alumnes utilitzin diferents estratègies per resoldre una mateixa operació alhora que gaudiran compartint aquestes estratègies amb els companys. Perquè això sigui possible ens hem d'assegurar que cada alumne sigui mentalment participatiu i pugui accedir a les estratègies proposades. Hi ha diversos camins perquè

els alumnes desenvolupin les habilitats:

- Demanar als estudiants quines són les estratègies més eficients per fer una determinada operació.
- Dur a terme un registre dels càlculs plantejats i les estratègies de utilitzen els estudiants.
- Fer grups petits durant cada setmana per poder fer converses matemàtiques.
- Crear i penjar a la classe cartells que contenguin les estratègies.
- Fer una avaluació setmanal de càlcul mental.
- Tenir accés als materials manipulables que ajudin als estudiants a pensar sobre la magnitud dels nombres i dels patrons en el valor posicional. Exemples de materials: línies numèriques, panells numèrics, rekenreks, etc.

### **2.3. Evolució de l'ensenyament del càlcul mental**

Gómez (2005), ens explica que el càlcul mental no ha estat objecte d'ensenyament fins èpoques recents. No és que abans no hi hagés càlcul mental, sinó que no s'ensenyava com a tal, no apareixia als llibres de text i no coincideix amb el que actualment s'entén per càlcul mental. Fins el segle XIX, l'ensenyament del càlcul aritmètic tenia un nivell exagerat que avui en dia es considera excessiu, ja que es volia formar experts en càlcul i a aquesta època no es feia menció al càlcul mental.

Al començament del segle XX, es recupera una vella teoria que considerava que la ment es constituïa per facultats que s'enforteixen i es formen amb l'entrenament. Això va portar a considerar a la "disciplina mental" com un objectiu educatiu, cosa que es va concretar en un ensenyament amb matèries apropiades per a l'entrenament de la ment. Poc a poc, es va abandonar aquesta teoria i es va arribar a l'utilitarisme i a les aplicacions a la vida real. Amb aquesta idea es va introduir el càlcul mental per referir-se al càlcul que permet desenvolupar agilitat mental i un càlcul ràpid.

Estudis més recents, com el citat a l'article de Kamii i Dominick (2010), expliquen que a la dècada dels anys 70 investigadors com Ashlock (1972, 1976, 1982) i Brown i Burtonhan (1978), varen estudiar com els alumnes canvien els algorismes ja que ells volen recordar els passos a seguir per resoldre les operacions i no utilitzen la lògica per fer-ho.

A partir de la dècada dels anys 80, es varen començar a posar en dubte l'ensenyament dels algorismes tradicionals. Un estudi realitzat per diversos autors (Carraber y Schliemann, 1985), varen concloure que els nins que realitzaven procediments propis

podrien donar més respostes correctes. Per tant, es va començar a pensar que els algoritmes eren una interferència més que una ajuda.

Tal com ens diuen Kamii i Dominick (2010), com s'ha dit anteriorment, els algoritmes tradicionals són perjudicials pels alumnes perquè promouen que els alumnes renunciïn al seu propi pensament i no ensenyen el valor posicional dels nombres, desvirtuant el desenvolupament del significat numèric dels alumnes. A partir d'un estudi que varen realitzar, varen demostrar que els alumnes que tenien el coneixement del valor posicional, tenen més confiança, velocitat i el seu ritme intel·lectual és molt més bo.

L'estudi realitzat per Kamii al 1994 va comparar nins de segon a quart curs d'educació primària que se'ls havia ensenyat qualche algoritme amb altres alumnes que no se'ls havia ensenyat cap algoritme i va descobrir que els alumnes que utilitzaven el seu propi pensament obtingueren més respostes correctes i tenien millor coneixement del valor de la posició. Amb aquest estudi, kamii va concloure que els nens i nenes tenen potencial per desenvolupar un pensament sòlid. Els educadors ha d'intentar desenvolupar aquest potencial perquè els alumnes puguin construir les seves pròpies eines per la seva construcció de coneixements per tenir confiança amb les seves habilitats i resoldre problemes.

Parrish (2010), a partir dels seus estudis, va demostrar que el càlcul mental és un component clau pels estudiants a construir relacions numèriques per resoldre problemes en comptes de realitzar procediments memoritzats. Una altra raó per treballar el càlcul mental és per ajudar a millorar la comprensió dels estudiants sobre el valor dels nombres en relació al lloc que ocupen, això serà possible ja que els alumnes observaran els nombres com a quantitats completes en lloc de columnes discretes de dígits.

Tal com ens explica Martínez (2010), durant el curs 2009-2010 es va fer un estudi a quatre centres públics de la Bahía de Cádiz, en total hi participaren 210 alumnes. A aquest alumnes se'ls va fer una prova de càlcul mental. En aquesta mostra hi havia alumnes que havien après els algoritmes de manera tradicional, CBC (*cerrado, basado en cifras*) i alumnes que seguien un mètode de càlcul obert, ABN (*abierto, basado en números*). Els resultats d'aquest estudi foren els següents: els alumnes ABN arriben a un nivell d'assoliment molt superior als que segueixen el mètode tradicional i el motiu està en les limitacions del mètode tradicional. Pel que fa al càlcul mental, l'alumnat ABN ha obtingut bons resultats gràcies a la seva tècnica. Els alumnes CBC tenen moltes

dificultats: cada exercici que se'ls presentava el representaven mentalment com un compte, que també resolien mentalment, i en què les xifres del resultat també havien de ser guardades a la memòria per després ser apilades en l'ordre precís per a formar el resultat. Per aquest motiu, els alumnes que empraren l'algoritme tradicional empraren més temps van cometre més errors. En canvi els alumnes ABN operen directament amb els números sempre d'esquerra a dreta, i fan valer la seva destresa gràcies als entrenaments amb material manipulable i perquè tenen sentit numèric. A més, el mètode basat en algoritmes ABN aconsegueix un millor rendiment dels alumnes amb més dificultats, que el que s'obté amb l'aplicació de la metodologia tradicional.

#### **2.4. Estratègies de càlcul mental**

Com s'ha pogut llegir anteriorment, hi ha diversos autors que defensen l'ensenyament d'estratègies per realitzar càlcul mental ja que s'ha vist que aquestes estratègies són més eficaces i eficients que resoldre les operacions utilitzant l'algoritme tradicional.

A continuació, hi ha explicades les estratègies de càlcul mental alhora de realitzar les sumes, aquestes estratègies estan extretes del llibre *Number talks: helping build math and computation strategies* de Parrish (2010).

##### **- Descomposició dels nombres tenint en compte el valor de la posició**

Una vegada que els estudiants comencin a comprendre el valor posicional dels nombres, aquesta és una de les primeres estratègies que utilitzen. Cada nombre s'inclou en quantitats expandides i com a valor de lloc es combinen les quantitats, és a dir, unitats amb unitat, desenes amb desenes i centenens amb centenens. Quan es combinen les quantitats, els nens solen treballar de l'esquerra a la dreta, ja que mantenen la magnitud dels nombres.

$$\begin{aligned} &116 + 118 \\ &(100 + 10 + 6) + (100 + 10 + 8) \\ &100 + 100 = 200 \\ &10 + 10 = 20 \\ &6 + 8 = 14 \\ &200 + 20 + 14 = 234 \end{aligned}$$

##### **- Fer nombres de referència**

Els números referència són números que són fàcils d'usar en càlcul mental. Múltiples de deu, cent, mil etc., així com vint-i-cinc i cinquanta, són exemples de nombres que entren

en aquesta categoria. Els alumnes poden modificar un o tots els sumands afegint o restant quantitats per fer un nombre de referència.

$$\begin{array}{r} 116 + 118 \\ + \quad 2 \\ \hline 116 + 120 = 236 \\ 236 - 2 = 234 \end{array}$$

En aquest cas s'ha ajustat el 118 ja que és el nombre que està més pròxim a nombre de referència, en aquest exemple, el 120.

#### - **Fer dobles**

Des d'educació infantil, els nens poden recordar sumes a partir dels dobles. Aquesta estratègia treu profit d'aquesta capacitat per ajustar un o dos números per fer dobles o una combinació de dobles.

$$\begin{array}{r} 116 + 118 \\ -1 \quad -3 \\ \hline 115 + 115 = 230 \\ 230 + 4 = 234 \end{array}$$

Per realitzar aquesta estratègia es recomanable modificar els nombres perquè els nombres acabin en 0 o en 5, d'aquesta manera la suma es simplifica.

#### - **Fer deus**

El desenvolupament de la fluïdesa amb sumes de números que fan deu és un enfocament important en el primer cicle. Al final del segon cicle, els estudiants haurien de poder separar els nombres ràpidament per fer deu. L'objectiu d'aquesta estratègia és poder utilitzar la fluïdesa amb el deu per agilitzar la realització de la suma.

$$\begin{array}{l} 116 + 118 \\ (110 + 4 + 2) + (110 + 8) \\ 110 + 110 + (2 + 8) + 4 \\ 110 + 110 + 10 + 4 \\ 230 + 4 = 234 \end{array}$$



A l'exemple s'ha descompost el nombre 6 en  $4 + 2$  per després poder sumar el 2 amb el 8 i obtenir un 10.

- **Compensació**

Semblant a l'estratègia de fer nombres de referència, l'objectiu de la compensació és manipular els números en nombres més senzills i més simples per sumar-los. La diferència principal entre les dues estratègies és que, quan es compensa, s'elimina una quantitat específica d'un sumand i s'afegeix aquesta quantitat exacta a l'altre sumand. Aquesta és una gran idea més complexa per realitzar sumes i els estudiants necessitaran moltes experiències per aplicar aquesta estratègia.

$$\begin{array}{r} 116 + 118 \\ - 2 \quad +2 \\ \hline 114 + 120 = 234 \end{array}$$

En aquesta operació s'ha sumat 2 a 118 per tal d'obtenir 120, un nombre fàcil per sumar, i després s'ha restat 2 a 116 per compensar.

### 3. Metodologia

Al següent apartat s'explica la metodologia que s'ha utilitzat per dur a terme la investigació. Es presenta la perspectiva metodològica de la recerca, el context de la recerca, és a dir, l'escola on s'ha dut a terme la investigació i el que envolta a aquesta escola, també s'explica la mostra (mestres i alumnes que han participat a la investigació), els instruments que s'han utilitzat per fer la recerca i finalment s'explicarà com s'ha realitzat la recollida de dades i el procés d'anàlisi de les dades.

#### 3.1. Perspectiva metodològica

Aquesta investigació barreja les dues metodologies: qualitativa i quantitativa. La recerca és qualitativa ja que s'analitzaran les explicacions que donaren els alumnes per resoldre les operacions, les respostes que donaren les mestres a l'entrevista i les observacions de les classes de càlcul mental als diferents cursos estudiats. La part quantitativa d'aquesta recerca seria el tractament de les dades dels qüestionaris realitzats als alumnes, com per exemple: saber quants d'alumnes han resolt correctament una operació o saber quants d'alumnes han utilitzat una estratègia determinada per resoldre una operació. Aquestes dades permeten ser categoritzades i per aquest motiu l'estudi també és quantitatiu.

El paradigma d'aquesta recerca és interpretatiu ja que segons Latorre, Del Rincón i Arnal (1996), aquest paradigma es caracteritza per:

- L'objectiu de les investigacions amb paradigma interpretatiu és la comprensió i interpretació de la realitat, en aquesta investigació es vol saber el domini de càlcul mental dels alumnes de 4t a 6è, les estratègies que utilitzen per realitzar sumes i quina és la metodologia utilitzada per les seves mestres alhora d'ensenyar càlcul mental.
- Les realitats de la investigació són múltiples, holístiques, dinàmica i construïda. Això implica la renúncia a l'ideal positivista de la predicció i del control.
- La relació de dependència entre l'investigador i l'objecte d'estudi, hi ha implicació per part de tots els participants i interrelació. En aquesta investigació, els participants i l'investigador, han tingut un paper actiu ja que l'investigador ha passat qüestionaris, ha realitzat entrevistes i observacions als participants.
- Els instruments i les estratègies utilitzats per aquesta investigació són qualitatius i descriptius i l'investigador és el principal instrument.

El mètode d'investigació per aquesta recerca és l'estudi de cas. L'estudi de cas segons Martínez (2006) té les següents característiques distintives:

*“Examina o indaga sobre un fenómeno contemporáneo en su entorno real, las fronteras entre el fenómeno y su contexto no son claramente evidentes, se utilizan múltiples fuentes de datos, y puede estudiarse tanto un caso único como múltiples casos.”* (p. 174).

Tal com es pot observar, la investigació té les característiques de l'estudi de cas, ja que la investigació s'ha dut a terme en un entorn real, al CEIP Guillem Ballester i Cerdó, s'ha estudiat com és el nivell de càlcul mental al cycle superior a partir d'una mostra de 70 alumnes i s'han utilitzat diferents fonts per realitzar l'estudi (observacions, qüestionaris a alumnes i entrevistes mestres).

### **3.2. Context de la recerca**

L'escola on és va dur a terme l'estudi és CEIP Guillem Ballester i Cerdó. Aquesta escola està situada a Muro, un poble del nord de Mallorca. És un centre públic d'educació infantil i primària. S'hi imparteix el segon cycle d'educació infantil (EI2): dels 3 als 6 anys i l'etapa d'educació primària (EP): dels 6 als 12 anys. És un centre de doble línia, però hi ha tres grups que són de tres línies; aquests grups són 1r, 2n i 4t. Actualment hi ha 470 alumnes matriculats al centre, dels quals un 20 % són immigrants, i 40 docents, la majoria dels quals són mestres definitius.

L'escola es va crear durant la república però al 2009 es va inaugurar l'edifici actual. Cal destacar que l'escola forma part del PIP, pla d'innovacions pedagògiques de la Conselleria d'Educació i Universitat de les Illes Balears. És un document que defineix els objectius de millora i les estratègies i actuacions necessàries per aconseguir-los. Com que la conselleria ha aprovat el PIP del centre, aquest centre durant un curs escolar disposa de facilitats per dur-lo a terme, com per exemple: cursos de formació, ajudes econòmiques i més professionals.

Posar en marxa aquest pla implica: millorar l'aprenentatge dels alumnes pel desenvolupament de les competències, reorganitzar la feina en equip i cooperativa dels docents, promoure la participació de tota la comunitat educativa i obrir-se a l'entorn.

El CEIP Guillem Ballester i Cerdó segueix el decret 32/2014 de 18 de juliol, pel qual s'estableix el currículum d'educació primària a les Illes Balears. Cal destacar que el

currículum de les Illes Balears és diferent al de Catalunya. Les diferències més notables i que estan presents a la recerca són les següents:

**Taula 1:** Taula comparativa currículum Illes Balears i Catalunya.

|                          | <b>Currículum Illes Balears</b>  | <b>Currículum Catalunya</b>  |
|--------------------------|--|--|
| <b>Aspectes generals</b> | Educació primària es divideix en dos cicles: cicle inicial (1r a 3r) i superior (4t a 6è).   | Educació primària es divideix en tres cicles: cicle inicial (1r i 2n), mitjà (3r i 4t) i superior (5è i 6è).   |
| <b>Matemàtiques</b>      | No existeixen les dimensions.  | Dimensions: resolució de problemes, raonament i prova, connexions i comunicació i representació.   |
|                          | Blocs de continguts:<br>Bloc 1: Processos, mètodes i actituds matemàtiques.<br>Bloc 2: Nombres.<br>Bloc 3: La mesura.<br>Bloc 4: Geometria.<br>Bloc 5: Estadística i probabilitat. | Blocs de continguts:<br>Bloc 1: Numeració i càlcul.<br>Bloc 2: Relacions i canvi.<br>Bloc 3: Espai i forma.<br>Bloc 4: Mesura.<br>Bloc 5: Estadística i atzar. |

### 3.3. Descripció de la mostra.

Per fer la recerca s'han elegit 10 alumnes de cada curs de 4t A, B i C, de 5è A i B i 6è A i B. Per fer la selecció dels alumnes de cada curs, les seves mestres els van elegir a l'atzar però es va tenir en compte que hi hagés 4 alumnes amb un domini alt de matemàtiques, 3 amb un domini mitjà i 3 alumnes que tinguessin un domini baix. Es va realitzar aquest estudi amb els alumnes de 4t a 6è perquè, segons el currículum de les Illes Balears, aquests cursos corresponen al cicle superior.

A més dels alumnes, també participaren les seves mestres de matemàtiques, un total de 7 mestres. 6 de les mestres que impartien les classes eren les seves tutores i la mestra de matemàtiques de 6è A no era la seva tutora, només els impartia aquesta assignatura. De les 7 mestres, 5 d'aquestes són fixes a l'escola i fa molts d'anys que treballen a l'escola. La mestra de matemàtiques de 6è A és la secretària dels centre, fa

tres anys que està a l'escola, no té la plaça definitiva a aquest centre però va demanar una comissió de servei per poder posar en marxa el PIP (pla d'innovacions pedagògiques). Els docents del centre s'estan formant en noves metodologies i també reben formació en matemàtiques. Encara que rebin formació, algunes d'aquestes mestres no han dut a terme les innovacions que se'ls expliquen a la formació. Totes les mestres tenen molts d'anys d'experiència, la mestra que en té menys, fa 10 anys que imparteix classes, i la que en té més, té 30 anys d'experiència.

### **3.4. Instruments: observacions, entrevistes i qüestionaris.**

Els instruments utilitzats per dur a terme la recerca són: pautes per les observacions que es realitzaren a una sessió de càlcul mental a cada grup ( 4t: A, B i C; 5è: A i B i 6è: A i B), les preguntes de l'entrevista per les mestres i el qüestionari de sumes pels alumnes,.

#### **3.4.1. Pauta per les observacions**

Per realitzar les observacions de càlcul mental a les classes de matemàtiques em fixava amb una sèrie d'ítems, aquests són els següents:

- El tipus d'activitat de càlcul mental que els alumnes realitzaven a classe.
- La participació dels alumnes a les sessions de càlcul mental.
- El rol de la mestra.
- El temps que es deixava per resoldre els exercicis de càlcul mental.
- Com es tracten els errors i que passa quan els alumnes s'equivoquen.
- Qui diu el resultat correcte?
- Es té en compte el procés per resoldre els càlculs? O només es té en compte el resultat?
- La duració de la sessió.

A partir d'aquests ítems, vaig anotar el que era més rellevant de cada sessió que vaig observar. A partir de les observacions podia comprovar de primera mà quina és la metodologia utilitzada per les mestres a les sessions de càlcul mental.

#### **3.4.2. Entrevista**

Pel que fa a l'entrevista que es va realitzar a les mestres, l'objectiu d'aquesta era saber què entenien les mestres per càlcul mental, com el treballen a les aules, quines activitats i materials fan servir per fer càlcul mental, la importància que té el càlcul mental per les mestres, com s'avalua i quines dificultats es troben les mestres quan fan càlcul mental. Les preguntes de l'entrevista són les següents:

1. Què entens per càlcul mental? Pots posar un exemple? Com el resoldries?
2. Com es treballa el càlcul mental a l'aula? (materials de suport, d'on s'extreuen els exercicis, com els elegiu). Els alumnes tenen un temps per fer els càlculs?
3. Em podeu ensenyar algun d'aquests materials?
4. Amb quina freqüència es fan sessions de càlcul mental?
5. Com s'avalua?
6. Quines són les dificultats que més detecten que tenen els alumnes quan fan càlcul mental?

Aquestes preguntes estaven destinades a respondre els diferents objectius, a continuació està explicada aquesta relació:

- Què entenen per càlcul mental?: pregunta 1.
- Com el treballen a les aules (activitats, materials): pregunta 2 i 3.
- La importància que té el càlcul mental per les mestres: pregunta 4.
- Com s'avalua?: pregunta 5.
- Quines dificultats es troben les mestres quan fan càlcul mental?: pregunta 6.

### 3.4.3. Qüestionari de sumes

Les sumes del qüestionari estan elegides perquè es puguin aplicar les diferents estratègies que es poden utilitzar per resoldre sumes fent càlcul mental. A més, abans de fer el qüestionari als alumnes vaig fer una prova pilot a una alumna de 4t per comprovar si les sumes eren adequades al nivell dels alumnes. Després d'haver fet la prova pilot, vaig poder comprovar que les sumes eren d'un nivell adequat i, per tant, no vaig canviar cap operació.

A continuació hi ha les sumes elegides pel qüestionari i les estratègies que es poden utilitzar per resoldre-les:

- $78 + 35$  per poder resoldre aquesta suma fàcilment es podrien fer nombres de referència, tenim tres opcions,  $((78 + 2) + 35) - 2$ ,  $((78 - 3) + 35) + 3$  o  $(78 + (35 + 5)) - 5$ . També es pot resoldre fent compensació,  $(78 + 2) + (35 - 2)$  o  $(78 - 5) + (35 + 5)$ . Finalment es podria resoldre descomponent els dos nombres segons el valor de la posició  $(70 + 8) + (30 + 5)$ .
- $48 + 49$ , al ser dos nombres bastant semblants es podria resoldre la suma fent dobles. Es podria fer  $((48 + 2) + (49 + 1)) - 3$ ,  $(48 + 48) + 1$  o  $(49 + 49) - 1$ . També es

pot resoldre per compensació  $(48 - 1) + (49 + 1)$ . Finalment es podria resoldre descomponent un dels nombres o tots dos.

- $156 + 48$ , aquesta suma es podria resoldre fent deu, diríem que n'agafem 4 del 48 i amb el 6 fem un deu, després es sumaria  $150 + 44$  i finalment sumar-li 10. A més podem resoldre aquesta operació compensant  $(156+4) + (48 - 4)$  o  $(156 - 2) + (48+2)$ . Una altra estratègia que es podria utilitzar seria fent nombres de referència,  $((156+4) + 48) - 4$  o  $(156 + (48+2))-2$ .

Per passar el qüestionari, primer els mostrava una operació escrita en horitzontal i a una cartolina. Quan els hi mostrava la suma els demanava, quant dóna aquesta suma? Una vegada haver formulat la pregunta deixava tot el temps que necessitessin els alumnes per resoldre l'operació (com a molt tardaven 1 minut per resoldre cada suma) i quan sabien el resultat me'l deien. Després d'haver resolt a la primera pregunta els demanava, com has resolt la suma? I els alumnes m'explicaven els passos que havien seguit per resoldre l'operació i d'aquesta manera podia saber quina estratègia havien fet servir. Finalment els demanava, pots resoldre l'operació d'una altra manera? Si els alumnes ho sabien fer, m'explicaven com es podria resoldre utilitzant una altra estratègia de càlcul mental.

### 3.5. Recollida de dades

Per recollir les dades es va dur a terme en tres fases:

- Observacions de sessions de càlcul mental: les mestres de 4t a 6è de matemàtiques em varen fer arribar un horari de les sessions de càlcul mental per poder fer les observacions. En aquestes sessions vaig poder observar una classe de càlcul mental de cada grup. S'ha de tenir en compte que a totes les sessions de càlcul mental que vaig observar hi havia la meitat dels alumnes, l'altra meitat feien tallers de matemàtiques. Cada setmana els alumnes van rotant, una setmana fan la sessió de matemàtiques a la classe i l'altra setmana fan tallers. Per recollir les dades anotava les activitats que proposava la mestra, quin paper tenien els alumnes i la mestra, com es tractaven els errors, com es corregien les activitats... A més de fer anotacions, algunes sessions varen ser gravades en vídeo o en àudio.
- Entrevistes amb les mestres de matemàtiques: abans de fer l'entrevista a les mestres, conjuntament amb la tutora, vàrem plantejar les preguntes que es

podrien demanar a les mestres per tal de conèixer què entenien per càlcul mental i com el treballen a les classes de matemàtiques. Per fer l'entrevista, em vaig reunir a la vegada amb totes les mestres de matemàtiques, cada mestra contestava a les preguntes que havia plantejat i jo anotava les respostes. Al final de l'entrevista va sorgir un debat que va ser molt interessant. L'entrevista va tenir una durada d'uns 45 minuts.

- Passar el qüestionari de sumes als alumnes: com he esmentat anteriorment, abans de passar el qüestionari, vaig realitzar una prova pilot a una alumna de 4t per comprovar que les sumes no fossin massa difícils. Després es va realitzar un horari per tal d'organitzar-ho, durant una setmana, del 19 al 23 de març, es varen passar les sumes als 70 alumnes de manera individual i a una aula on només hi havia l'alumne/a i jo.

Els alumnes, d'un en un, venien a l'aula on estava, els mostrava una targeta on hi havia anotada una suma de manera horitzontal, després els demanava si em podien dir la solució, una vegada m'havien dit la solució els demanava com havien arribat a la solució i després els demanava si podien resoldre la suma d'una altra forma. Quan els alumnes contestaven al que els demanava, anotava a mà tot el que hem deien en graelles per tal de tenir tota la informació ordenada (vegeu Taula 2). A més d'anotar la informació a les graelles, vaig gravar totes les conversacions amb àudio (les gravacions es varen utilitzar posteriorment per revisar, si feia falta, el que havia escrit a les graelles).

**Taula 2:** graelles per emplenar amb la informació que donaven els alumnes quan realitzaven els qüestionaris de sumes de càlcul mental.

| Curs: | Nivell | SUMA 1= 78 +35 |            | SUMA 2= 48 +49 |            | SUMA 3= 156 + 48 |            |
|-------|--------|----------------|------------|----------------|------------|------------------|------------|
|       |        | RESULTAT       | ESTRATÈGIA | RESULTAT       | ESTRATÈGIA | RESULTAT         | ESTRATÈGIA |
| 1:    |        |                |            |                |            |                  |            |
| 2:    |        |                |            |                |            |                  |            |
| 3:    |        |                |            |                |            |                  |            |
| 4:    |        |                |            |                |            |                  |            |
| 5:    |        |                |            |                |            |                  |            |
| 6:    |        |                |            |                |            |                  |            |
| 7:    |        |                |            |                |            |                  |            |
| 8:    |        |                |            |                |            |                  |            |
| 9:    |        |                |            |                |            |                  |            |
| 10:   |        |                |            |                |            |                  |            |



### 3.6. Procés d'anàlisi de dades

El procés d'anàlisi de les dades consta de tres fases: anàlisi de les observacions de les sessions de càlcul mental, anàlisi de les entrevistes a les mestres i anàlisi dels resultats dels qüestionaris de sumes de càlcul mental dels alumnes.

#### 3.6.1. Procés d'anàlisi de les observacions de les sessions de càlcul mental.

A partir de les anotacions que vaig realitzar a les sessions de càlcul mental, els vídeos i àudios, vaig fer transcripcions de cada sessió de manera que tingués informació de cada pauta d'observació que s'havia proposat (veure transcripció de les observacions a l'annex 1). Per ordenar tota la informació obtinguda, es varen fer una taula. Aquesta taula està estructurada de la següent manera: a la columna de l'esquerra hi ha les diferents pautes d'observació i a les altres columnes hi ha tots els cursos.

**Taula 3:** taula per ordenar la informació obtinguda de les observació de les sessions de càlcul mental.

| Pautes   | 4t A | 4t B | 4t C | 5è A | 5è B | 6è A | 6è B |
|--|------|------|------|------|------|------|------|
| El tipus d'activitats de càlcul mental que els alumnes realitzaven a classe.             |      |      |      |      |      |      |      |
| La participació dels alumnes a les sessions de càlcul mental.                            |      |      |      |      |      |      |      |
| El rol de les mestres.   |      |      |      |      |      |      |      |
| El temps que es deixa per resoldre els exercicis de càlcul mental.                       |      |      |      |      |      |      |      |
| Com es tracten els errors i que passa quan els alumnes s'equivoquen.                     |      |      |      |      |      |      |      |
| Qui diu que el resultat és correcte?   |      |      |      |      |      |      |      |
| Es té en compte el procés per resoldre els càlculs? O només es té en compte el resultat? |      |      |      |      |      |      |      |
| Duració de la sessió   |      |      |      |      |      |      |      |

#### 3.6.2. Procés d'anàlisi de les entrevistes a les mestres

Quan vaig entrevistar a les mestres feia anotacions de totes les respostes que donaren a les preguntes. A partir d'aquestes anotacions i dels objectius que ens havíem marcat per l'entrevista es va fer una taula (vegeu taula 4). A la columna de l'esquerra hi ha les

preguntes que s'havien marcat per l'entrevista i a la columna de dreta hi ha les respostes. Per facilitar l'emplenat de la taula, el text de l'entrevista transcrita es va marcar en colors. Cada color representava una pregunta i al text es van marcar les respostes amb el color de la pregunta que responia. Una vegada es va tenir el text marcat en colors, es va emplenar la graella (veure el text a l'annex 2).

**Taula 4:** taula per ordenar la informació obtinguda de l'entrevista amb les mestres de matemàtiques.

| Preguntes  | Respostes de les mestres |
|--|--------------------------|
| Què entenen per càlcul mental?                                   |                          |
| Com el treballen a les aules (activitats i materials)?           |                          |
| La importància que té el càlcul mental per les mestres           |                          |
| Com s'avalua?  |                          |
| Quines dificultats es troben les mestres quan fan càlcul mental? | -                        |

### 3.6.3. Procés d'anàlisi dels resultats dels qüestionaris de sumes de càlcul mental als alumnes

A partir de les explicacions dels alumnes, anotades a les graelles, que havien argumentat quan havien realitzat els qüestionaris i a partir de les gravacions d'àudio, vaig tornar a emplenar les graelles per tal de posar nom a les estratègies que havien fet servir els alumnes (les graelles transcrites es troben a l'annex 3.1). Les estratègies que s'havien utilitzat són les següents: suma tradicional, suma tradicional amb la utilització dels dits per contar, descomposició tenint en compte el valor posicional, descomposició sense tenir en compte el valor posicional, compensació, fer nombres de referència, fer deus, fer dobles i altres estratègies inventades pels alumnes.

Després, curs per curs i per a cada suma, vaig anotar quants d'errors i encerts havien obtingut, quants d'alumnes havien utilitzat cada estratègia i quants d'encerts i errors es van fer per a cada estratègia. Per veure en claredat les dades obtingudes, es varen realitzar taules i a partir d'aquestes taules es crearen gràfics de barres (vegeu taula 5).

A continuació hi ha un exemple de les taules (les altres taules es troben a l'annex 3.2) que vaig realitzar per tal d'ordenar les dades obtingudes als qüestionaris i per realitzar els gràfics de barres:

**Taula 5:** nombres d'encerts i d'errors per la suma  $78 + 35$  a 4t

|              | <b>Correcte</b> | <b>Incorrecte</b> |
|--------------|-----------------|-------------------|
| <b>4t A</b>  | 7               | 3                 |
| <b>4t B</b>  | 10              | 0                 |
| <b>4t C</b>  | 7               | 3                 |
| <b>Total</b> | 24              | 6                 |

## 4. Anàlisi i resultats

### 4.1. Anàlisi i resultats de les observacions a les sessions de càlcul mental

En aquest subapartat es mostraran els resultats de les observacions de les sessions de càlcul mental que es van fer a cada curs.

La sessió de 4t A que vaig observar va consistir en realitzar dues fotocòpies del quinze, una fotocòpia de 60 multiplicacions i una fotocòpia de 60 divisions. Quan els alumnes acabaren de fer les operacions, contaren el nombre d'operacions que havien realitzat, ho anotaren i entregaren les fotocòpies a la mestra. La mestra en cap moment va fer explicacions, es va limitar a repartir i a recollir les fotocòpies i a cronometrar els 2 minuts que durava cada prova. Amb aquesta activitat no es permet reflexionar amb el procés per resoldre les operacions mentalment ni amb els errors que s'havien realitzat.

Els alumnes de 4t B feren dues activitats: 10 problemes orals de Lluís Segarra i un dictat de 8 operacions extretes de l'aplicació web de Cruïlla. Per fer els problemes, la mestra llegia els enunciats dues vegades i els alumnes anotaven el resultat. Quan acabaren de fer els problemes, la mestra va recollir els folis on hi havia els resultats dels problemes i no els varen corregir ni es va comentar res. Per fer el dictat d'operacions, la mestra va posar a l'ordenador l'aplicació web de Cruïlla i el programa anava dictant les operacions, per exemple: 9 vegades 1001. Una vegada que s'havia escoltat l'enunciat, la mestra ho tornava a repetir i, si era necessari, la mestra ho explicava. Quan els alumnes sabien la resposta aixecaven el braç i la mestra esperava uns segons perquè hi hagués més alumnes que aixecassin el braç, però sempre eren els mateixos que sabien la resposta. Hi havia 4 de 9 alumnes que no digueren cap resposta. Uns dels alumnes que havia aixecat el braç deia la resposta i el procediment pel qual havia resolt l'operació i els altres alumnes i la mestra deien si la resposta era correcta. Si la resposta no era correcta, un altre alumne deia la solució.

A 4t C es varen realitzar 10 problemes orals extrets del llibre de Cruïlla. La mestra dictava els enunciats, si els alumnes no els entenien la mestra els repetia, i els alumnes escrivien el resultat a un foli. El resultat havia de ser extret mentalment, els alumnes no podien fer operacions al paper, encara que alguns en feia sense que la mestra els ves. Una vegada que s'acabaren de fer els problemes, els corregiren de la següent manera: els alumnes s'intercanviaren els folis on hi havia les solucions per fer les correccions amb el company del costat, d'aquesta manera cap alumne corregia la seva feina, la mestra anava dient els

resultats i els alumnes corregien els resultats. Durant la correcció no es va explicar en cap moment el procediment i els alumnes no deien res. A un problema, que era difícil, la majoria de la classe el van resoldre malament i no es van explicar els errors que havien fet els alumnes.

La mestra de 5è A havia preparat una fotocòpia amb 10 problemes, contextualitzat amb l'acampada que els alumnes havien fet la setmana anterior, per treballar càlcul mental. Els alumnes en parelles havien de resoldre els problemes, tenien dos minuts per fer cada problema, i cada vegada que havien fet un problema, una parella sortia a la pissarra per explicar com havien solucionat el problema. La mestra, en alguns problemes, animava als alumnes que utilitzessin estratègies de càlcul mental i les explicava. Entre tots els alumnes, corregien el problema i deien si la resposta era correcta o no.

L'activitat de càlcul mental que varen realitzar els alumnes de 5è B consistia en realitzar 10 problemes mentalment. A una fotocòpia, la mestra havia anotat 10 problemes i al costat de cada enunciat els alumnes havien d'anotar la solució. Hi havia dos models de problemes, un model que era realitzat per la majoria d'alumnes i un altre model adaptat pels alumnes amb ACNS (adaptació curricular no significativa), que contenia nombres més fàcils d'operar.

La mestra va donar 4 minuts perquè els alumnes realitzessin els problemes i va haver de donar 30 segons més perquè hi havia alumnes que no havien tingut temps d'acabar-los. Després es varen corregir els problemes, els alumnes deien les solucions i explicaven els procediments i la mestra anotava els procediments a la pissarra. Entre tots els alumnes deien si els resultats eren correctes o no i si no eren correctes es cercava l'errada.

La mestra de 6è A va proposar la següent activitat per treballar el càlcul mental: fer una compra i tornar el canvi. En parelles, un alumne feia el rol de comprador i l'altre de venedor. A la pissarra digital hi havia un anunci del supermercat i els alumnes elegien els productes que volien comprar. El venedor feia l'operació del total de la compra amb la calculadora i el comprador pagava la compra, no es podia pagar la quantitat justa. Després el venedor havia de calcular el canvi que havia de donar al comprador mentalment i li donava els doblers. Una vegada que s'havia tornat el canvi, amb la calculadora, es comprovava el resultat i si no era correcte s'havia de cercar l'errada. Els alumnes s'anaven canviant de rol després de cada compra. La mestra observava com els alumnes tornaven el canvi, feia explicacions d'estratègies, si algun alumne tenia una estratègia nova demanava a l'alumne que ho expliqués per a tota la classe i proposava enunciats més difícils, per exemple: fer una compra de més de 100€ i de 1000€.

L'activitat que es va proposar a 6è B és molt semblant a la que es va realitzar a 6è A, però hi havia algunes diferències. Els alumnes de 6è B es posaren en parelles i cada alumne tenia un rol (comprador i venedor). El comprador va anar al supermercat de l'escola i va fer una llista dels productes amb el seu preu. Després el venedor havia de fer una factura amb el preu total de la compra aplicant un descompte (els càlculs els feren amb la calculadora o a paper), es va utilitzar molt de temps per fer la factura. Una vegada s'havia feta la factura, s'havia de pagar la compra i el venedor havia de tornar canvi mentalment. Finalment, els alumnes es canviaren els rols (no totes les parelles tingueren temps de canviar-se el rol). La mestra estava molt pendent de que els alumnes fessin correctament la factura i els ho corregia. També observava com els alumnes es tornaven el canvi i els ajudava.

A continuació es recullen les observacions a la taula 6 on es mostra el més rellevants de les observacions de les sessions de càlcul mental.

**Taula 6.** Resultats de les observacions de càlcul mental per cursos.

| Pautes   | 4t A  | 4t B  | 4t C  | 5è A   | 5è B   | 6è A  | 6è B  |
|--|---|---|---|--|--|---|---|
| El tipus d'activitats de càlcul mental que els alumnes realitzaven a classe. | Quinzet de multiplicacions i divisions.                   | 10 problemes orals de Lluís Segarra de càlcul mental i dictat d'operacions de la web de Cruïlla.  | 10 problemes orals de Cruïlla de càlcul mental.   | 10 problemes escrits de càlcul mental per fer en parelles. Els problemes estaven contextualitzats amb l'acampada que havien fet feia una setmana.                      | 10 problemes escrits de càlcul mental proposats per la mestra. Hi havia dos models, un model per la classe en general i un altre per alumnes en ACNS.            | Realitzar una compra i practicar el tornar canvi mentalment en parelles.  | Realitzar una compra, fer una factura de la compra amb descompte practicar el tornar canvi mentalment en parelles.  |
| La participació dels alumnes a les sessions de càlcul mental.                | Els alumnes només realitzaren les operacions del quinzet. | Problemes: els alumnes solucionaren els problemes.<br><br>Dictat d'operacions: podien participar dient la solució i el procediment que havien fet servir per resoldre les operacions. | Els alumnes resolien els problemes i corregien els problemes que havien fet els companys, anotaren si ho feren bé o malament. | El alumnes per parelles havien de resoldre el problema i fer l'explicació de la resolució.   | Els alumnes varen resoldre els problemes i participaren en el procés de correcció.   | Els alumnes feien els rols de comprador i venedor. El comprador havia de fer la compra, pagar al venedor i comprovar que el canvi que li havia donat el venedor era correcte. El venedor havia de fer l'import de la compra i tornar canvi. | Els alumnes feien els rols de comprador i venedor. El comprador havia de fer la compra, pagar al venedor i comprovar que el canvi que li havia donat el venedor era correcte. El venedor havia de fer l'import de la compra, la factura i tornar canvi. |
| El rol de les mestres.   | La mestra no deia res.                                    | Problemes: la mestra llegia els enunciats i corregia els problemes (no ho va fer a la classe).<br><br>Dictat d'operacions: la mestra llegia els enunciats, si els                     | La mestra dictava els problemes, explicava els enunciats i deia les solucions dels problemes.                                 | La mestra animava als alumnes perquè fessin les explicacions dels problemes, demanava si ho sabien resoldre d'una altra forma i feia explicacions a la pissarra de les | La mestra animava als alumnes perquè fessin les explicacions dels problemes, raonessin i ajuda a corregir-los però no els va donar estratègies de càlcul mental. | La mestra estava molt pendent de les estratègies que utilitzaven els alumnes per tornar canvia, posava els enunciats de l'activitat (de cada vegada eren més difícils) i ajudava als  | La mestra corregia les factures que feien els alumnes de la compra i ajudava als alumnes a tornar canvi.  |

|  |   |  |   |  |  |  |   |
|--|---|--|---|--|--|--|---|
|  |   | alumnes no els entenien els ho tornava a explicar i a vegades explicava el procediment per resoldre l'operació. En cap moment la mestra va escriure els procediments a la pissarra.  |   | estratègies de càlcul mental que empraren els alumnes.                                 | També anotava el procediment per resoldre els problemes de més dificultat.   | alumnes que tenien més dificultats.                              |   |
| El temps que es deixa per resoldre els exercicis de càlcul mental. | Els alumnes tenien 2 minuts per realitzar 60 operacions. Hi havia alumnes que es frustraven perquè no tenien temps de fer tots els càlculs. | <p>Problemes: es deixava un temps oportú perquè tots els alumnes poguessin resoldre els problemes.</p> <p>Dictat d'operacions: es deixava poc temps, fins que alguns alumnes havien resolt l'operació, però no tots els alumnes eren capaços de resoldre l'operació amb el temps que es donava. Més de la meitat dels alumnes no tenien temps per resoldre l'operació.</p> | Deixava temps suficient perquè tots els alumnes poguessin solucionar els problemes. | Tenien 2 minuts per fer cada problema i els alumnes resolien el problema abans d'hora. | Per resoldre els 10 problemes es va deixar 4 minuts però hi havia alguns alumnes que no havien acabat i es deixaren 30 segons més. | No hi havia limitació de temps.                                  | No hi havia limitació de temps.   |
| Com es tracten els errors i que passa quan els                     | Quan s'equivoquen en alguna operació, aquesta no  | Problemes: no es corregiren a classe.  | Els errors no es tenien en compte.  | El errors servien per aprendre ja que en moltes ocasions, quan els alumnes             | Si un alumne s'equivocava es demanava a un altre que digués la   | Els errors no eren tractats de manera negativa, si s'equivocaven | La mestra detectava els errors de les factures i de quan es tornava canvi, i deia |



|  |   |  |  |   |   |  |   |
|--|---|--|--|---|---|--|---|
| alumnes s'equivoquen.  | puntuava. Els alumnes no sabien quins errors havien fet.  | Dictat d'operacions: quan els alumnes s'equivocaven la mestra deia que la solució no era correcte i un altre alumne deia la solució.   |  | explicaven el problema, s'adonaven dels seus errors i s'autocorregien.  | resposta correcta. Al final de la sessió la mestra va demanar: qui ha fet els 10 problemes bé, i 9?, 8?...i 5?  | cercaven l'error i ho corregien.   | als alumnes que ho corregeixin.                           |
| Qui diu que el resultat és correcte?   | La mestra deia els resultats de les operacions i els alumnes anotaven si ho havien fet bé o malament. | La majoria de vegades els alumnes donaven el resultat correcte però sempre eren els mateixos alumnes. En alguna ocasió, la mestra va donar la solució.                                 | La mestra deia els resultats.  | Els alumnes deien les respostes i els altres alumnes deien si estaven d'acord o no amb el resultat. Si no estaven d'acord explicaven el perquè. | Els alumnes deien les respostes i els altres alumnes deien si estaven d'acord o no amb el resultat que s'havia dit. Si no estaven d'acord explicaven el perquè. | El resultat correcte era dit pels alumnes.                                       | Els alumnes deien els resultats i la mestra els corregia. |
| Es té en compte el procés per resoldre els càlculs? O només es té en compte el resultat? | Només es tenia en compte el resultat final.   | Problemes: només es tenia en compte el resultat.<br><br>Dictat de nombres: la majoria de vegades, els alumnes explicaven el procediment que havien seguit per resoldre les operacions. | Només es deia la solució i hi havia alumnes que no estaven d'acord amb el resultat i tampoc es va explicar el procediment. | Es tenia en compte el procés ja que els alumnes l'explicaven i es cercaven altres maneres de resoldre el problema.                              | Es tenia en compte el procés ja que els alumnes l'explicaven els procediment.   | Es tenia en compte el procediment ja que era fonamental per arribar al resultat. | Es tenia en compte el procediment.                        |
| Duració de la sessió   | 5 minuts.   | 20 minuts.   | 25 minuts.   | 1 hora.   | 1 hora.   | 1 hora.  | 1 hora.   |

Les activitats de càlcul mental que es varen proposar són semblants dins el mateix nivell però es diferencien de les activitats que es feren als altres nivells. A 4t, es fan problemes orals, dictats d'operacions i operacions del quinzet, aquestes activitats de càlcul mental són molt mecàniques. Les mestres de 5è havien preparat 10 problemes escrits per tal de treballar el càlcul mental. L'activitat que realitzaren els alumnes de 6è estaven relacionades amb els doblers, la diferència era que els alumnes de 6è A practicaven molt el concepte de tornar canvi mentalment i els alumnes de 6è B empraven molt de temps fent la factura (no ho feien mentalment) i només tornaren una vegada el canvi fent càlcul mental.

Els alumnes no tenien el mateix grau de participació als diferents grups, per exemple: els alumnes de 4t A només havien de realitzar els càlculs mentalment del quinzet i en canvi els alumnes de 5è A havien de fer problemes mentalment i explicar com ho havien fet, aquests alumnes podien participar activament a la sessió, ells eren els protagonistes.

El rol de les mestres era molt diferent depenent del grup. Algunes mestres es limitaven a explicar l'activitat, llegir els problemes o a donar les solucions, sense fer explicacions, com puguin ser les mestres de 4t; en canvi, les altres mestres ajudaven als alumnes a raonar, donaven opció als alumnes que expliquessin els procediment i feien explicacions.

En quan al temps que es donava per fer les activitats de càlcul mental variaven segons el criteri de cada mestra. 5 dels 7 grups (tots els grups de 4t i de 5è) observats es donava un temps determinat per fer les operacions o els problemes, en alguns grups es donà poc temps com pugui ser a 4t A on els alumnes tenien dos minuts per fer 60 operacions, alguns alumnes es frustraren perquè no tenien temps de fer tots els càlculs, i a altres grups es donà més temps, com pugui ser a 5è A, que es van donar 2 minuts per fer cada problema. En canvi, a 6è A i B, la mestra no controlava el temps i els alumnes feien els càlculs al seu ritme.

Els errors haurien de servir per millorar i per reflexionar amb el procés. Però si els alumnes no saben on s'han equivocat i no s'explica perquè s'han equivocat, no es pot millorar. També és molt important que els alumnes s'adonin compte dels seus propis errors per poder regular el seu procés d'aprenentatge. Els alumnes de 5è A i B i de 6è A, podien autoregular-se ja que quan feien les explicacions del procés, en moltes ocasions s'assabentaven que s'havien equivocat.

El procés de resolució dels càlculs és important que es tingui en compte ja que es pot saber quines són les dificultats dels alumnes i on s'ha equivocat, però quan no es té en compte el

procés no es sap si els raonaments que ha fet l'alumne són correctes o tampoc es sap on tenen dificultats per tal de superar-les. Als grups de 4t, en les sessions que vaig observar, el procés no era important ja que només es tenia en compte el resultat final. A cap dels grups observats de 4t es va fer èmfasi amb com els alumnes havien resolt els problemes o els càlculs. En canvi, les mestres dels altres grups demanava als alumnes com ho havien fet per extreure el resultat final, els alumnes explicaven totes les passes que havien seguit per resoldre l'operació i/o problema i si s'equivocaven amb el procediment es corregia.

El temps de duració de la sessió de càlcul mental era distint als diversos grups. Les sessions dels grups de 4t duraren menys de mitja hora i els alumnes només fan aquesta sessió de càlcul mental cada dues setmanes. Les sessions dels grups de 5è i 6è duraren una hora i se'n realitzen setmanalment.

## 4.2. Anàlisi i resultats de les entrevistes a les mestres

A continuació trobem una taula on hi ha les preguntes amb les quals es va realitzar l'entrevista i estan relacionats amb les respostes que varen donar les mestres de 4t, 5è i 6è.

**Taula 7:** Resultats de l'entrevista realitzada a les mestres de matemàtiques.

| Preguntes  | Respostes de les mestres  |
|--|---|
| Què entenen per càlcul mental?                         | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Donar solució a situacions de càlcul numèric sense fer algoritmes.</li> <li>- Tenir estratègies mental per donar solució numèrica. (mestra de 6è A)</li> <li>- Exemples: <ul style="list-style-type: none"> <li>o Situació problemàtica: hi ha 150 nins 2/3 parts anaren d'acampada. Quants alumnes hi anaren? Resolució: divideixes 150 en tres parts, 50, 50, 50 i m'agafes dues parts, 50 + 50, que dóna 100.</li> <li>o Càlcul pur: 40 + 60, de manera oral o escrit.</li> </ul> </li> </ul>   |
| Com el treballen a les aules (activitats i materials)? | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Les mestres de 4t: <ul style="list-style-type: none"> <li>o Es treballa amb el quinzet, 60 operacions amb 2 minuts. Ho utilitzen per treballar la concentració i la rapidesa en càlculs.</li> <li>o També utilitzen els problemes del quinzet. Cada vegada que fan els problemes, en realitzen 10. Les mestres llegeixen els enunciats 2 vegades i es deixa un temps estimat per fer les operacions. Per corregir els problemes, els alumnes diuen les solucions.</li> <li>o A més del quinzet, extreuen material de càlcul mental de la part digital que té Cruïlla.</li> <li>o Per elegir els exercicis ho fan de la següent forma:</li> </ul> </li> </ul> |

|  |   |
|--|---|
|  | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Si són materials fets, els elegeixen així com venen i a vegades, fa variacions dels problemes, per exemple: el problema diu es reparteix entre 2 i elles afegixen que donaria entre 3, i entre 4?</li> <li>▪ Si els fan elles, els elegeixen depenent del tema.</li> </ul> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Les mestres de 5è i 6è:             <ul style="list-style-type: none"> <li>o En algunes sessions treballaven amb el panell numèric per veure les relacions dels nombres de 5 en 5, de 2 en 2.</li> <li>o Fer aproximacions a un nombre donat mitjançant qualsevol operació.</li> <li>o També es treballa el càlcul mental amb problemes realitzats per la mestra contextualitzats al tema que es treballa.</li> <li>o Sempre es dóna temps suficient perquè els alumnes puguin fer els problemes.</li> </ul> </li> </ul> |
| La importància que té el càlcul mental per les mestres           | <ul style="list-style-type: none"> <li>- 4t: els alumnes fan el quinze cada quinze dies perquè els alumnes quan fan les sessions de càlcul mental estan dividits en dos grups i els toca fer aquesta sessió cada dues setmanes.</li> <li>- 5è i 6è: realitzen sessions de càlcul mental setmanalment.</li> <li>- A tots els cursos: sempre que es pot, s'aprofiten els exercicis que fan a les classes de matemàtiques per introduir el càlcul mental.</li> </ul>   |
| Com s'avalua?  | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Es fan registres de les respostes correctes que han obtinguts al quinze, als problemes i a les altres activitats que es realitzen de càlcul mental.</li> </ul>   |
| Quines dificultats es troben les mestres quan fan càlcul mental? | <p>Les dificultats que tenen els alumnes són:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Falta de velocitat quan fan els càlculs.</li> <li>- Veuen que a 4t C, els nens van millor que les nenes.</li> <li>- Hi ha alumnes que no tenen estratègies i per aquest motiu no els agrada fer càlcul mental (mestra de 6è A).</li> </ul>   |

A partir de les dades obtingudes de les entrevistes es pot veure que es treballa el càlcul mental de diferent forma als diversos cursos i les mestres tenen punts de vista distints en relació al càlcul mental.

Les mestres, tal com es pot llegir a la graella, varen dir que el càlcul mental és resoldre una situació de càlcul numèric sense fer algorismes. La mestra de 6è A va dir que els alumnes han d'utilitzar estratègies per poder resoldre una operació mentalment.

El càlcul mental es treballa amb diferents materials depenent dels cursos. A 4t, es fa servir el quinzet, els problemes de Segarra i aplicacions web de l'editorial Cruïlla. Parlant amb les mestres de tots els cursos, es va arribar a la conclusió que no treballen càlcul mental amb el quinzet ja que hi ha un grau de memorització molt gran, sobretot quan fan les fitxes de divisions i multiplicacions. La realització del quinzet és molt mecànica, no fomenta que els alumnes puguin adquirir estratègies de càlcul mental. A 5è i a 6è es fan activitats molt semblants per treballar el càlcul mental, les mestres preparen fitxes amb problemes i els alumnes les han de resoldre fent les operacions mentalment o altres es realitzen altres tipus d'activitats. Pel que podem observar, les estratègies de càlcul mental no es treballen com a tal i tenen poca importància per les mestres.

El càlcul mental es treballa cada dues setmanes a 4t i un cop per setmana als cursos de 5è i 6è. A més, les mestres varen dir que a les sessions de matemàtiques aprofiten qualche activitat per introduir el càlcul mental.

Per avaluar el càlcul mental es fan registres del nombre d'encerts que fa cada alumne a les activitats que es proposen.

Segons les mestres entrevistades les dificultats que tenen els alumnes quan fan càlcul mental són les següents: la falta de rapidesa alhora de fer les operacions mentalment i els falta adquirir estratègies.

Després d'haver entrevistat a les mestres de matemàtiques, crec que els falta formació en relació al càlcul mental ja que no tenen recursos ni estratègies per ensenyar-ho correctament. A més, les mestres creuen que el treball del càlcul mental té un paper secundari en l'ensenyament de les matemàtiques i donen més importància a ensenyar el càlcul escrit seguint els algorismes tradicionals.

### 4.3. Anàlisi i resultats de les sumes

En aquest apartat mostrem l'anàlisi i els resultats de les sumes obtinguts als qüestionaris realitzats pels alumnes. Per fer l'anàlisi de les diferents sumes, s'han agrupat els diferents resultats en gràfics de barres i en graelles, seguits d'un petit comentari explicatiu. El que s'analiza són els resultats correctes i incorrectes obtinguts de cada operació, la utilització d'estratègies per resoldre cada suma i la comparació dels resultats amb l'estratègia que han emprat els alumnes per resoldre cada suma.

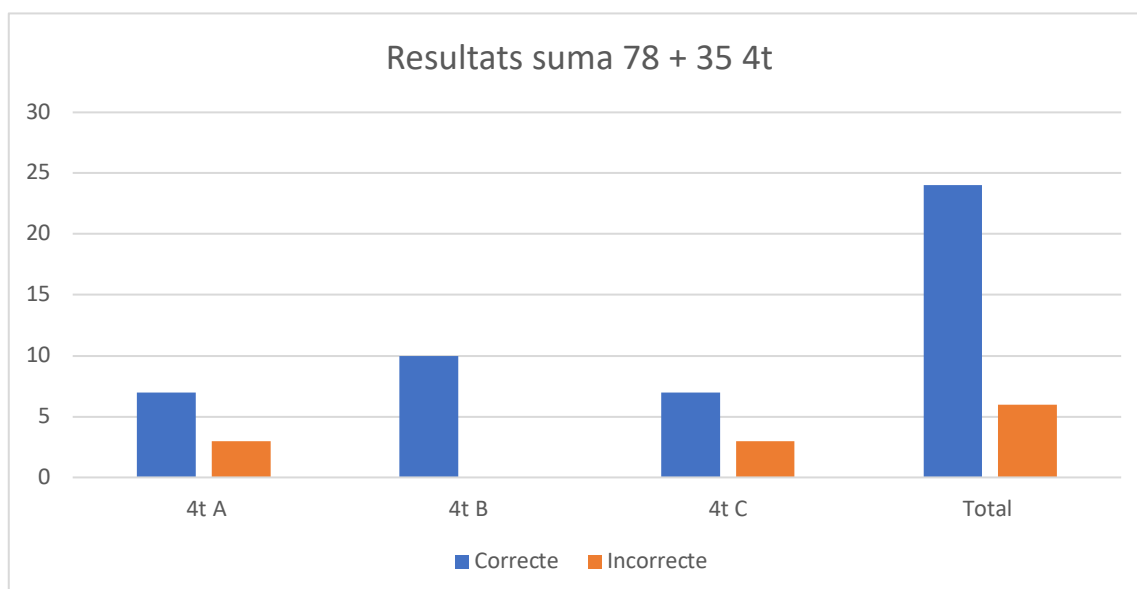
#### 4.3.1. Anàlisi i resultats de la suma $78 + 35$

A continuació, podem veure l'anàlisi i els resultats de la suma  $78 + 35$  organitzats en cursos i una comparació final on hi podrem trobar els resultats agrupant tots els cursos.

##### 4.3.1.1. Anàlisi i resultats de la suma $78 + 35$ a 4t

Com es pot veure en el gràfic 1, hi ha 24 alumnes de 30 que han resolt correctament la suma  $78 + 35$  i 6 alumnes de 30 han respost incorrectament. És a dir, hi ha un 80 % dels alumnes que han resolt correctament l'operació i un 20% que s'han equivocat.

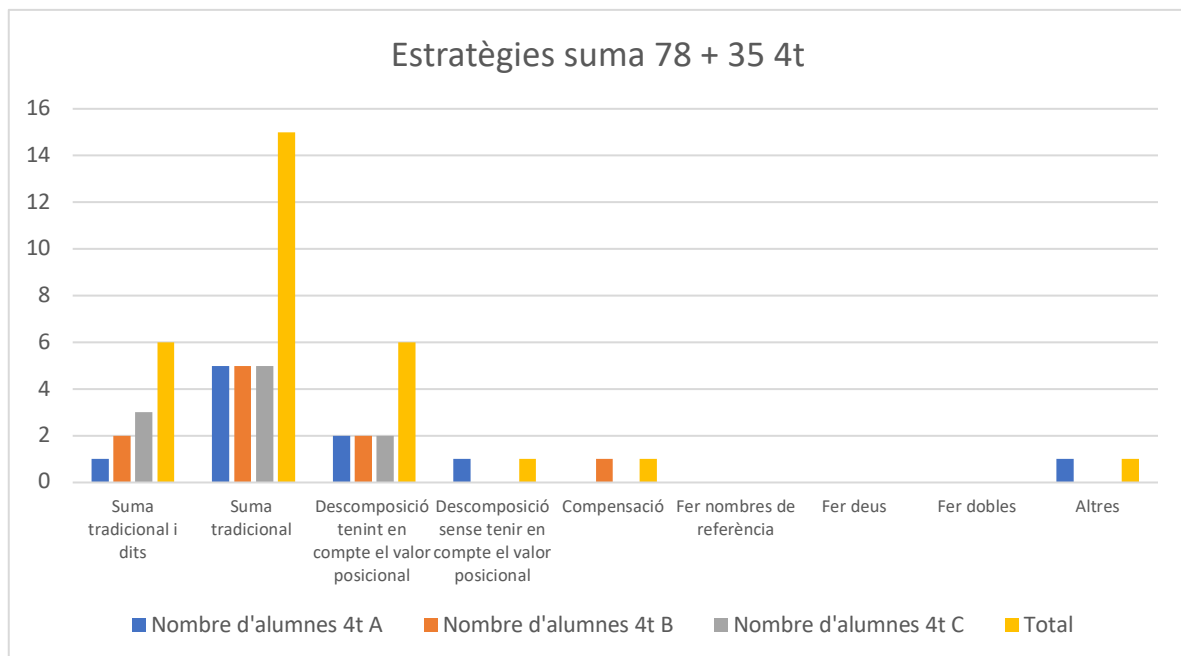
Cal destacar que els resultats obtinguts als tres grups de 4t són diferents, a 4t A i a 4t C hi va haver 7 alumnes que van resoldre correctament la suma i 3 alumnes ho feren incorrectament, en canvi a 4t B, tots els alumnes varen resoldre correctament l'operació.



**Gràfic 1:** gràfic de barres dels resultat de la suma  $78 + 35$  dels alumnes de 4t

Si ajuntem els resultats dels tres cursos de 4t, podem observar que hi ha 21 dels 30 alumnes que resolen la suma de manera tradicional i només 9 alumnes fan servir una altra estratègia.

A més de la suma tradicional, les estratègies que van fer servir els alumnes per resoldre aquesta suma són: la descomposició tenint en compte el valor de posicional, hi va haver 6 alumnes que utilitzaren aquesta estratègia; la descomposició sense tenir en compte el valor posicional dels nombres, compensació i altres que foren utilitzades per 1 alumne.



**Gràfic 2:** gràfic de barres de les estratègies utilitzades per resoldre la suma 78 + 35 pels alumnes de 4t

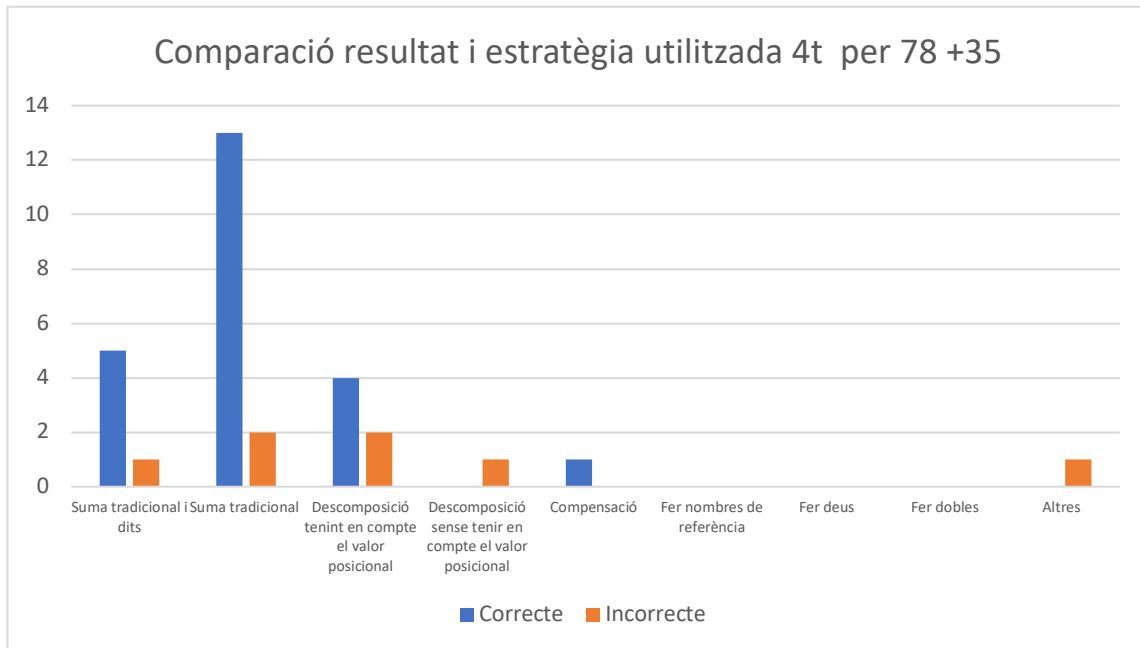
Tal com ens indica el gràfic 3, l' alumne que ha utilitzat l'estratègia de compensació no ha tingut cap error. Per l'estratègia de fer la suma de manera tradicional utilitzant els dits per contar, dels 5 alumnes que l'han utilitzada només 1 alumne s'ha equivocat. Dels 13 alumnes que han fet la suma de manera tradicional, 2 s'han equivocat. En total hi ha hagut 6 alumnes que han realitzat la descomposició tenint en compte el valor posicional i només 1 d'ells s'ha equivocat. En canvi, l'alumne que ha fet servir l'estratègia de descomposició sense tenir en compte el valor posicional i el que ha utilitzat una altra estratègia s'han equivocat amb el resultat de la suma. Per tant, es pot comprovar que els alumnes que fan aquesta suma de manera tradicional obtenen bons resultats. D'aquí es pot interpretar que els alumnes tenen un bon domini per resoldre aquesta suma de manera tradicional.

Els errors que han realitzat els alumnes de 4t són els següents:

- Error de càlcul  $8 + 5$ , alumnes diuen que el resultat és 14 o 11. Per tant, es pot observar que hi ha alumnes que tenen dificultats en sumar dos nombres d'una xifra. En total hi ha dos alumnes que han fet aquest error.



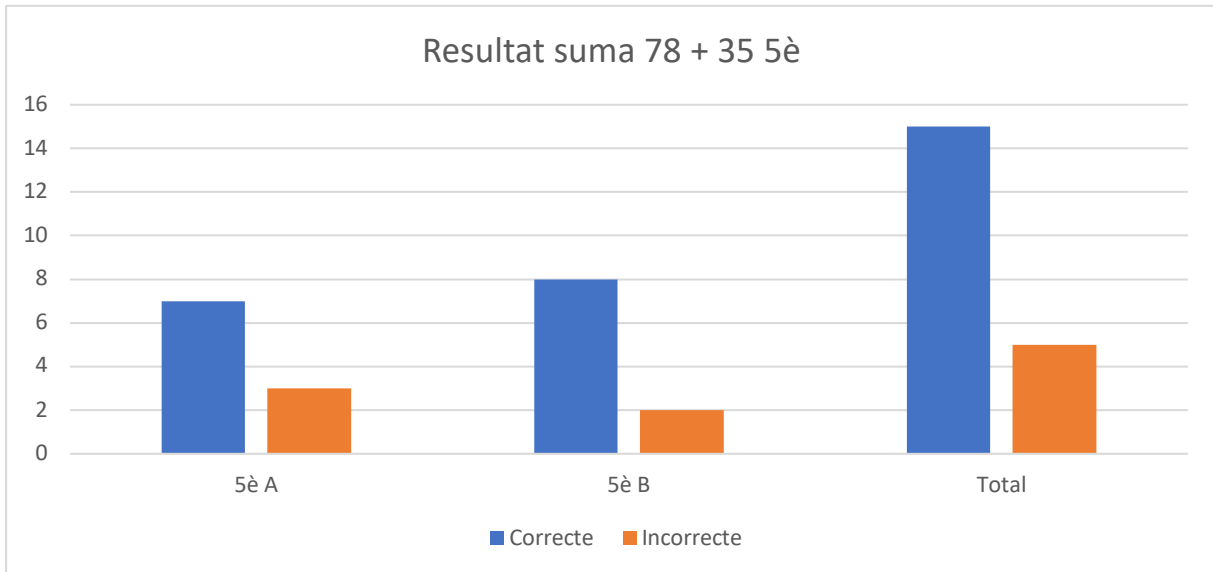
- Quan es resol la suma mitjançant l'estratègia de suma tradicional, hi ha alumnes que s'obliden de la desena que porten quan s'ha sumat  $8 + 5$  o pel contrari, les desenes que es porten les sumen dues vegades.
- Un alumne ha resolt la suma de la següent manera:  $8 + 5 + 3 + 7$  i el resultat que s'obté és 23.



**Gràfic 3:** gràfic de barres per comparar els resultats segons cada estratègia per la suma  $78 + 35$  dels alumnes de 4t.

#### 4.3.1.2. Anàlisi i resultats de la suma $78 + 35$ a 5è

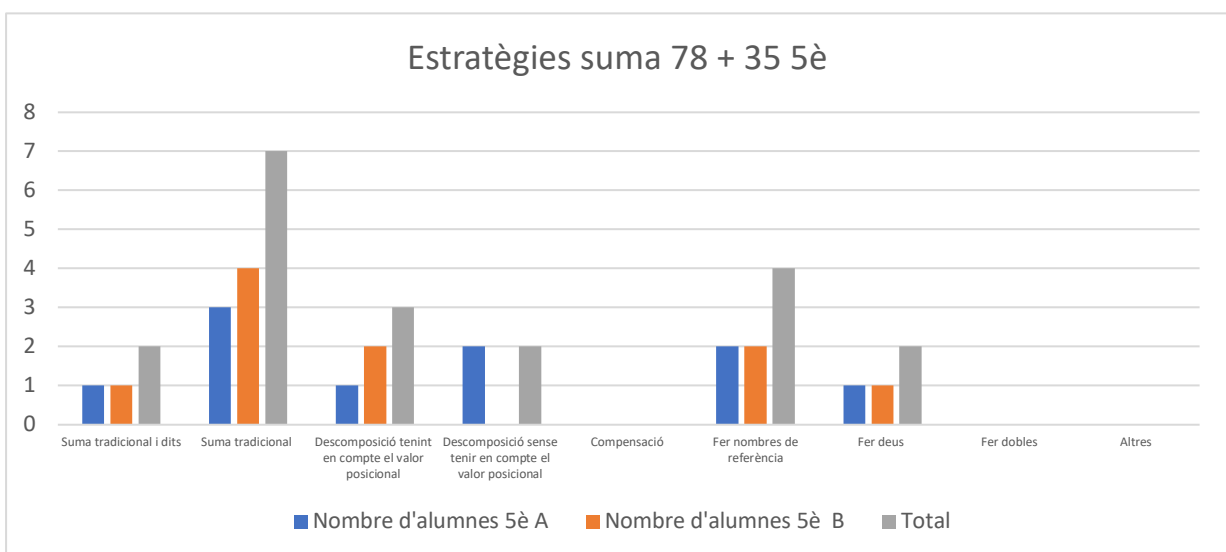
Com es pot observar al gràfic 4, dels 20 alumnes de 5è, 5 d'aquests han resolt erròniament la suma, per tant, podem dir que el 70 % dels alumnes han resolt correctament la suma. Entre els dos grups no hi ha molta diferència, a 5è A hi ha hagut 7 alumnes que han donat la resposta correcte i a 5è B n'hi ha hagut 8.



**Gràfic 4:** gràfic de barres dels resultat de la suma 78 + 35 dels alumnes de 5è

Segons el gràfic 5, a aquest curs podem observar com hi ha un gran nombre d'alumnes que fan servir la suma tradicional, ja sigui amb la utilització de dits o sense, en total hi ha 9 alumnes (2 d'ells han emprat els dits per ajudar-se a trobar la solució). L'altra estratègia més utilitzada és la descomposició, en total hi ha 7 alumnes que la utilitzen, però 2 d'ells fan servir aquesta estratègia sense tenir en compte el valor posicional. També han fet servir l'estratègia de fer nombres de referència, en total hi ha hagut 4 alumnes que l'han utilitzada, dos alumnes de cada grup i l'estratègia de fer deus ha estat utilitzada per dos alumnes, un alumne de cada curs.

Entre els dos grups de 5è no hi ha diferències considerables entre les estratègies que han utilitzat per resoldre la suma.

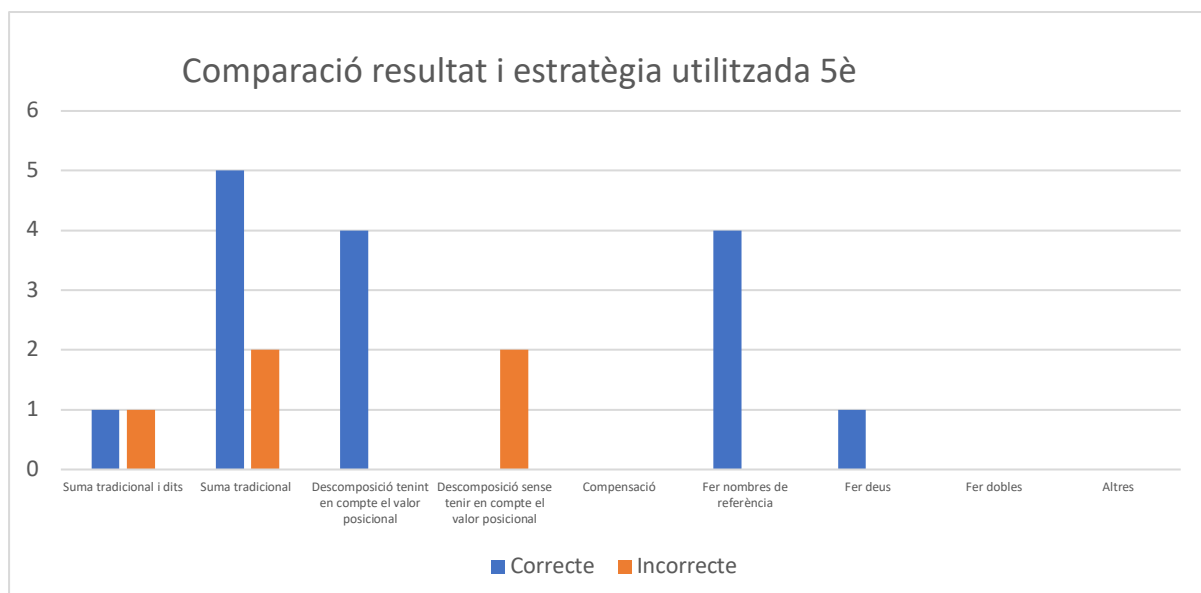


**Gràfic 5:** gràfic de barres de les estratègies utilitzades per resoldre las suma 78 + 35 pels alumnes de 5è

Amb el gràfic 6 podem observar que l'estratègia que ha obtingut pitjors resultats és la descomposició sense tenir en compte el valor posicional ja que els dos alumnes que l'han utilitzada, aquests han resultat incorrectament l'operació. Per altra banda, podem observar que tots els alumnes que han utilitzat les estratègies de descomposició tenint en compte el valor posicional, fer deus i fer nombres de referència, han realitzat correctament la suma. Pel que fa a la suma tradicional amb dits, hi ha hagut un alumne que utilitzant aquesta estratègia ha resultat correctament la suma i un alumne que no. Finalment, amb la utilització de la suma tradicional, 5 alumnes han estat capaços de resoldre bé la suma i 2 alumnes l'han resolta incorrectament.

Els errors més comuns a 5è per resoldre la suma  $78 + 35$  són els següents:

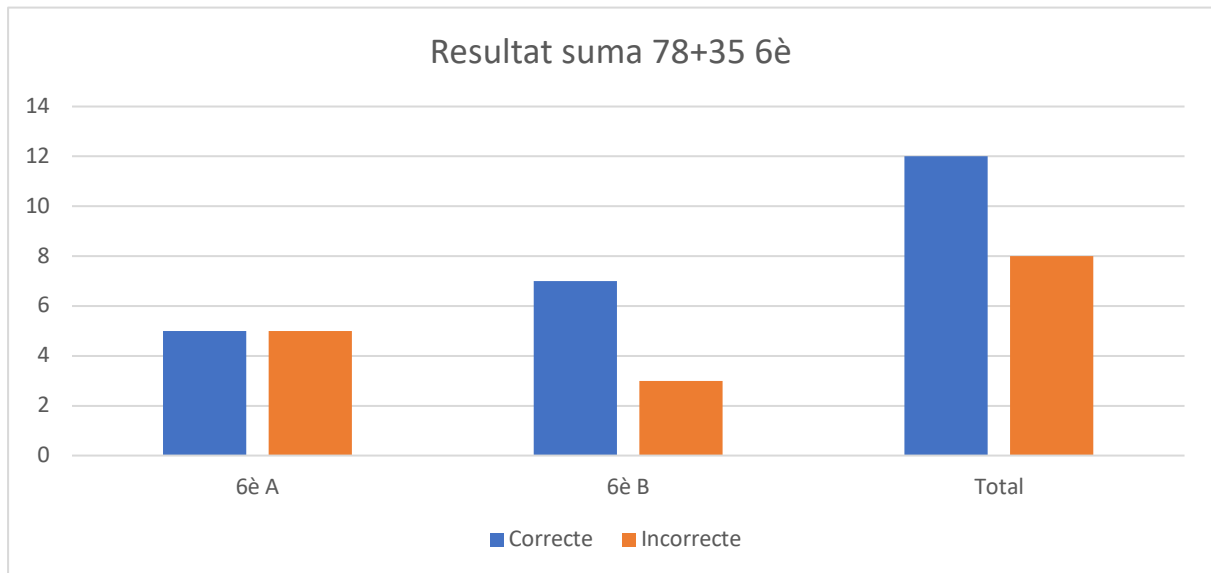
- Quan es resol la suma mitjançant l'algoritme de la suma tradicional mentalment, els alumnes s'obliden de les desenes que porten i obtenen com a resultat 103 en comptes de 113.
- Els alumnes s'equivoquen quan sumen  $8 + 5$  i diuen que el resultat és 14 o 15.
- Hi ha dos alumnes que han resultat l'operació mitjançant l'estratègia de descomposició sense tenir en compte el valor posicional. Aquest alumnes han fet els següents procediments:  $7 + 3 = 10$  i  $8 + 5 = 13$ , aquest procediment, seguint aquesta estratègia és correcte, però quan donaren el resultat final s'equivocaren, un va dir que el resultat era 122 i l'altre va dir que eren 108.



**Gràfic 6:** gràfic de barres per comparar els resultats segons cada estratègia per la suma  $78 + 35$  dels alumnes de 5è

#### 4.3.1.3. Anàlisi i resultats de la suma 78 + 35 a 6è

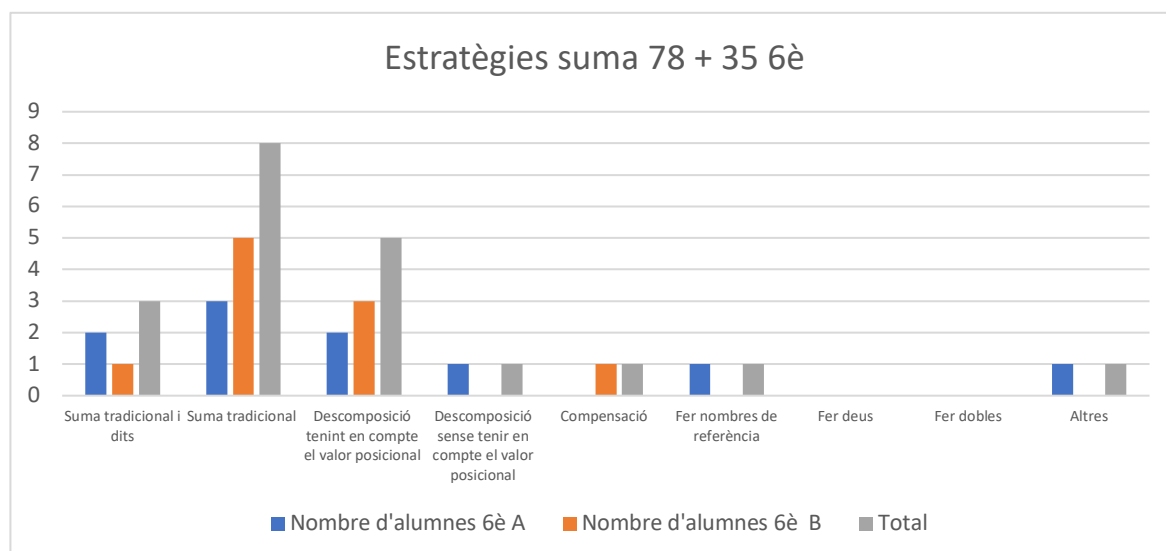
Com es pot veure al gràfic 7, hi ha hagut molts d'alumnes que han resolt incorrectament la suma, només el 60% dels alumnes han respost correctament. Entre els dos grups hi ha diferències en el nombre de respostes correctes i errònies, a 6è A hi ha 5 alumnes que han fet l'operació correctament i 5 que no i en canvi a 6è B hi ha 7 alumnes que han resolt correctament l'operació i 3 que no.



**Gràfic 7:** gràfic de barres dels resultat de la suma 78 + 35 dels alumnes de 6è

Tal com podem observar al gràfic 8, podem veure que els alumnes de 6è han utilitzat diverses estratègies per resoldre la suma 78 +35 i que l'estratègia més utilitzada és la suma tradicional. La suma tradicional, tant si utilitzen els dits com no, en total hi ha 11 alumnes que han fet servir aquesta estratègia. La segona estratègia més utilitzada és descomposició tenint en compte el valor posicional, hi ha hagut un total de 5 alumnes que l'han utilitzada.

En canvi, les estratègies menys utilitzades són: la compensació només ha estat utilitzada per un alumne de 6è B, fer nombres de referència per un alumne de 6è A i descomposició sense tenir en compte el valor posicional, que l'ha feta servir un alumne de 6è A.

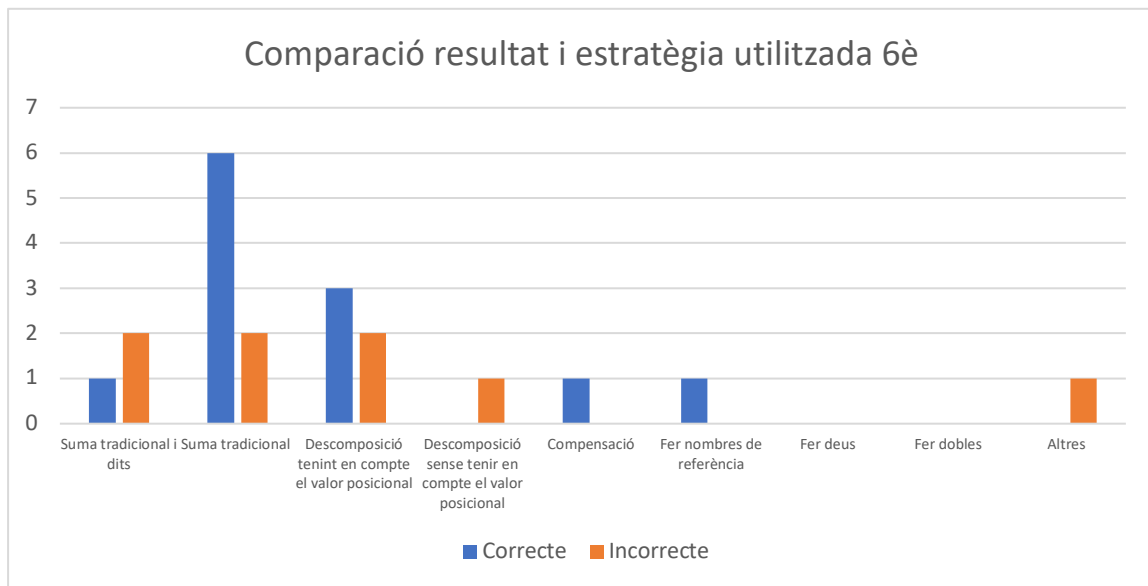


**Gràfic 8:** gràfic de barres de les estratègies utilitzades per resoldre las suma 78 + 35 pels alumnes de 6è

Com es pot observar al gràfic 9, les estratègies de compensació i fer nombres de referència són les que han donat millors resultats ja que els alumnes que les han fet servir no han comés errors. En canvi, les estratègies que pitjors resultats ha obtingut són: la descomposició sense tenir en compte el valor posicional ja que els dos alumnes que l'han utilitzada s'han equivocat i altres ha estat emprada per un alumnes i aquest ha resolt incorrectament l'operació. L'estratègia de suma tradicional tampoc ha donat bons resultats ja que dels 7 alumnes que l'han utilitzada, 4 alumnes s'han equivocat.

Els errors més destacables que han realitzat els alumnes de 6è per la suma 78 + 35 són:

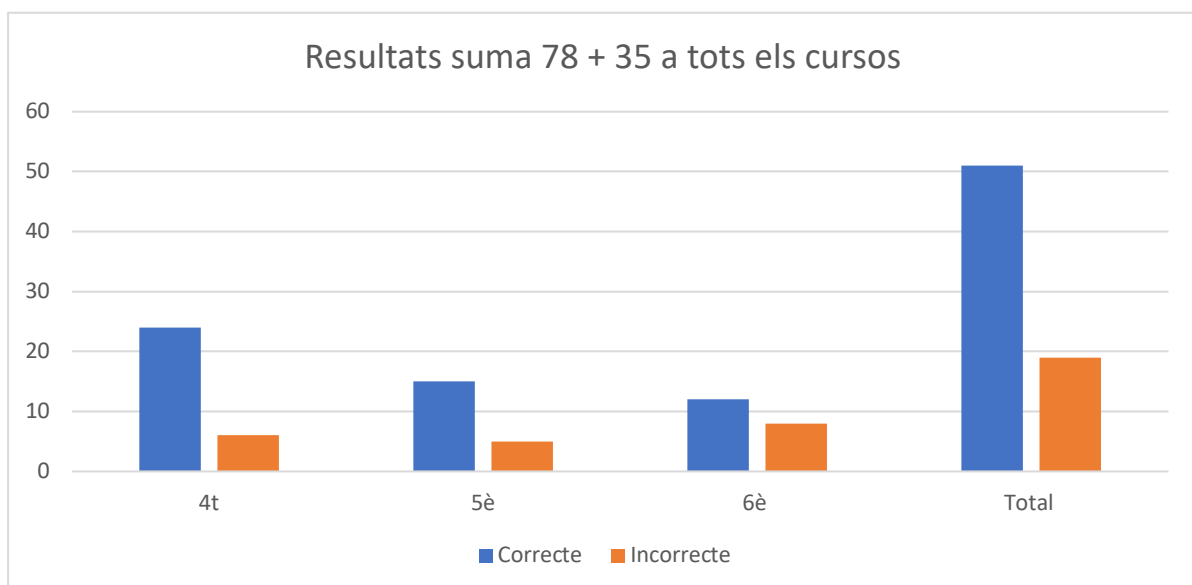
- Els alumnes s'equivoquen quan calculen  $8 + 5$ , dient que el resultat és 12 o 14.
- Un altre error molt freqüent, quan es fa servir l'estratègia de suma tradicional, és oblidar-se de les desenes que es porten una vegada haver sumat  $8 + 5$ .
- Un alumne ha fet la suma de la següent forma: ha sumat  $78 + 5$  i s'ha oblidat de sumar 30.
- Un altre error ha estat que un alumne s'ha oblidat de les desenes i ha dit que el resultat final de la suma era 13.



**Gràfic 9:** gràfic de barres per comparar els resultats segons cada estratègia per la suma 78 + 35 dels alumnes de 6è

#### 4.3.1.4. Anàlisi i resultats de la suma 78 + 35 a tots els cursos analitzats

Com podem observar al gràfic 10, si agrupem tots els resultats obtinguts als diferents cursos podem observar que el 80 % dels alumnes de 4t han resolt correctament l'operació, dels alumnes de 5è han resolt correctament la suma el 75% i el 60% dels alumnes de 6è han donat el resultat correcte de la suma. En total hi ha 51 alumnes que han resolt correctament la suma i 19 alumnes que s'han equivocat. En total hi ha hagut un 72% d'encerts.



**Gràfic 10:** gràfic de barres per comparar els resultats de la suma 78 + 35 a tots els cursos

A la taula 8 podem observar el percentatge d'utilització de cada estratègia a cada curs. A partir d'aquests percentatges es pot veure que l'estratègia més utilitzada és la suma tradicional. El 50% d'alumnes de 4t han fet servir aquesta estratègia per resoldre la suma, a mesura que van avançant els cursos, aquesta estratègia es va utilitzant un poc menys però així i tot és la més utilitzada. També cal destacar que hi ha un gran nombre d'alumnes que utilitzen els dits per ajudar-se a fer la suma de manera tradicional. En total hi ha 41 alumnes de 70 que han utilitzat l'estratègia de suma tradicional, amb l'ajuda o no dels dits per contar. L'altra estratègia més utilitzada és la descomposició tenint en compte el valor posicional, que representa el 20% dels alumnes. Les altres estratègies s'han utilitzat molt poc ja que no representen el 10 % del total dels alumnes. L'estratègia de fer dobles no s'ha utilitzat ja que no eren l'estratègia més idònies per resoldre la suma  $78 + 35$ .

| Estratègies   | 4t       | 5è       | 6è      | Total      |
|---|----------|----------|---------|------------|
| Suma tradicional i dits                                 | 6 (20%)  | 2 (10%)  | 3 (15%) | 11 (15,7%) |
| Suma tradicional  | 15 (50%) | 7 (35%)  | 8 (40%) | 30 (42,8%) |
| Descomposició tenint en compte el valor posicional      | 6 (20%)  | 3 (15%)  | 5 (25%) | 14 (20%)   |
| Descomposició sense tenir en compte el valor posicional | 1 (3,3%) | 2 (10 %) | 1 (5%)  | 4 (5,6%)   |
| Compensació   | 1 (3,3%) | -        | 1 (5%)  | 2 (2,8%)   |
| Fer nombres de referència                               | -        | 4 (20%)  | 1 (5%)  | 5 (7,1%)   |
| Fer deus  | -        | 2 (10%)  | -       | 2 (2,8 %)  |
| Fer dobles  | -        | -        | -       | -          |
| Altres  | 1 (3,3%) | -        | 1 (5%)  | 2 (2,8%)   |

**Taula 8:** taula de % dels alumnes que utilitzen cada estratègia a tots els cursos per la suma  $78 + 35$

En la taula 9 podem observar el nombre de resultats correctes i incorrectes de cada estratègia.

Es pot observar que les estratègies que menys resultats correctes han donat són: la descomposició sense tenir en compte el valor posicional i altres. Les estratègies que més bons resultats han obtingut són fer nombres de referència, fer deus i compensació, ja que els alumnes que han utilitzat aquestes estratègies no han fet errors. Una altra dada que ens dóna aquesta taula és que el 80% d' alumnes que han utilitzat la suma tradicional han resolt correctament la suma. Això vol dir, que aquests alumnes tenen interioritzat molt bé l'algorisme tradicional i els funciona utilitzar aquesta estratègia, almenys amb aquesta suma.

Els errors més habituals als diferents cursos han estat els següent:

- Calcular erròniament  $8 + 5$ , en total hi ha hagut 8 alumnes que han fet aquest error.

- Amb l'estratègia de suma tradicional, els alumnes s'ha oblidat de les desenes que portaven, en total hi ha hagut 6 alumnes que han tingut aquest error.

| Estratègies   | Correcte  | Incorrecte |
|---|-----------|------------|
| Suma tradicional i dits                                 | 7 (63,6%) | 4 (36,4%)  |
| Suma tradicional  | 24 (80%)  | 6 (20%)    |
| Descomposició tenint en compte el valor posicional      | 11(78,6%) | 3 (21,4%)  |
| Descomposició sense tenir en compte el valor posicional | -         | 4 (100%)   |
| Compensació   | 2 (100%)  | -          |
| Fer nombres de referència                               | 5 (100%)  | -          |
| Fer deus  | 2 (100%)  | -          |
| Fer dobles  | -         | -          |
| Altres  | -         | 2 (100%)   |

**Taula 9:** taula amb el nombre d'encerts i errors de cada estratègia a tots els cursos per la suma 78 +

35.



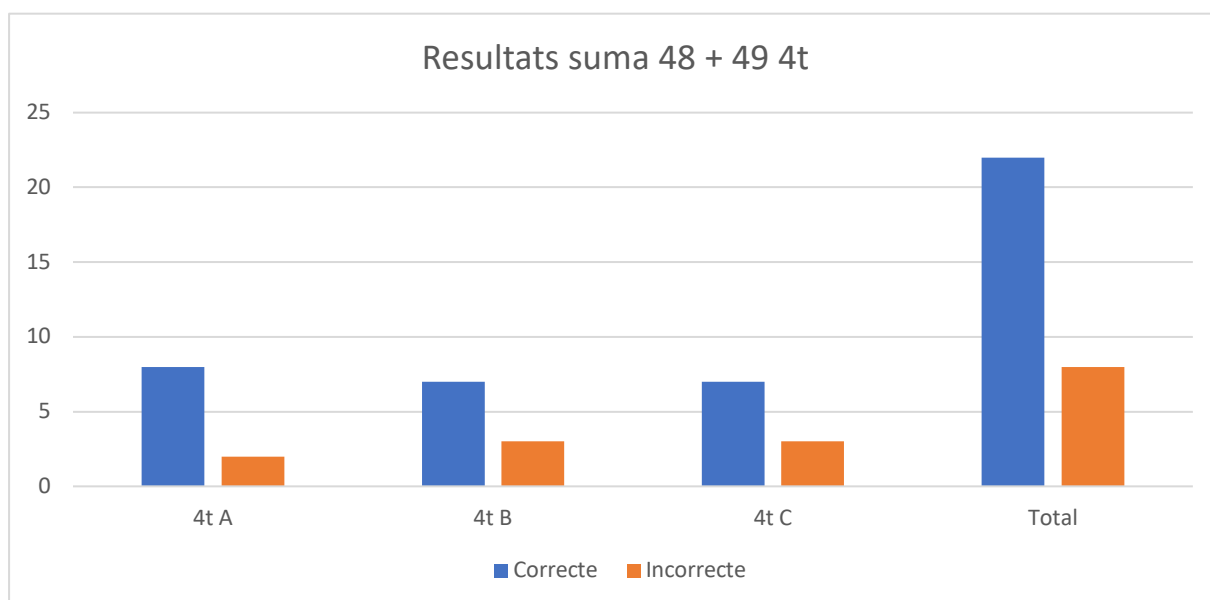
### 4.3.2. Anàlisi i resultats de la suma 48 + 49

A continuació, podem observar l'anàlisi i els resultats de la suma 48 + 49 organitzats en cursos i una comparació final on hi podrem trobar els resultats agrupant tots els cursos.

#### 4.3.2.1. Anàlisi i resultats de la suma 48 + 49 a 4t

Com podem observar al gràfic 11, els diferents grups de 4t han obtingut resultats semblants en quant al nombre d'alumnes que han resolt correctament la suma 48 + 49. A 4t A hi ha 8 alumnes que han resolt correctament la suma i a 4t B i C hi ha 7 alumnes a cada curs que l'han resolta correctament.

En total, hi ha 22 alumnes que han resolt correctament la suma i 8 alumnes que es varen equivocar en el resultat.

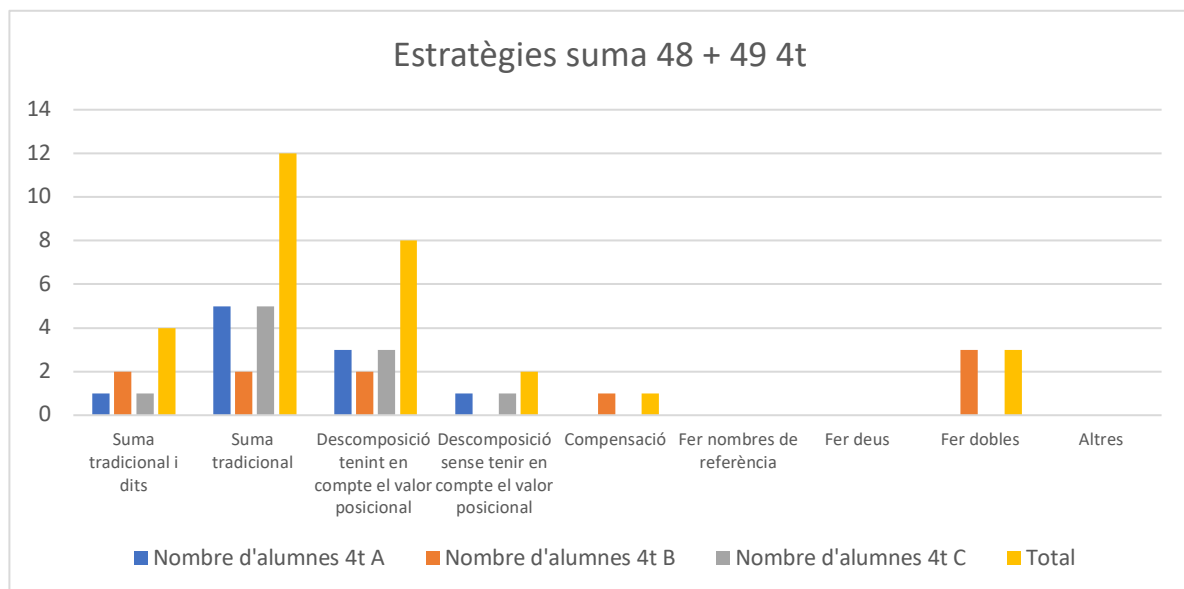


**Gràfic 11:** gràfic de barres dels resultat de la suma 48 + 49 dels alumnes de 4t

Tal com podem veure al gràfic 12, la utilització de les estratègies varia depenent del grup. Pel que fa a l'estratègia de suma tradicional, fent servir els dits o no, és més utilitzada als grups de 4t A i C, el 60 % d'alumnes d'aquests grups utilitzen aquesta estratègia i a 4t B el 40% d'alumnes fan servir la suma tradicional, amb o sense els dit. La segona estratègia més utilitzada és la descomposició tenint en compte el valor posicional dels nombres, hi ha un 26% dels alumnes que han fet servir aquesta estratègia.

També podem observar que els alumnes de 4t B tenen més diversitat d'estratègies per resoldre aquesta suma, ja que són els únic alumnes que fan servir l'estratègia de compensació i fer dobles.

Aquesta suma estava destinada a que els alumnes utilitzessin l'estratègia de fer dobles i només un 10 % de l'alumnat l'ha feta servir.

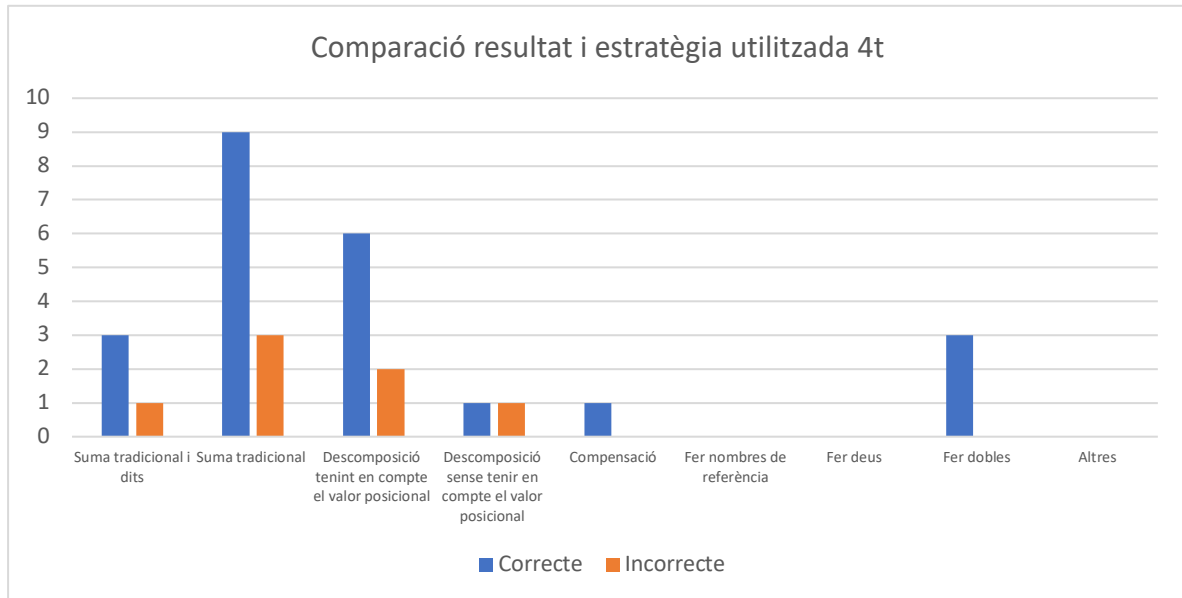


**Gràfic 12:** gràfic de barres de les estratègies utilitzades per resoldre las suma 48 + 49 pels alumnes de 4t

Al gràfic 13 es pot observar el nombre de respostes correctes i incorrectes per a cada estratègia. En aquesta suma, l'estratègia que dona la quantitat d'errors més elevada és la descomposició sense tenir en compte el valor posicional, hi ha un 50 % d'alumnes que han resolt correctament la suma utilitzant aquesta estratègia. Pel que fa a la suma tradicional, amb i sense la utilització de dits, hi ha un 75% de respostes correctes. Finalment, cal destacar que les estratègies que donen més bons resultats són la compensació i fer dobles, ja que el 100% dels alumnes que han fet servir aquestes estratègies, han resolt correctament la suma.

Els errors que més s'han repetit per la suma 48 + 49 són els següents:

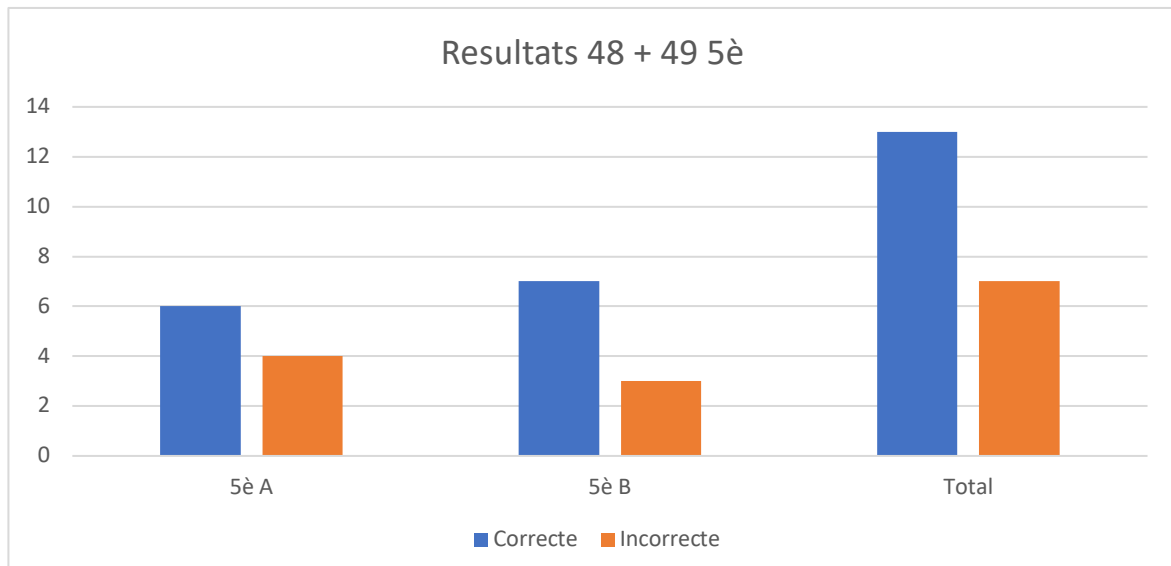
- Els alumnes s'han equivocat quan han resolt  $8 + 9$ , alguns han dit que el resultat era 18, 16.
- Quan es resol la suma amb l'estratègia de suma tradicional, no pensaven que quan sumaven  $8 + 9$  en portaven 1 i deixaven aquest 1 a les desenes i continuaven la suma, per tant, el resultat que obtenien era de tres xifres, dient que el resultat era 917 o 871
- És una suma duent i quan la resolen seguint l'algoritme tradicional s'obliden que en porten un.



**Gràfic 13:** gràfic de barres per comparar els resultats segons cada estratègia per la suma 48 + 49 dels alumnes de 4t

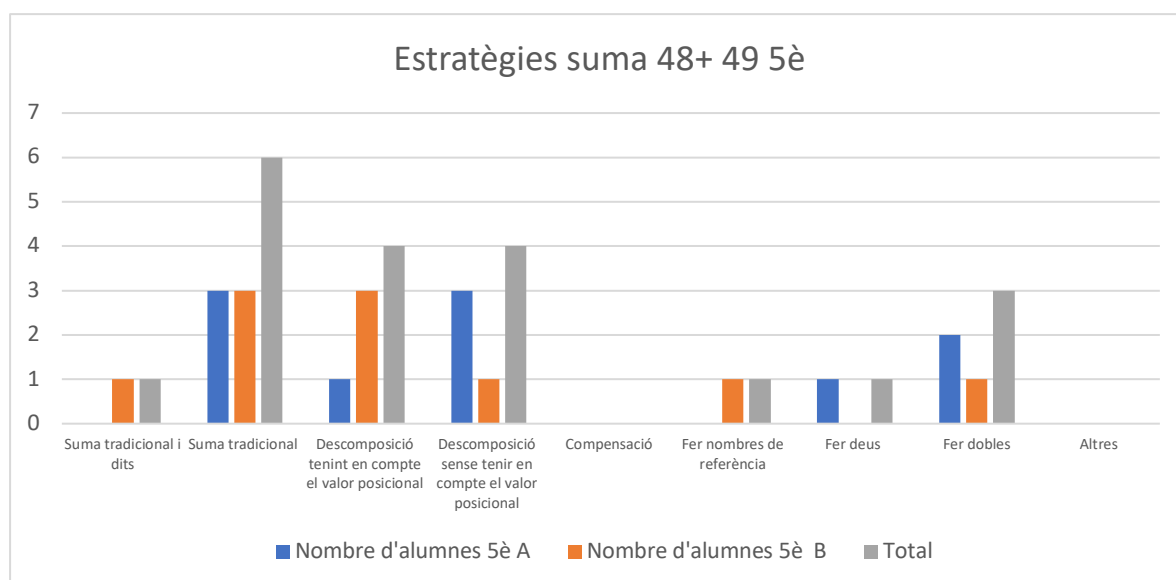
#### 4.3.2.2. Anàlisi i resultats de la suma 48 + 49 a 5è

Tal com es mostra al gràfic 14, el nombre de resultats correctes i incorrectes per aquesta suma a 5è són bastant semblants als dos grups. A 5è A hi ha 6 alumnes i a 5è B hi ha 7 alumnes que han resolt correctament la suma. En total, hi ha el 65% dels alumnes que han resolt correctament la suma.



**Gràfic 14:** gràfic de barres dels resultat de la suma 48 + 49 dels alumnes de 5è

Com podem observar al gràfic 15, l'estratègia més utilitzada és la suma tradicional, en total hi ha 7 alumnes dels 20 que l'han feta servir. L'altra estratègia més utilitzada és la descomposició tenint en compte el valor posicional, hi ha 5 de 20 alumnes que l'han emprada. Pel que fa a l'estratègia de fer nombres de referència, només hi ha 1 alumne de 5è B que l'ha utilitzada, fer deus també ha estat utilitzada per un alumne de 5è A i fer dobles només hi ha hagut 3 alumnes, 2 de 5è A i 1 de 5è B.



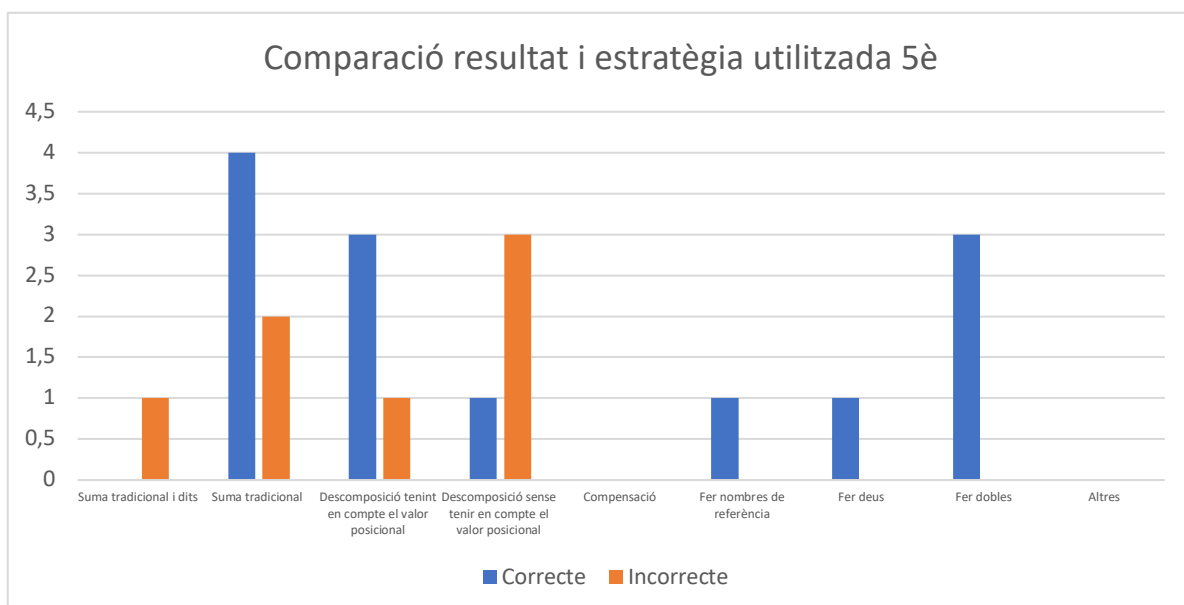
**Gràfic 15:** gràfic de barres de les estratègies utilitzades per resoldre las suma 48 + 49 pels alumnes de 5è

Tal com podem observar al gràfic 16, l'estratègia que més errors ha registrat és l'estratègia de descomposició sense tenir en compte el valor posicional, el 75% dels alumnes que han utilitzat aquesta estratègia han donat una resposta equivocada. Pel que fa a la suma tradicional, utilitzant els dits o no, podem dir que el 42 % dels alumnes han obtingut un resultat incorrecte.

Les estratègies que millors resultats han donat són fer nombres de referència, fer deus i fer dobles, ja que el 100% dels alumnes que han fet servir aquestes estratègies han donat un resultat correcte.

Els errors que han realitzat els alumnes de 5è són els següents:

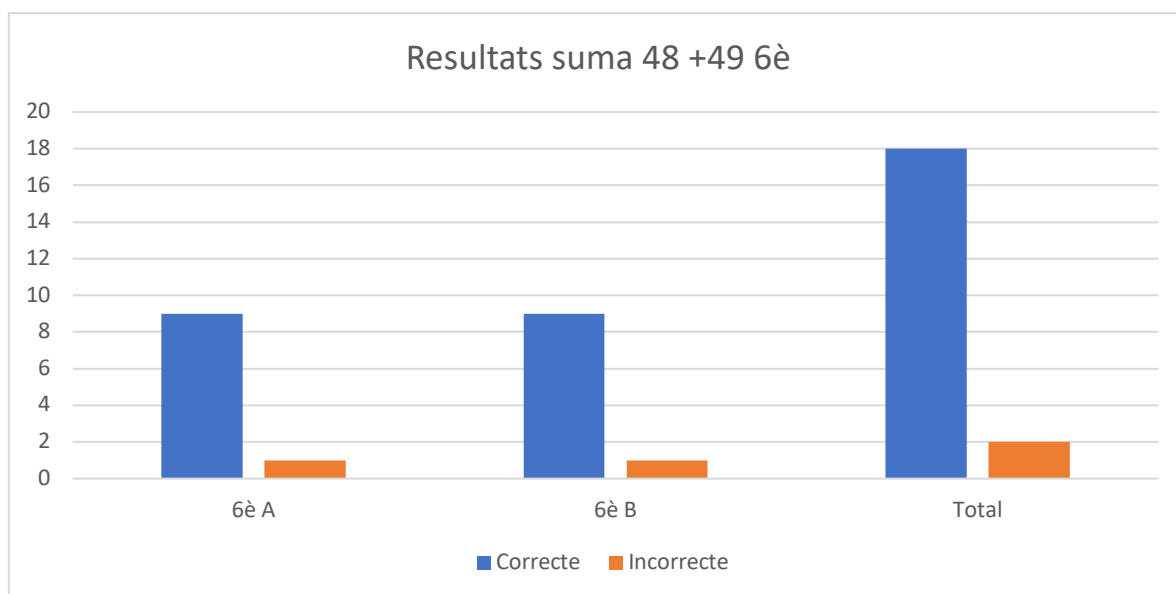
- No pensaven que la suma és portant.
- Sumar erròniament  $8 + 9$ , dient que el resultat és 11 o 16.
- No pensaven que quan sumaven  $8 + 9$  en portaven 1 i deixaven aquest 1 a les desenes i continuaven la suma, per tant, el resultat que obtenien era de tres xifres, dient que el resultat era 817.
- Girar el resultat, envers de dir 97, un alumne va dir 79.



**Gràfic 16:** gràfic de barres per comparar els resultats segons cada estratègia per la suma 48 + 49 dels alumnes de 5è

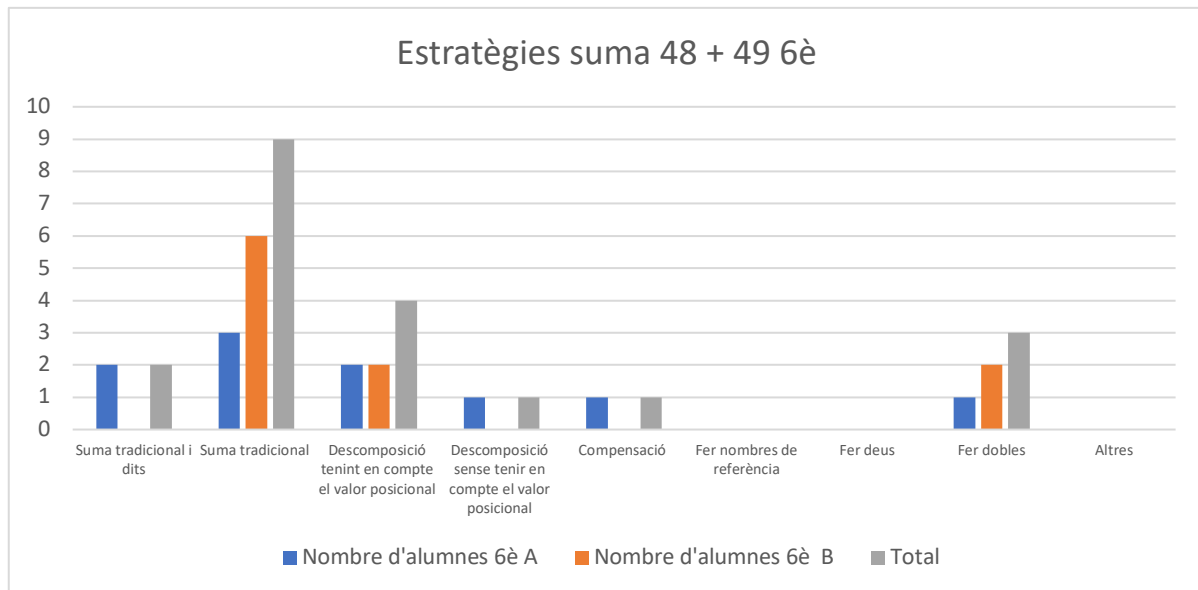
#### 4.3.2.3. Anàlisi i resultats de la suma 48 + 49 a 6è

Tal com podem observar al gràfic 17, quasi tots els alumnes de 6è han resolt correctament la suma 48 + 49. Als dos grups hi ha 9 alumnes que han resolt correctament la suma i 1 alumne s'ha equivocat. En total hi ha un 90% d'encerts.



**Gràfic 17:** gràfic de barres dels resultat de la suma 48 + 49 dels alumnes de 6è

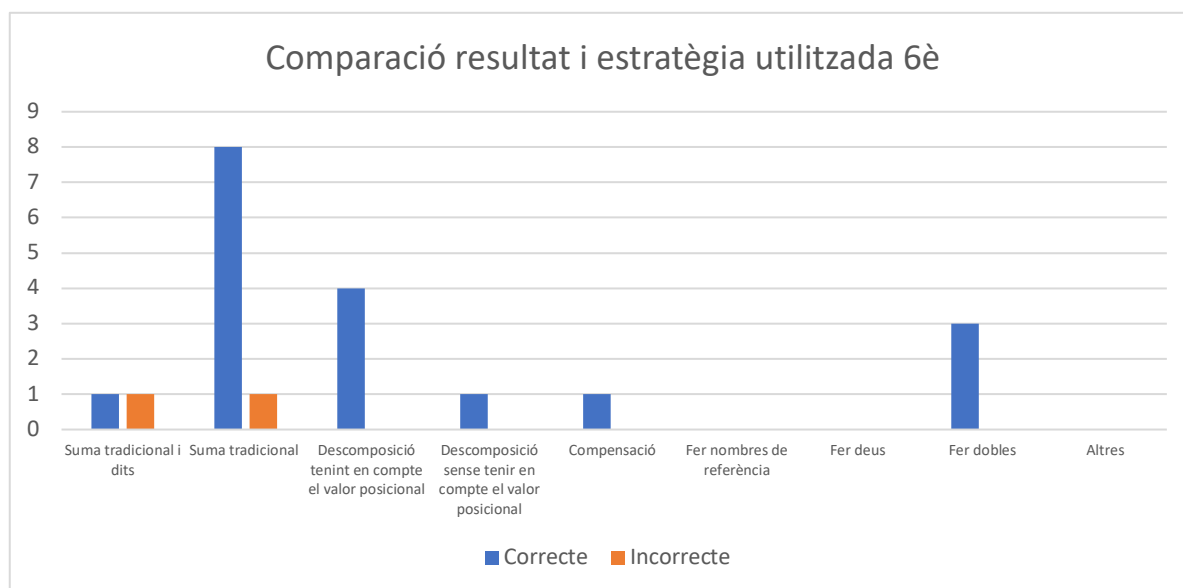
Al gràfic 18 podem observar quines estratègies han utilitzat en cada grup. Es pot veure que a 6è A hi ha hagut 5 alumnes que han fet servir l'estratègia de suma tradicional, amb o sense dit, i a 6è B hi ha hagut 6 alumnes. També podem dir que les estratègies de fer descomposició sense tenir en compte el valor posicional i compensació només s'han utilitzat a 6è A. La descomposició tenint en compte el valor posicional s'ha utilitzat als dos grups de la mateixa manera, hi ha 2 alumnes de la mateixa classe que l'han feta servir. Finalment, l'estratègia de fer dobles només ha estat utilitzada per 3 alumnes, 1 alumne de 6è A i 2 alumnes de 6è B.



**Gràfic 18:** gràfic de barres de les estratègies utilitzades per resoldre la suma 48 + 49 pels alumnes de 6è

Les estratègies de descomposició, compensació i fer doble, tal com es veu al gràfic 19, han obtingut un 100 % de respostes correctes. L'estratègia que ha donat més errors és la suma tradicional, amb i sense dits, dels 11 alumnes que han fet servir aquesta estratègia, 2 s'han equivocat.

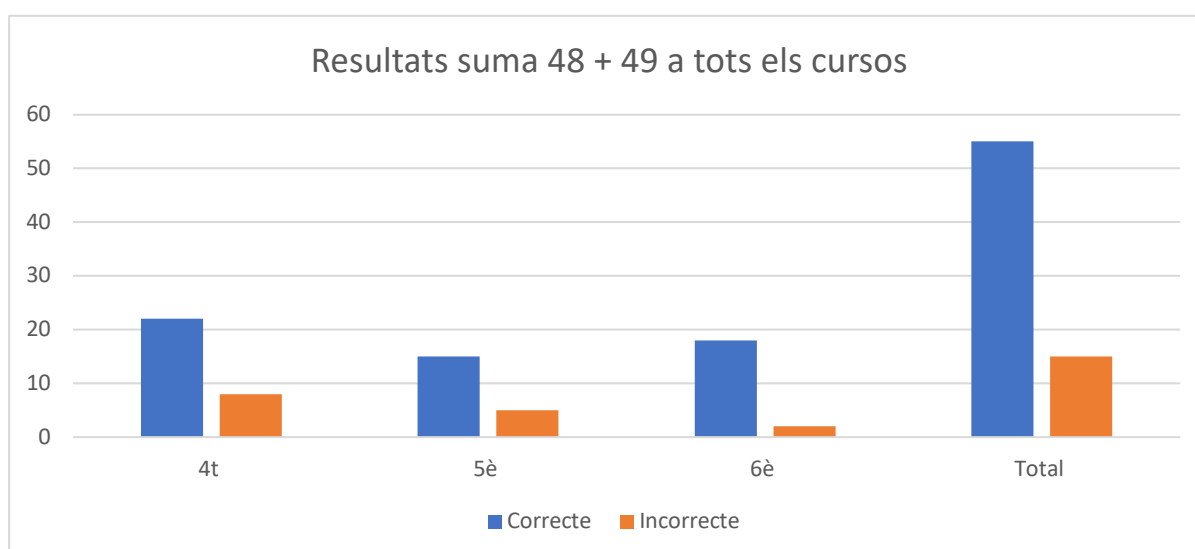
Els dos errors que han fet els alumnes són: no pensar amb la desena que es portava quan es suma 8 + 9 i equivocar-se quan es suma 8 + 9, dient que la solució és 18.



**Gràfic 19:** gràfic de barres per comparar els resultats segons cada estratègia per la suma 48 + 49 dels alumnes de 5è

#### 4.3.2.4. Anàlisi i resultats de la suma 48 + 49 a tots els cursos analitzats

Tal com mostra el gràfic 20, si agrupem tots els resultats obtinguts per la suma tenim els següents resultats: a 4t A hi ha el 73% d'alumnes que han resolt correctament l'operació, a 5è hi ha el 65% de respostes correctes i a 6è el 90% d'alumnes han resolt correctament la suma. En total hi ha 55 alumnes que han resolt correctament la suma i 15 que s'han equivocat.



**Gràfic 20:** gràfic de barres per comparar els resultats de la suma 48 + 49 a tots els cursos

A la taula 10 podem observar que hi ha un gran nombre d'alumnes que fan servir la suma tradicional per resoldre la suma  $48 + 49$ , a 4t hi ha un 53,3 % que han fet servir aquesta estratègia, a 5è el 35 % i a 6è el 55%. Per tant, podem dir que no es deixar d'utilitzar l'estratègia de suma tradicional a mesura que van passant els cursos, en aquesta suma.

La següent estratègia més utilitzada és la descomposició tenint en compte el valor posicional, seguida per l'estratègia de fer dobles.

Resoldre la suma  $48 + 49$  mitjançant l'estratègia de la suma tradicional no és la manera més fàcil per obtenir el resultat però així i tot ha estat l'estratègia més utilitzada. L'estratègia més idònia per resoldre aquesta suma és fer dobles i només hi ha hagut un 12,8% dels alumnes que l'han utilitzada.

| Estratègies   | 4t        | 5è      | 6è      | Total      |
|---|-----------|---------|---------|------------|
| Suma tradicional i dits                                 | 4 (13,3%) | 1 (5%)  | 2 (10%) | 7 (10%)    |
| Suma tradicional  | 12 (40%)  | 6 (30%) | 9 (45%) | 27 (38,5%) |
| Descomposició tenint en compte el valor posicional      | 8 (26,6%) | 4(20%)  | 4 (20%) | 16 (22,8%) |
| Descomposició sense tenir en compte el valor posicional | 2 (6,6%)  | 4 (20%) | 1 (5%)  | 7 (10%)    |
| Compensació   | 1 (3,3%)  | -       | 1 (5%)  | 2 (2,8%)   |
| Fer nombres de referència                               | -         | 1 (5%)  | -       | 1 (1,4%)   |
| Fer deus  | -         | 1 (5%)  | -       | 1 (1,4%)   |
| Fer dobles  | 3 (10%)   | 3 (15%) | 3 (15%) | 9 (12,8%)  |
| Altres  | -         | -       | -       | -          |

**Taula 10:** taula de % dels alumnes que utilitzen cada estratègia a tots els cursos per la suma  $48 + 49$

Tal com es mostra a la taula 11, hi ha quatre estratègies que han obtingut un 100% d'encerts, aquestes estratègies són: compensació, fer nombres de referència, fer deus i fer dobles.

L'estratègia de descomposició tenint en compte el valor posicional ha obtingut un 81,3 % de resultats correctes. En quan a l'estratègia de suma tradicional, amb o sense la utilització dels dits, hi ha un 80% d'encerts. En canvi, l'estratègia que ha obtingut els pitjors resultats és la descomposició sense tenir en compte el valor posicional ja que hi ha hagut un 42 ,9% dels alumnes que han resolt correctament la suma utilitzant aquesta estratègia.

Els errors que més s'han produït a tots els cursos són els següents:

- No pensaven que la suma és portant quan es realitza la suma amb l'estratègia de suma tradicional, en total hi ha hagut 4 alumnes que han fet aquest error.
- Sumar erròniament  $8 + 9$ , dient que el resultat és 18, 16 o 11. 5 alumnes han fet aquest error.



- No pensaven que quan sumaven  $8 + 9$  en portaven 1 i deixaven aquest 1 a les desenes i continuaven la suma, per tant, el resultat que obtenien era de tres xifres, dient que el resultat era 817 o 917. Hi ha hagut 4 alumnes que han fet aquesta errada.
- Girar el resultat, envers de dir 97, un alumne va dir 79.

| Estratègies   | Correcte   | Incorrecte |
|---|------------|------------|
| Suma tradicional i dits                                 | 4 (57,1%)  | 3 (42,9%)  |
| Suma tradicional  | 21 (77,8%) | 6 (22,2%)  |
| Descomposició tenint en compte el valor posicional      | 13 (81,3%) | 3 (18,7%)  |
| Descomposició sense tenir en compte el valor posicional | 3 (42,9%)  | 4 (57,1%)  |
| Compensació   | 2 (100%)   | -          |
| Fer nombres de referència                               | 1 (100%)   | -          |
| Fer deus  | 1 (100%)   | -          |
| Fer dobles  | 9 (100%)   | -          |
| Altres  | -          | -          |

**Taula 11:** taula amb el nombre d'encerts i errors de cada estratègia a tots els cursos per la suma  $48 +$

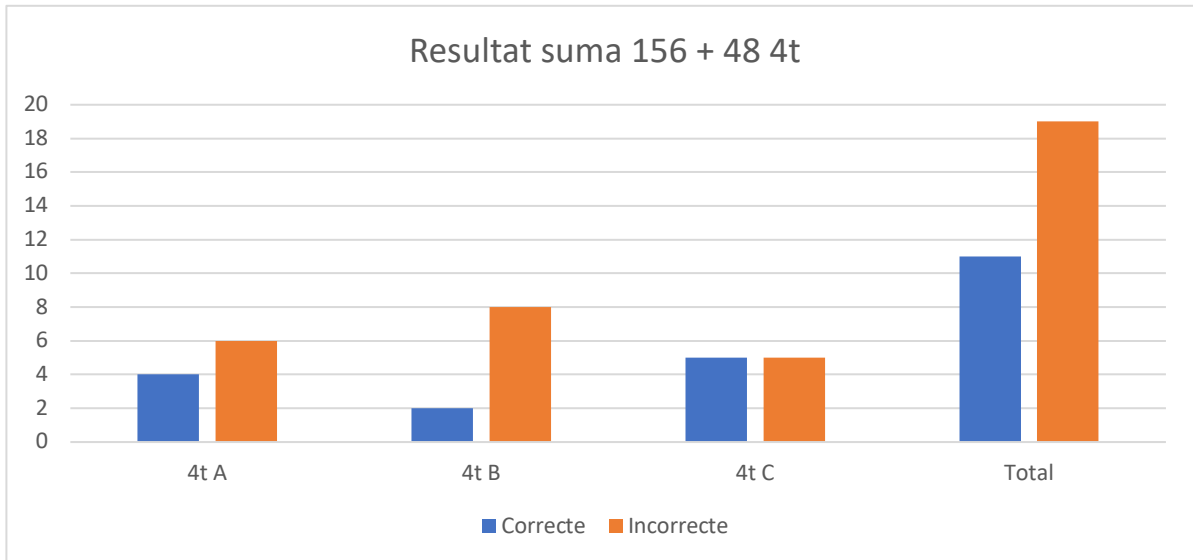
49

#### 4.3.3. Anàlisi i resultats de la suma $156 + 48$

A continuació, podem veure l'anàlisi i els resultats de la suma  $156 + 48$  organitzats en cursos i una comparació final on hi podem trobar els resultats agrupant tots els cursos.

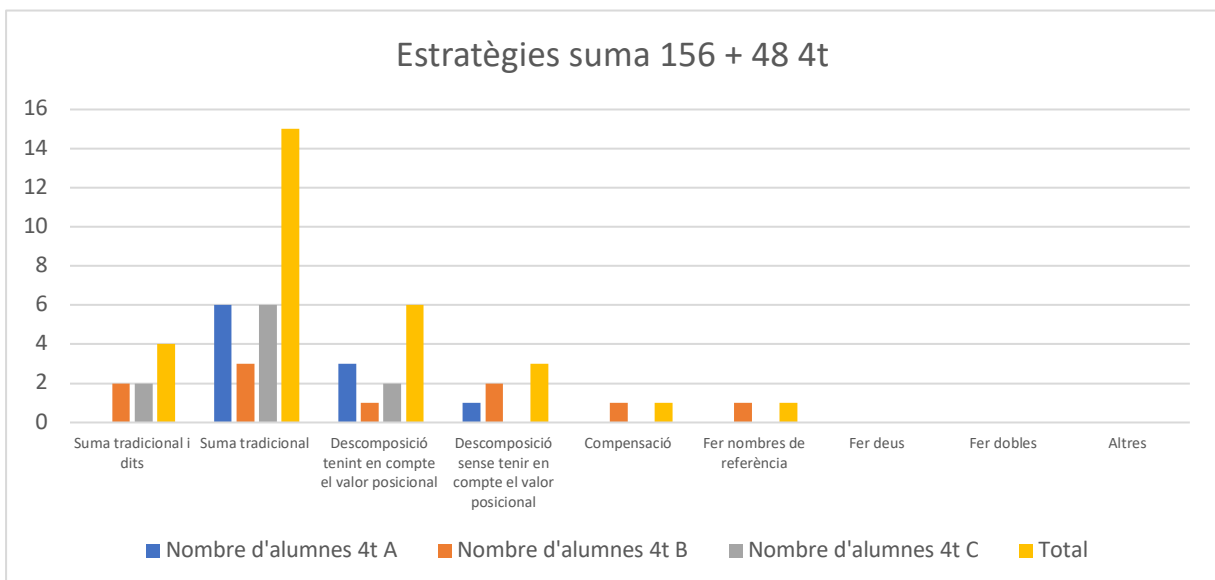
##### 4.3.3.1. Anàlisi i resultats de la suma $156 + 48$ a 4t

Com es pot observar al gràfic 21, hi ha pocs alumnes de 4t que han resolt correctament l'operació  $156 + 48$ . Al grup de 4t A hi ha 4 dels 10 alumnes que han resolt correctament la suma, a 4t B hi ha 2 alumnes que han resolt correctament l'operació i 8 alumnes que s'han equivocat i a 4t C hi ha 5 alumnes que han fet bé l'operació i 5 que ha resolt incorrectament l'operació. En total, hi ha hagut 11 alumnes que han resolt correctament la suma i 19 que l'han resolta incorrectament.



**Gràfic 21:** gràfic de barres dels resultat de la suma 156 + 48 dels alumnes de 4t

Pel que fa a les estratègies que han utilitzat els alumnes, podem veure al gràfic 22 que hi ha 19 alumnes de 30 que han fet servir la suma tradicional, ja sigui amb els dits o sense. L'altra estratègia més utilitzada és la descomposició tenint en compte el valor posicional ja que en total hi ha hagut 6 alumnes que l'han emprada. També podem observar que les estratègies de compensació i fer nombres de referència han estat utilitzades únicament per alumnes de 4t B.



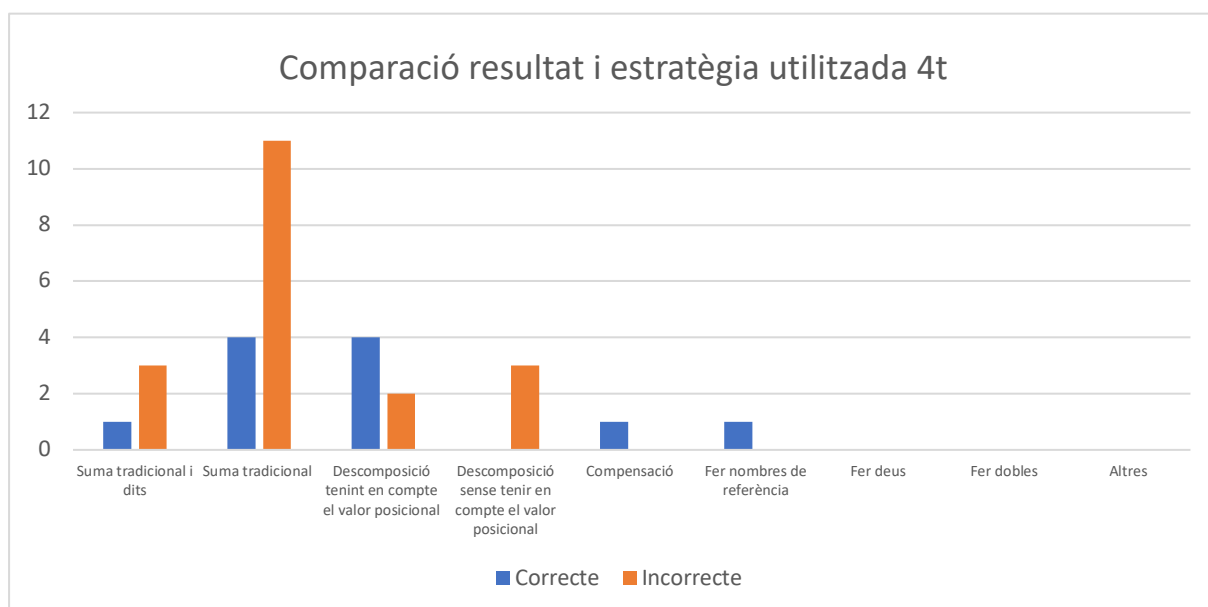
**Gràfic 22:** gràfic de barres de les estratègies utilitzades per resoldre la suma 156 + 48 dels alumnes de 4t

Tal com ens mostra el gràfic 23, les estratègies que han obtingut el 100 % d'encerts són la compensació i fer nombres de referència. En canvi podem observar que la descomposició sense tenir en compte el valor posicional ha obtingut un 100% de respostes incorrectes.

Els alumnes que han fet servir la suma tradicional, amb o sense la utilització dels dits, en aquesta suma, han obtingut una gran quantitat d'errors. Dels 19 alumnes que han fet servir aquesta estratègia, 13 s'han equivocat.

Pels resultats obtinguts, podem dir que els alumnes de 4t han tingut moltes dificultats per resoldre la suma  $156 + 48$ . Els errors més comuns han estat:

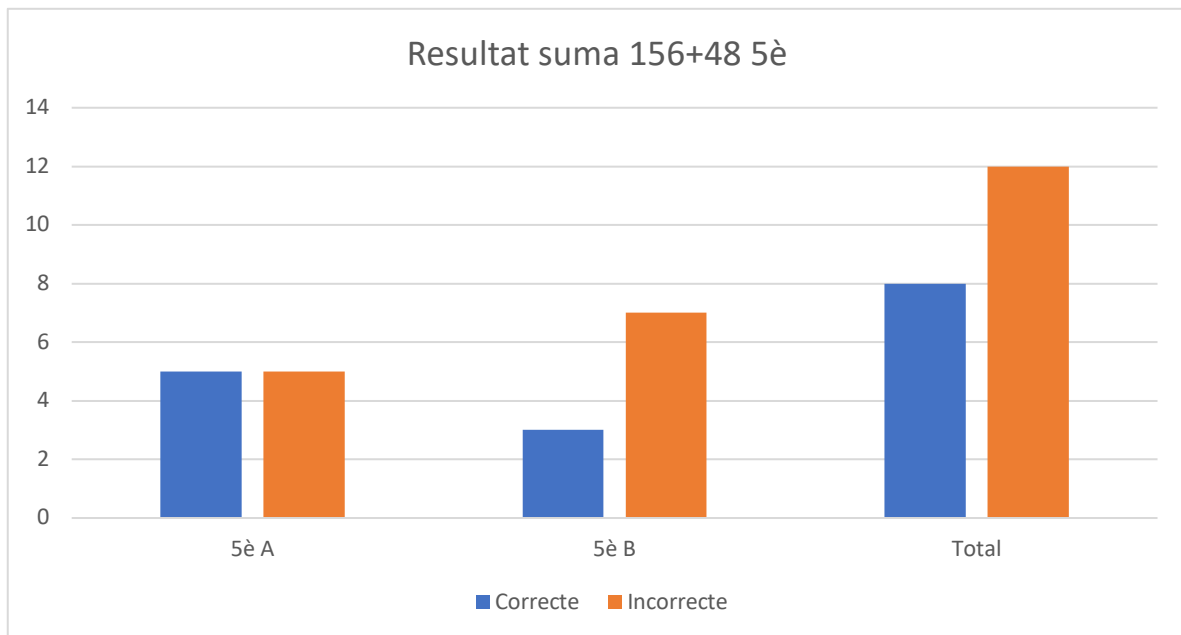
- Tenir dificultats amb els nombres que es porten quan s'utilitza l'estratègia de suma tradicional, en algunes ocasions s'han oblidat del que portaven o han considerat que el nombre que portaven formava part del resultat, donant de solució 1914.
- Equivocar-se quan es suma  $6 + 8$ , dient que la solució és 16, 18 o 12.



**Gràfic 23:** gràfic de barres per comparar els resultats segons cada estratègia per la suma  $156 + 48$  dels alumnes de 4t

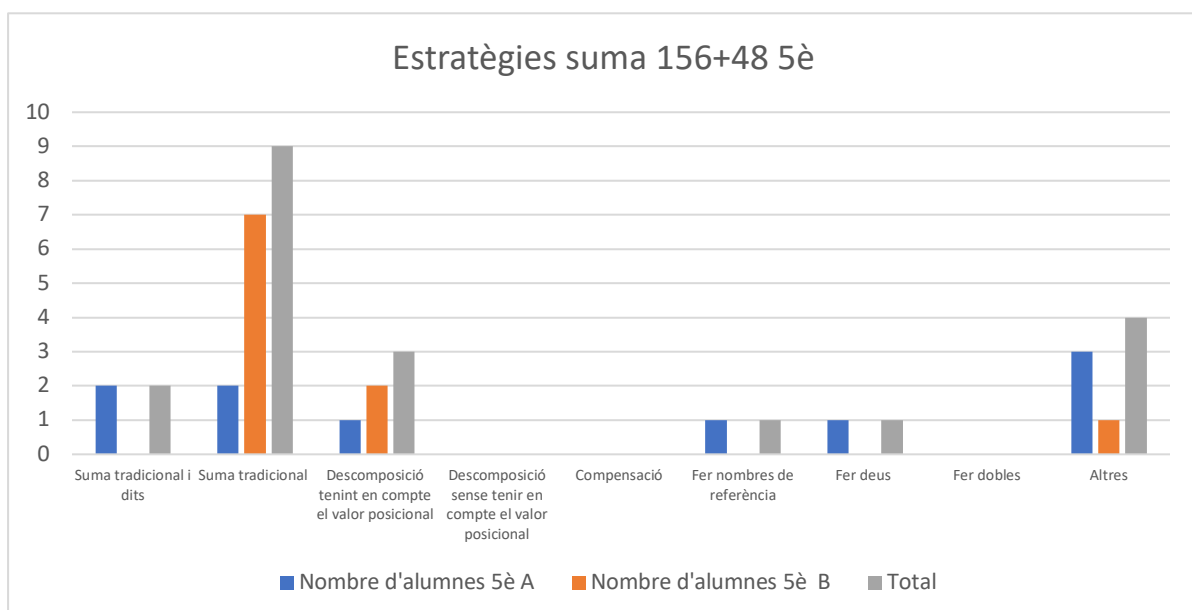
#### 4.3.3.2. Anàlisi i resultats de la suma $156 + 48$ a 5è

Al gràfic 24 podem veure que els resultats dels dos grups de 5è són els següents: 5 alumnes de 5è A i 3 alumnes de 5è B han resolt correctament. En total hi ha hagut 8 alumnes de 20 que han resolt correctament l'operació  $156 + 48$ .



**Gràfic 24:** gràfic de barres dels resultat de la suma 156 + 48 dels alumnes de 5è

Tal com ens mostra el gràfic 25, hi ha un gran nombre d'alumnes que han fet servir l'estratègia de suma tradicional per resoldre la suma. En total hi ha hagut 11 alumnes de 20 que han utilitzat aquesta estratègia. Però aquesta estratègia no ha estat utilitzada pel mateix nombre d'alumnes entre els dos grups, a 5è A hi ha hagut un total de 4 alumnes i a 5è B, 7 alumnes han utilitzat la suma tradicional. Fer nombres de referència i fer deus han estat emprades per 1 alumne de 5è A. També podem veure que en total hi ha hagut 4 alumnes que han fet servir una estratègia inventada per ells.



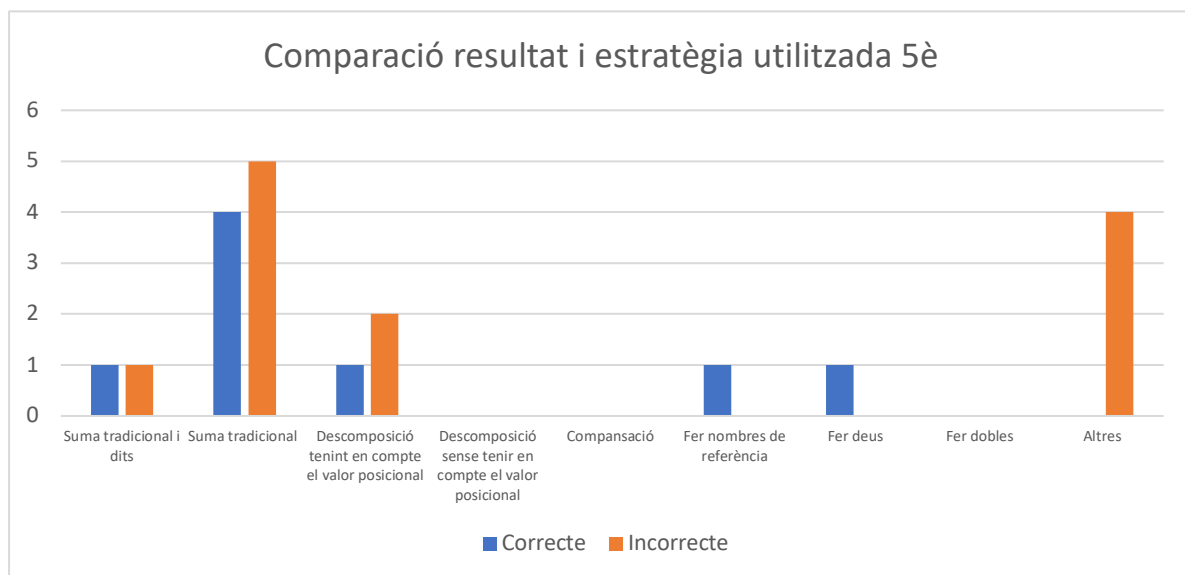
**Gràfic 25:** gràfic de barres de les estratègies utilitzades per resoldre las suma 156 + 48 pels alumnes de 5è

Tal com podem observar al gràfic 26, l'estratègia que menys respostes correctes ha obtingut és altres, ja que és una estratègia inventada pels propis alumnes per trobar la solució a la suma, aquesta estratègia ha obtingut 100% d'error. En canvi, les estratègies que millors resultats han obtingut són fer deus i fer nombres de referència, han obtingut el 100% de respostes correctes.

Les estratègies de suma tradicional i descomposició tenint en compte el valor posicional, en aquesta suma no han obtingut bons resultats. La suma tradicional ha obtingut un 45 % de respostes correctes i la descomposició un 33,3 % de respostes correctes.

Els errors dels alumnes de 5è han estat molt diversos, com per exemple:

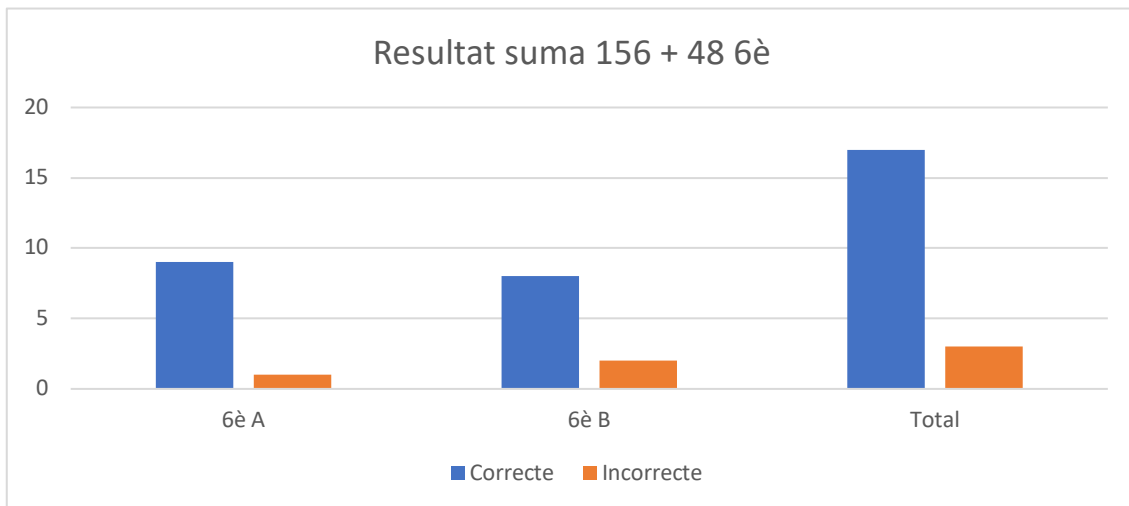
- Errors en sumar 6+8.
- Tenir dificultats en els nombres que es porten quan fan servir la suma tradicional.
- Han realitzat una resta en comptes de sumar.
- Altres errors de càlcul que no tenen lògica per desxifrar-los.
- Considerar que el nombre que portaven formava part del resultat, donant de solució 1105. En comptes de sumar l'1 que portaven a les centenes l'han deixat com a part del resultat.



**Gràfic 26:** gràfic de barres per comparar els resultats segons cada estratègia per la suma  $156 + 48$  dels alumnes de 5è

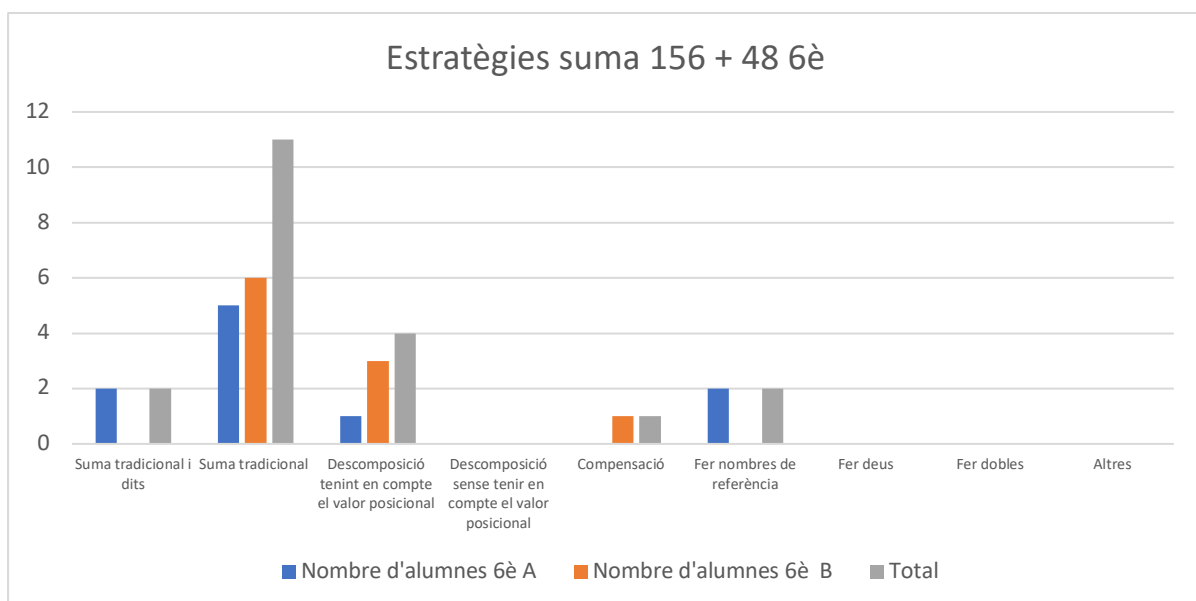
#### 4.3.3.3. Anàlisi i resultats de la suma $156 + 48$ a 6è

Els resultats de 6è, tal com ens indica el gràfic 27, per la suma  $156 + 48$  són els següents: a 6è A hi ha 9 alumnes i a 6è B hi ha 8 alumnes que han resolt correctament la suma. En total hi ha 17 alumnes de 20 que han resolt correctament l'operació.



**Gràfic 27:** gràfic de barres dels resultat de la suma 156 + 48 dels alumnes de 6è

Es pot observar al gràfic 28 que els alumnes de 6è han utilitzat diferents estratègies, però l'estratègia més utilitzada és la suma tradicional. En total hi ha hagut 13 alumnes de 20 que l'han feta servir. Les estratègies de compensació i fer nombres de referència han estat poc utilitzades, en total 3 alumnes han emprat aquestes estratègies.



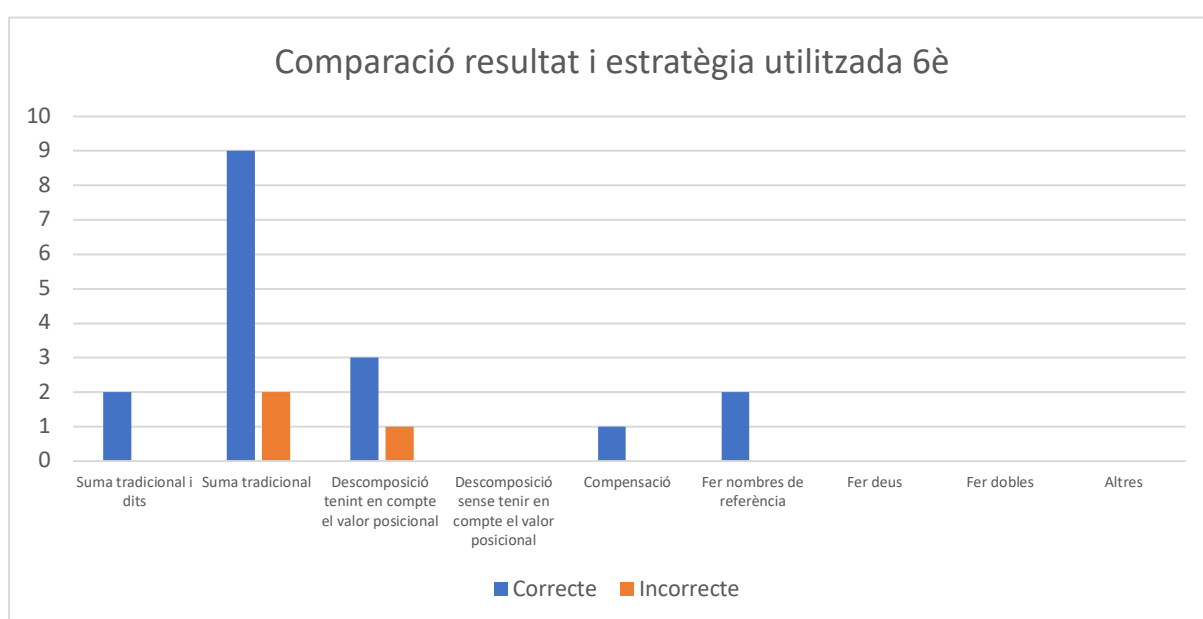
**Gràfic 28:** gràfic de barres de les estratègies utilitzades per resoldre las suma 156 + 48 pels alumnes de 6è

Al gràfic 29 podem observar que les estratègies de compensació i fer nombres de referència han obtingut el 100% d'encerts ja que els alumnes que les han utilitzades no s'han equivocat en la resolució de la suma. Dos dels 13 alumnes que han fet servir l'estratègia de suma

tradicional s'han equivocat. Dels 4 alumnes que han utilitzat l'estratègia de descomposició, 1 ha resolt incorrectament la suma.

Els errors que han fet els alumnes són:

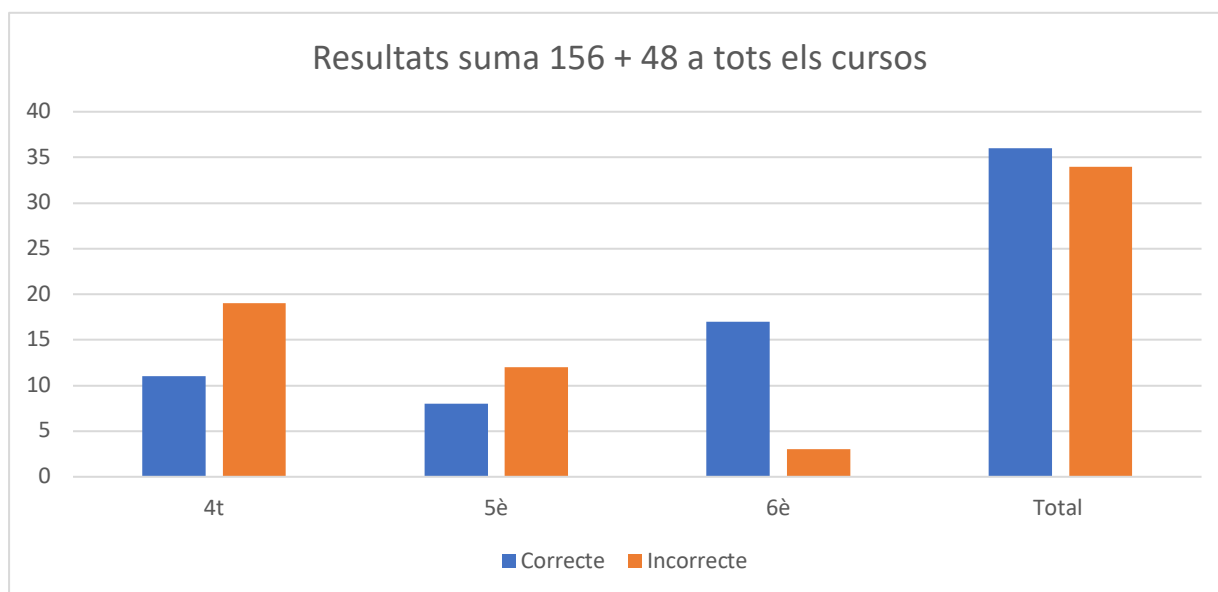
- Els errors que feren els alumnes quan resolien l'operació amb l'estratègia de la suma tradicional foren: problemes en sumar  $8 + 6$  i un alumne va girar el resultat, envers de dir 204 com ha resultat va dir 240.
- L'error que va tenir l'alumne que va emprar la descomposició, va sumar malament  $150 + 40$ , dient que eren 200.



**Gràfic 29:** gràfic de barres per comparar els resultats segons cada estratègia per la suma  $156 + 48$  dels alumnes de 6è

#### 4.3.3.4. Anàlisi i resultats de la suma $156 + 48$ a tots els cursos analitzats

El gràfic 30 ens mostra la comparació de tots els resultats correctes als diferents cursos i tenim els següents resultats: a 4t hi ha un 36,6% de respostes correctes, a 5è el 40 % dels alumnes ha resolt correctament la suma i a 6è el 85% dels alumnes han resolt correctament l'operació. En total hi ha 36 alumnes que han resolt correctament la suma i 34 que s'han equivocat.



**Gràfic 30:** gràfic de barres per comparar els resultats de la suma 156 + 48 a tots els cursos

Tal com ens mostra la taula 12, l'estratègia de suma tradicional, tant si els alumnes fan servir els dit com no, és l'estratègia més utilitzada, en total hi ha 61, 4% d'alumnes que l'han fet servir. L'altra estratègia més utilitzada és la descomposició tenint en compte el valor posicional, el 18,5 % dels alumnes l'han utilitzada.

Les altres estratègies han estat molt poc utilitzades, no arriben al 10%.

| Estratègies   | 4t        | 5è      | 6è       | Total      |
|---|-----------|---------|----------|------------|
| Suma tradicional i dits                                 | 4 (13,3%) | 2 (10%) | 2 (10%)  | 8 (11,4%)  |
| Suma tradicional  | 15 (50%)  | 9 (45%) | 11 (55%) | 35 (50%)   |
| Descomposició tenint en compte el valor posicional      | 6 (20%)   | 3 (15%) | 4 (20%)  | 13 (18,5%) |
| Descomposició sense tenir en compte el valor posicional | 3 (10%)   | -       | -        | 3 (4,3%)   |
| Compensació   | 1 (3,3%)  | -       | 1 (5%)   | 2 (2,8%)   |
| Fer nombres de referència                               | 1 (3,3%)  | 1 (5%)  | 2 (10%)  | 4 (5,7%)   |
| Fer deus  | -         | 1 (5%)  | -        | 1 (1,4%)   |
| Fer dobles  | -         | -       | -        | -          |
| Altres  | -         | 4 (20%) | -        | 4 (5,7%)   |

**Taula 12:** taula de % dels alumnes que utilitzen cada estratègia a tots els cursos per la suma 156 +

48

Com podem veure a la taula 13, les estratègies que han obtingut millors resultats són la compensació, fer deus i fer nombres de referència ja que tots els alumnes que feren servir aquestes estratègies per resoldre la suma ho feren correctament. En canvi, les estratègies de descomposició sense tenir en compte del valor posicional i altres han obtingut el 100% de respostes incorrectes. També podem observar que amb l'estratègia de suma tradicional quasi



el 50 % dels alumnes que l'han feta servir, han resultat correctament la suma. Pel que fa a l'estratègia de descomposició tenint en compte el valor posicional, el 61% dels resultats han estat correctes.

Els errors més freqüents a tots els cursos per aquesta suma són:

- Equivocar-se quan es suma  $6 + 8$ , dient que la solució és 16, 15, 18 o 12. En total hi ha hagut 11 alumnes que han fet aquest error.
- Tenir dificultats en els nombres que es porten quan fan servir la suma tradicional. 16 alumnes han tingut aquest error. Per exemple: algunes han dit que el resultat era 194, 204 o 104.
- Altres errors de càlcul que no tenen lògica per desxifrar-los. Hi ha molts d'alumnes que han dit resultats que no tenen sentit, com per exemple: 249, 140, 170, 164, 148, entre altres.
- Alumnes han considerat que el nombre que portaven formava part del resultat, donant de solució 1105 i 1914.

| Estratègies   | Correcte   | Incorrecte |
|---|------------|------------|
| Suma tradicional i dits                                 | 4 (50%)    | 4 (50%)    |
| Suma tradicional  | 17 (48,6%) | 18 (51,4%) |
| Descomposició tenint en compte el valor posicional      | 8 (61,5%)  | 5 (38,5%)  |
| Descomposició sense tenir en compte el valor posicional | -          | 3 (100%)   |
| Compensació   | 2 (100%)   | -          |
| Fer nombres de referència                               | 4 (100%)   | -          |
| Fer deus  | 1 (100%)   | -          |
| Fer dobles  | -          | -          |
| Altres  | -          | 4 (100%)   |

**Taula 13:** taula amb el nombre d'encerts i errors de cada estratègia a tots els cursos per la suma  $156$

## 5. Conclusions

En aquest apartat es donarà resposta a la pregunta de recerca i als objectius plantejats per a aquest TFM a partir de les conclusions extretes dels resultats.

### 5.1. Conclusions per l'objectiu 1

En aquest subapartat es presenten les conclusions que fan referència a l'objectiu 1: "Analitzar les estratègies que utilitzen els alumnes de 4t, 5è i 6è per fer les sumes", es pot dir que s'ha estudiat a partir dels qüestionaris de sumes realitzades pels alumnes i les conclusions que s'han extret són les següents:

#### ***La majoria dels alumnes utilitzen l'algoritme tradicional per resoldre les sumes.***

Com es pot veure als resultats, un gran nombre d'alumnes han fet servir l'estratègia de suma tradicional per resoldre les sumes. Més del 50% dels alumnes han fet servir l'estratègia de suma tradicional per resoldre cada una de les sumes. El fet que hi hagi tants d'alumnes que utilitzin l'algoritme tradicional i que més de la meitat dels alumnes no hagin adquirit o no es sentin segurs per utilitzar estratègies per resoldre sumes mentalment, significa que l'algoritme tradicional està molt present en l'ensenyament de les matemàtiques i que l'ensenyament de les altres estratègies és molt pobre. Una gran part dels alumnes que fan servir l'algoritme tradicional resolen correctament la suma, això ens fa pensar que els alumnes realment tenen un bon domini de l'algoritme tradicional.

Encara que la suma tradicional sigui l'estratègia més utilitzada, no vol dir que sigui l'estratègia que faciliti la resolució de la suma. Per exemple, en el cas de la suma  $48 + 49$ , hi ha hagut un gran nombre d'alumnes que ha utilitzat l'algoritme tradicional però en realitat, les estratègies més idònies per resoldre aquesta suma serien: fer dobles, ja que els alumnes podrien fer  $(49 + 49) - 1$ , compensació  $(49 + 1) + (48 - 1)$  i fer nombres de referència resolent  $(50 + 48) - 1$ .

Un altre fet que cal destacar és l'increment de la utilització de l'algoritme tradicional quan la suma presenta més dificultats per ser resolta, per exemple: la suma  $156 + 48$  presenta més dificultats per ser resolta ja que el 156 és un nombre de tres xifres i és una suma duent. Amb aquesta suma, el 61% de l'alumnat la va resoldre mitjançant l'algoritme tradicional. Aquest fet confirma que la majoria dels alumnes no han adquirit estratègies de càlcul mental per tal de facilitar la resolució de sumes mentalment. A més, quan més difícil és una suma i es resol mitjançant l'algoritme tradicional, els alumnes tendeixen a fer més errors ja que han de prestar molta atenció amb els que porten i és molt fàcil equivocar-se.

***Les estratègies de descomposició segons el valor posicional, descomposició sense tenir en compte el valor posicional, fer nombres de referència, fer deus, fer dobles i compensació són utilitzades desigualment.***

Les altres estratègies de càlcul mental analitzades a aquest estudi són utilitzades de forma desigual ja que la majoria dels alumnes que fan servir una estratègia, han utilitzat la descomposició segons el valor posicional i les altres estratègies han estat molt poc utilitzades.

L'estratègia de descomposició segons el valor posicional és la més utilitzada ja que els alumnes durant la seva escolarització han treballat la descomposició dels nombres i per tant, no presenten dificultats alhora d'utilitzar aquesta estratègia. A més, molts d'alumnes que l'han feta servir, han resolt correctament la suma.

L'estratègia de descomposició sense tenir en compte el valor posicional és la següent estratègia més utilitzada i a més és l'estratègia que ha obtingut més respostes incorrectes. Si tenim en compte les tres sumes, aquesta estratègia ha estat utilitzada 14 vegades i de les quals en 11 ocasions els resultats han estat incorrectes. El fet que els alumnes tinguin tants d'errors amb aquesta estratègia és per la pèrdua del sentit numèric ja que els alumnes no tenen en compte quin valor té cada xifra.

Tal com afirmen Kamii i Domnick (2010), quan els alumnes dominen la utilització de l'algoritme tradicional els perjudica ja que no s'ensenya el valor posicional dels dígitos i això fa que no tinguin sentit numèric.

Les estratègies de compensació, fer nombres de referència, fer deus i fer dobles han estat emprades per molt pocs alumnes. Però cal destacar que tots els alumnes que han fet servir aquestes estratègies han resolt correctament les sumes. Aquest fet, tal com explica Parrish (2010), ens demostra que els alumnes que utilitzen estratègies de càlcul mental adquireixen més eficàcia per resoldre els càlculs ja que les estratègies ajuden a millorar la comprensió dels nombres en relació al seu lloc posicional, tenen més sentit numèric i s'evita haver de memoritzar procediments per la resolució d'operacions. Per aquest motiu, els docents haurien de tenir consciència de la importància d'ensenyar estratègies de càlcul mental als seus alumnes ja que beneficia l'adquisició de la competència matemàtica i s'haurien de replantejar-se l'ensenyament de l'algoritme tradicional, tal com diu Bracho-López (2013) l'ensenyament dels algorismes tradicionals tenen poc sentit pedagògic i no ajuden a l'adquisició del sentit numèric.

En definitiva, els alumnes de 4t, 5è i 6è utilitzen de forma abusiva l'algoritme tradicional. Per aquest motiu, necessiten practicar més les estratègies de càlcul mental per poder-les aplicar per resoldre les sumes i sentir-se segurs, igual que quan resolen una suma mitjançant l'algoritme tradicional.

## **5.2. Conclusions per l'objectiu 2**

En aquest subapartat es presenten les conclusions que fan referència a l'objectiu 2: "Comparar i analitzar els resultats de càlcul mental dels alumnes de 4t a 6è d'educació primària", aquest objectiu s'ha estudiat a partir de l'anàlisi del qüestionari de sumes que van realitzar els alumnes. Les conclusions a les que s'han arribat són:

### ***L'algoritme tradicional es troba molt present a tots els cursos.***

Si observem els resultats, podem dir que a tots els cursos, sense excepció, l'estratègia que més s'ha utilitzat és la suma tradicional. Però cal destacar que els alumnes de 5è són els alumnes que menys utilitzen l'algoritme tradicional. Això ens fa veure, que tots els alumnes tenen molt interioritzat l'algoritme tradicional i que a mesura que van passant els cursos aquesta tendència continua. Durant l'escolarització d'aquests alumnes, s'ha donat molta importància a l'aprenentatge de l'algoritme tradicional i s'ha deixat en un segon pla l'ensenyament d'estratègies de càlcul mental.

Seria més lògic que els alumnes a mesura que passen els anys abandonessin la utilització de l'algoritme tradicional ja que, en teoria, haurien d'haver adquirit més domini en la resolució d'operacions i més sentit numèric.

El fet que tots els alumnes de 4t a 6è utilitzin tant l'algoritme tradicional, segons Ortega i Ortiz (2002), és perquè aquests alumnes no han après estratègies de càlcul mental des del primer curs d'educació primària i si no es treballa constantment hi ha retrocés en el domini de les estratègies de càlcul mental. Per aquests motius, tots aquests alumnes han fet servir molt l'algoritme tradicional i no hi ha diferències significatives entre els alumnes dels diferents cursos. Però els alumnes de 5è A són els que utilitzen menys l'algoritme tradicional perquè la seva mestra ha potenciat l'ensenyament de les estratègies de càlcul mental.

### ***Tots els alumnes fan la mateixa tipologia d'errors.***

Un fet que s'ha anat repetint al llarg de totes les sumes i de tots els cursos són els errors bàsics de càlcul com pugui ser:

- sumar dos nombres menors a deu erròniament, com pugui ser sumar  $8 + 9$  i equivocar-se amb el resultat dient que la solució és 16 o 18, en comptes de 17.

- no pensar amb els nombres que es porten quan empren l'algoritme tradicional, per exemple: sumaven  $78 + 35$  i deien que el resultat final era 103. Quan es sumava  $5 + 8$ , el resultat era 13 i per tant, en portaven un que s'havia de sumar a  $7 + 3$ . Però els alumnes en algunes ocasions no pensaven amb la xifra que portaven.
- posar el nombre que es porta al resultat obtenint un resultat il·lògic. Per exemple, els alumnes quan sumaven  $48 + 49$  deien que el resultat final era 817. La xifra 1 era el nombre que es portava però el deixaven al resultat final i no el sumaven a  $4 + 4$ .

Kamii i Domnick (2010) ens expliquen perquè ocorren aquests errors quan els alumnes utilitzen l'algoritme tradicional. Això ocorre perquè els alumnes s'obliden dels procediments per resoldre les operacions mitjançant l'algoritme tradicional i ells inventen els seus propis procediments. A més, l'ensenyament dels algorismes no és lògic i per tant, els alumnes fan errors que no tenen sentit i ells no se'n adonen ja que no fan servir el pensament lògic. A més, els alumnes quan utilitzen l'algoritme tradicional no adquireixen sentit numèric. Això succeeix quan els alumnes per exemple de la suma  $48 + 49$  diuen que el resultat final és 817, aquest resultat no és lògic ja que sumar dos nombres inferiors a 50 no poden donar una solució major a 100. Aquest fet demostra que els alumnes que fan aquests errors no tenen sentit numèric.

***Els alumnes de 6è són els que donen més respostes correctes.***

Si es miren els resultats, els alumnes de 6è han obtingut molt bons resultats ja que són els alumnes que més respostes correctes han donat.

Però hi ha algunes dades que són curioses, per exemple: a la suma  $78 + 35$ , els alumnes de 6è varen obtenir el 60 % de respostes correctes i en canvi, els alumnes de 4t van obtenir el 80% de respostes correctes. Aquest fet possiblement sigui perquè aquesta suma no tingui moltes dificultats per ser resolta i els alumnes de 6è es confiaren i varen fer errades. En canvi, per la suma  $156 + 48$ , la diferència de respostes correctes és molt notable, el 85% dels alumnes de 6è respongueren correctament a aquesta suma i en canvi, els alumnes de 4t varen tenir dificultats per resoldre la suma ja que només hi va haver el 36,6% dels alumnes que resolgueren correctament l'operació. Per tant, podem dir que els alumnes de 6è quan es troben amb una suma amb més dificultats treuen millors resultats que els alumnes de 4t.

Un altre fet curiós és el que passa entre els alumnes de 4t i 5è. Els alumnes de 4t han obtingut millors resultats a les sumes  $78 + 35$  i  $48 + 49$  que els alumnes de 5è. El possible motiu d'aquest succés podria ser el següent: la majoria d'alumnes de 5è que s'han equivocat, havien

utilitzat l'algoritme tradicional, això fa pensar que l'algoritme tradicional ja no es practiqui tant a aquest curs i quan els alumnes l'han fet servir han tingut dificultats. En canvi, els alumnes de 4t han obtingut menys resultats incorrectes quan es feia servir l'algoritme tradicional.

***A mesura que avancen els cursos, els alumnes utilitzen menys els dits per resoldre les sumes.***

Un fet que diferencia als alumnes dels diferents cursos és la utilització dels dits com a ajuda per fer els càlculs. Es pot veure que a mesura que avancen els cursos, els alumnes deixen d'utilitzar aquest recurs per fer les operacions. Això es deu a que els alumnes de 5è i 6è ja tenen més interioritzats els resultats quan sumen dos nombres d'una xifra i no els fa falta haver de contar amb els dits. Parrish (2010) explica que s'ha de vigilar als alumnes que no utilitzin en excés els dits com a eina per fer càlcul bàsics i que utilitzin altres estratègies. Per aquest motiu s'hauria de tenir en compte que hi ha un nombre considerable dels alumnes que utilitzen els dits per facilitar la resolució de les sumes però és positiu que a mesura que van avançant de curs l'alumnat deixa de banda aquesta suport.

### **5.3. Conclusions per l'objectiu 3**

En aquest subapartat es presenten les conclusions que fan referència a l'objectiu 3: "Analitzar la metodologia del mestre alhora d'ensenyar càlcul mental", aquest objectiu s'ha pogut estudiar a partir de les observacions a les sessions de càlcul mental i a partir de les entrevistes a les mestres de matemàtiques. Les conclusions a les quals s'han arribat són les següents:

***La metodologia per treballar càlcul mental és tradicional***

Després d'haver observat diverses classes de càlcul mental, en general, es pot dir que la metodologia d'ensenyament del càlcul mental és tradicional. L'ensenyament és tradicional perquè en algunes ocasions els alumnes no tenen l'oportunitat de fer explicacions de com han realitzat els càlculs, només es té en compte els resultats, s'utilitzen pocs materials manipulables pel seu ensenyament i no s'ensenyen les estratègies de càlcul mental. Per l'ensenyament de les estratègies de càlcul mental, tal com expliquen Ortega i Ortiz (2002, a), és necessari que les estratègies de càlcul mental siguin descobertes pels propis alumnes. Perquè això sigui possible, el mestre ha de tenir enginy perquè l'alumnat descobreixi les regles i procediments mentals més útils i ràpids, sempre respectant l'originalitat dels experiments personals.

A més, durant les sessions de càlcul mental que vaig observar, en la majoria d'elles, hi havia alumnes que es frustraven ja que no eren capaços de realitzar els càlculs amb el temps que es donava, els càlculs no eren assequibles per tots els alumnes i alguns d'aquests alumnes ja no feien els càlculs perquè no es veien capaços de solucionar-los. En quan a aquest aspecte observat, Ortega i Ortiz (2002, a), afirmen que els exercicis que es presenten de càlcul mental han de ser progressius i han d'estar relacionats amb el nivell de coneixement de l'alumne. També afirmen que l'èxit no va lligat a la rapidesa de la contestació, ja que els estudiants més lents o els que cometien més errors, estiguin desanimats i per tant perden l'interès.

Les possibles raons per les quals es continua fent el càlcul mental de manera tradicional, tal com explica Bracho-López (2013), són les següents:

- La tendència natural a reproduir models metodològics que hem viscut com a estudiant i que es faran servir com a docents.
- La pressió professional, social i familiar que empeny a seguir calculant com s'ha fet sempre.
- La falta d'iniciatives de formació del professorat.
- L'escassetat de models metodològics i de materials didàctics assequibles al professorat.

Crec que les causes que explica Bracho-López són les raons per les quals la majoria de les mestres continuen treballant el càlcul mental de forma tradicional. La majoria de les mestres fa molts d'anys que són mestres i continuen emprant la mateixa metodologia que utilitzaven quan començaren a impartir classes perquè tenen tendència a reproduir els models didàctics que estan més còmodes a utilitzar i perquè els falta formació en noves metodologies d'ensenyament del càlcul mental i en materials destinats al seu ensenyament.

### ***El càlcul mental té poc pes en l'ensenyament de les matemàtiques***

Les mestres dediquen grans esforços a l'ensenyament dels algoritmes tradicionals de forma escrita i l'ensenyament del càlcul mental es deixa de banda, però s'ha estudiat que els algoritmes tradicionals poden ser perjudicials pels alumnes, tal com afirmen Kamii i Domnick (2010) i Bracho-López (2013), explicats anteriorment.

El càlcul mental, pel que hem pogut comprovar, té un paper secundari dins l'ensenyament de les matemàtiques i les mestres no són conscients dels beneficis que pot aportar el càlcul mental als alumnes. Tal com afirmen diversos autors citats al marc teòric com Gómez (1994), citat per Ortega i Ortiz (2002,a), (Lethielleux, 2005, p. 17-18), citat a l'article de Gálvex, Cosmelli, Cubillos, Leger, Mena et al. (2011) i Sellas, Vila, Jurado i Esteve (2016), expliquen

que el càlcul mental proporciona beneficis als alumnes, com puguin ser: conèixer les concepcions que tenen els alumnes sobre els procediments de càlcul, el càlcul mental és un mitjà molt adequat per afavorir el desenvolupament de l'atenció, concentració i memòria dels alumnes, aprendre càlcul mental de forma raonada ajuda a desenvolupar el sentit numèric, és a dir, a comprendre els nombres, les seves relacions, l'efecte dels nombres en les operacions i l'estimació.

Depenent dels diversos grups, el càlcul mental es treballa una vegada per setmana durant una sessió o una vegada cada dues setmanes. El temps que es dedica al càlcul mental és insuficient ja que per l'adquisició de les estratègies de càlcul mental, els alumnes necessiten de molta pràctica i ha de ser un treball constant i diari. Tal com afirmen Ortega i Ortiz (2002,a), les sessions de càlcul mental han de ser breus, variades, han de durar uns 10 minuts al dia i s'han de fer aquestes sessions tots els dies de la setmana. Les sessions de càlcul mental no poden ser massa llargues ja que es necessari concentració i tensió, com que cansa ràpidament als alumnes, si es treballa durant molt de temps seguit, l'atenció disminueix i els resultats empitjoren. Parrish (2010), afirma que les sessions han de ser continuades per adquirir les estratègies de càlcul mental.

#### **5.4. Conclusions per l'objectiu 4**

En aquest subapartat es presenten les conclusions que fan referència a l'objectiu 4: "Contrastar els resultats de càlcul mental dels alumnes amb la metodologia que emprava el docent per ensenyar càlcul mental", aquest objectiu s'ha pogut estudiar a partir de les observacions a les sessions de càlcul mental, de les entrevistes a les mestres de matemàtiques i amb l'anàlisi dels resultats obtinguts als qüestionari de sumes. Les conclusions a les quals s'han arribat són les següents:

##### ***Hi ha relació entre la metodologia emprada i els resultats dels alumnes***

Com s'ha dit anteriorment, la metodologia emprada per la majoria de les mestres és tradicional com a conseqüència d'aquests fet, més de la meitat dels alumnes, com hem pogut comprovar als resultats, utilitzen l'algoritme tradicional per resoldre les sumes mentalment.

Cal destacar que als grups de 4t A i C, durant les sessions els alumnes no tenien l'opció de comunicar procediments pels quals resolien els càlculs mentalment. A la sessió de 4t A que vaig observar, els alumnes realitzaren dues fotocòpies del quinzet, 60 operacions de multiplicacions i 60 operacions de divisions, en cap moment els alumnes pogueren comunicar com havien realitzat les operacions i només es comentaren els resultats. A 4t C, els alumnes varen realitzar problemes i la resolució d'aquests la feien mentalment, però quan es feia la



correcció els alumnes no tenien opció a participar i la mestra només deia la solució dels problemes.

Aquest fet pot ser sigui el causant pel qual els alumnes d'aquests cursos no hagin emprat les estratègies de compensació, fer nombres de referència, fer deus i fer dobles per resoldre les sumes del qüestionari. A més, els alumnes de 4t C són els que han utilitzat més l'algoritme tradicional per resoldre les sumes. Dels 30 càlculs que van resoldre aquests alumnes, 22 càlculs van ser resolts emprant l'algoritme tradicional.

En canvi, els alumnes de 5è A són els alumnes que menys han utilitzat l'algoritme tradicional per resoldre les sumes. Dels 30 càlculs que van resoldre aquests alumnes, 11 càlculs van ser resolts mitjançant l'algoritme tradicional. A la sessió de càlcul mental que vaig observar de 5è A, la mestra donava molta importància a les explicacions que realitzaven els alumnes dels procediments de resolució dels problemes i s'invertia molt de temps en explicar altres maneres per resoldre els problemes.

Per aquest motiu es pot dir, que la metodologia emprada pel mestre té efectes en els resultats dels seus alumnes ja que si els docents donen importància a la utilització d'estratègies, els seus alumnes també n'hi donaran. Cal afegir que la comunicació és bàsica per adquirir coneixements matemàtics, tal com expliquen Sellas, Vila, Jurado i Esteve (2016) "és bàsic seguir una metodologia que potencii la comunicació d'idees matemàtiques, el raonament i que respecti les idees de tots els nens i nenes. D'aquesta manera s'obtindrà una cultura social d'aula adequada i es podrà atendre a la diversitat d'alumnat".

S'ha trobat a faltar veure com els mestres explicaven estratègies de càlcul mental. Tal com expliquen Kamii i Dominick (2010) la millor forma per treballar les estratègies seria que els propis alumnes descobrissin les estratègies i els mestres haurien d'utilitzar l'enginy perquè això sigui possible.

Parrish (2010) afirma que quan es fan les sessions de càlcul mental, ens hem d'assegurar que tots els alumnes siguin mentalment participatius i puguin accedir a les estratègies proposades. Perquè això sigui possible es poden seguir diversos camins: demanar als estudiants quines són les estratègies més eficients per resoldre un determinat càlcul, dur a terme un registre dels càlculs plantejats i de les estratègies utilitzades pels estudiants, fer grups petits durant cada setmana per poder fer converses matemàtiques, crear i penjar a la classe cartells que contenguin les estratègies, és necessari que els estudiants resolguin un càlcul mitjançant l'estratègia comentada i fer una avaluació setmanal dels càlculs.

## 6. Limitacions de la recerca, perspectives de futur i implicacions educatives

En aquest apartat trobarem les limitacions que presenta el TFM, quines perspectives de futur hi ha per aquest estudi i quines implicacions educatives presenta.

### - Limitacions

El fet de tenir una quantitat tan gran de dades per la realització de l'estudi, ha provocat que hi hagués algunes limitacions ja que s'hagués pogut fer un estudi més exhaustiu dels següents punts, com per exemple:

- S'hagués pogut estudiar si el nivell en matemàtiques pot influir en la utilització d'estratègies de càlcul mental i si tenir un nivell més alt en matemàtiques és sinònim de treure bons resultats en càlcul mental. L'elecció dels alumnes es va fer tenint en compte el seu nivell en matemàtiques perquè la mostra fos heterogènia. El fet de saber el nivell en matemàtiques de cada alumne i els resultats que va obtenir cada un, permetia fer un estudi en més detall. Però l'objectiu principal d'aquest treball era saber quines diferències hi havia entre els alumnes del segon cicle d'educació primària i com influenciava la metodologia utilitzada per les mestres en els resultats.
- La mostra de l'estudi hagués pogut ser major ja que només es va passar el qüestionari de sumes a 10 alumnes de cada grup (4t A, B i C, 5è A i B i 6è A i B). També hagués estat interessant fer l'estudi als alumnes del primer cicle per fer una major comparació en el domini del càlcul mental.
- L'estudi del domini del càlcul mental només es va fer a partir de sumes, però quan vaig realitzar els qüestionaris als alumnes també hi havia restes. Els resultats de les restes no varen ser analitzats ja que la quantitat de dades era massa elevada. Hagués estat molt bé poder fer l'anàlisi de les restes per veure quin domini tenen els alumnes amb aquesta operació i per contrastar els resultats de les restes amb els de les sumes.
- Quan es va passar el qüestionari als alumnes, els demanava si sabien resoldre l'operació d'una altra manera i alguns dels alumnes ho varen saber fer. Però quan es varen analitzar les dades, només es va tenir en compte la primera explicació que havien donat. Es va fer d'aquesta perquè hi hauria hagut un gran volum de dades i hagués dificultat fer-ne l'anàlisi.

### - **Perspectives de futur**

Aquest treball podria tenir continuïtat, es podria estudiar com van avançant els alumnes del primer cicle de la mateixa escola en càlcul mental fins que arribessin a 6è ja que a aquests alumnes se'ls ensenya més estratègies de càlcul mental, es deixa una mica de banda l'ensenyament de l'algoritme tradicional i fan les matemàtiques de manera manipulativa. Per tant, seria interessant veure les possibles diferències que hi hauria amb alumnes d'un mateix centre que durant el primer cicle de l'etapa d'educació primària hagin après matemàtiques de manera més innovadora.

Un altre estudi que es podria fer al mateixos alumnes seria analitzar com realitzen les restes, multiplicacions i divisions per saber si tenen alguna estratègia de càlcul mental per realitzar aquestes operacions.

També seria interessant fer el mateix estudi a alumnes del mateix cicle i d'una altra escola que no se'ls hagi ensenyat els algoritmes tradicionals per comparar les possibles diferències que hi pugui haver en la utilització de les estratègies de càlcul mental.

### - **Implicacions educatives**

Aquest treball pot estar destinat a donar una empenta als docents que vulguin començar a fer canvis en l'ensenyament de càlcul mental i a futurs mestres perquè tinguin una idea de les diferents estratègies que hi ha per fer sumes mentalment i dels beneficis que aporta l'ensenyament d'aquestes estratègies.

A partir dels resultats obtinguts d'aquest estudi es pot comprovar que els alumnes que tenen adquirides estratègies de càlcul mental obtenen millors resultats en la resolució de sumes mentalment que els alumnes que utilitzen l'algoritme tradicional per resoldre les operacions mentalment. Per aquest motiu, els docents s'haurien de conscienciar de la importància que té aquest fet i dedicar temps a l'ensenyament d'estratègies de càlcul mental. Els docents haurien plantejar-se establir unes rutines pel treball de les estratègies de càlcul mental i deixar de banda l'ensenyament dels algoritmes tradicionals, tal com diuen Kamii i Dominick (2010), els algoritmes tradicionals són perjudicials als alumnes perquè promouen a que els alumnes renunciïn el seu propi pensament i no ensenyen el valor posicional dels nombres, desvirtuant de desenvolupament del significat numèric dels alumnes.

A més, aquest treball serà la base per establir un nou canvi metodologia en l'ensenyament del càlcul mental, i de les matemàtiques en general, a l'escola on es va dur a terme l'estudi ja que els resultats evidencien les mancances que tenen els alumnes en la realització de càlcul mental i l'aplicació d'estratègies de càlcul mental.

Personalment, com a mestra, he après molt a partir de la realització d'aquest treball ja que durant el Grau d'Educació Primària a la Universitat de les Illes Balears i la meva etapa d'escolarització no havia sentit parlar de les estratègies de càlcul mental. Sincerament, crec que l'ensenyament d'estratègies de càlcul mental s'hauria de replantejar i que tingui un pes considerable en l'ensenyament de les matemàtiques i progressivament deixar de banda l'ensenyament de l'algoritme tradicional.

## 7. Bibliografia

- Bracho-López, R. (2013). Menos reglas y más sentido: alternativas metodológicas a los algoritmos de cálculo tradicionales para el desarrollo del sentido numérico en la Educación Primaria. *Actas del VII CIBEM ISSN, 2301(0797)*, 70. Recuperat de: <http://cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/301.pdf>
- Cantero, N del P. (2011). El aprendizaje del cálculo numérico en educación primaria. *Innovación i experiencias educativa*, 45. Recuperat de: [https://archivos.csif.es/archivos/andalucia/ensenanza/revistas/csicsif/revista/pdf/Numero\\_40/NATIVIDAD%20DEL%20PILAR%20CANTERO%20CASTILLO\\_1.pdf](https://archivos.csif.es/archivos/andalucia/ensenanza/revistas/csicsif/revista/pdf/Numero_40/NATIVIDAD%20DEL%20PILAR%20CANTERO%20CASTILLO_1.pdf)
- Latorre, A.; Del Rincón, D. i Amal, J. (1996) Bases metodológicas de la investigación educativa. Barcelona, p. 44.
- Gálvez, G., Cosmelli, D., Cubillos, L., Leger, P., Mena, A., Tanter, É., ... Soto-Andrade, J. (2011). Estrategias cognitivas para el cálculo mental. *Revista Latinoamericana de Investigacion En Matematica Educativa*, 14(1), 9–40. Recuperat de: [http://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S166524362011000100002&script=sci\\_artext&lng=en](http://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S166524362011000100002&script=sci_artext&lng=en)
- Gómez, B. (2005). La enseñanza del cálculo mental. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 4, 17–29. Recuperat de: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2218884>
- Gómez, B. (2008). El cálculo flexible. *Memorias XVIII encuentro de geometría y VI de aritmética*. Bogotá, Colombia. Recuperat de: <http://funes.uniandes.edu.co/5563/>
- Kamii, C. i Dominick, A. (2010). Los efectos negativos de enseñar algoritmos en grados primarios (1ro al 4to). *Revista pedagogía*, 43 (1), 59-73.
- Martínez, P. C. (2006). El método de estudio de caso: Estrategia metodológica de la investigación científica. *Pensamiento y Gestión: Revista de La División de Ciencias Administrativas de La Universidad Del Norte*, (20), 165–193. Recuperat de: <http://rcientificas.uninorte.edu.co/index.php/pensamiento/article/viewFile/3576/2301>
- Martínez, J. (2011). El método de cálculo abierto basado en números (ABN) como alternativa

de futuro respecto a los métodos tradicionales cerrados basados en cifras (CBC).  
*Bordón*, 63(4), 95-110. Recuperat de:  
<https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3795845>

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Ortega, T., i Ortiz, M. (2002 a). Cálculo mental. 1º Ciclo de educación primària. *Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática*. UNIVERSIDAD DE VALLADOLID. Recuperat de:  
<http://www.seiem.es/docs/educacion/CM1ciclocompleto.pdf>

Ortega, T., i Ortiz, M. (2002 b). Diseño de una intervención para la enseñanza-aprendizaje del cálculo mental en el aula. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 5(3), 271-292. Recuperat de:  
<http://www.redalyc.org/pdf/335/33505303.pdf>

Parrish, S. (2010). *Number Talks. Helping children build mental math and computation strategies. Grades K-5*. California: Math Solutions.

Sellas, Vila, Jurado i Esteve (2016). L'aprenentatge d'estratègies de càlcul mental a primària. *Congrés català d'educació matemàtica*. Recuperat de: [http://c2em.feemcat.org/wp-content/uploads/actes/2W104\\_RETOCANT\\_AUTORIA.pdf](http://c2em.feemcat.org/wp-content/uploads/actes/2W104_RETOCANT_AUTORIA.pdf)

Valencia, E. (2013). Desarrollo del cálculo mental a partir de entrenamiento en combinaciones numéricas y estrategias de cálculo. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 84, 5-23. Recuperat de: <http://funes.uniandes.edu.co/3666/>

Van de Walle, J. A., Karp, S. K. i Bay-Williams, J.M. (2008). *Elementary and middle school mathematics*. Teaching developmentally. Boston, MA: Pearson Education.